

## Самоиндуцированная прозрачность для терагерцовых импульсов из нескольких колебаний

С. В. Сазонов<sup>+\*1)</sup>, Н. В. Устинов<sup>×°</sup>

<sup>+</sup>Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

<sup>\*</sup>Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), 125993 Москва, Россия

<sup>×</sup>МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

<sup>°</sup>Калининградский институт управления, 236001 Калининград, Россия

Поступила в редакцию 6 мая 2020 г.

После переработки 26 мая 2020 г.

Принята к публикации 26 мая 2020 г.

Получена новая интегрируемая система уравнений, описывающая эффект самоиндуцированной прозрачности для терагерцовых импульсов с малым числом колебаний, распространяющихся в системе резонансных туннельных переходов. При выводе этой системы применен подход, основанный на использовании понятий огибающих для электрического поля импульса и дипольных моментов, задействованных во взаимодействии с ним резонансных и нерезонансных переходов. Такой подход позволяет описывать солитоны, скорость которых может быть значительно меньше линейной групповой скорости света в среде. Это выгодно отличает его от метода, при котором понятие огибающих не используется, но плотность среды предполагается малой.

DOI: 10.31857/S1234567820130054

**Введение.** В последнее время довольно активно исследуются вопросы взаимодействия терагерцового электромагнитного излучения с веществом [1–5]. Терагерцовое излучение уже сейчас находит различные приложения в системах безопасности, восстановления изображений, связи, астрономии, медицине, спектроскопии и т. д. К настоящему времени в различных научных лабораториях генерируются терагерцовые сигналы настолько высоких интенсивностей, что в самую пору говорить о необходимости развития “нелинейной терагерцовой оптики” [6, 7]. Это утверждение усиливается тем фактом, что нелинейные эффекты в терагерцовом диапазоне проявляются при интенсивностях излучения, на много порядков меньших, чем соответствующие интенсивности в оптическом диапазоне [8].

Одно из направлений развития нелинейной оптики связано с исследованиями солитонных режимов распространения коротких оптических импульсов в нелинейных диспергирующих средах [9]. При этом различают резонансные и нерезонансные солитоны. Как известно, первые солитоны, экспериментально наблюдавшиеся в нелинейной оптике, были резонансными. Ими были импульсы самоиндуцированной прозрачности (СИП) [10, 11].

Возвращаясь к терагерцовым сигналам, приходим к выводу о желательности исследования для них эффекта СИП. В терагерцовой области спектра лежат колебательные, вращательные, колебательно-вращательные и туннельные квантовые переходы среды. Поэтому именно эти переходы могут сильно возбуждаться терагерцовыми импульсами, испытывая с ними резонансное взаимодействие. В работах [7, 12, 13] рассмотрены туннельные переходы протона в двухъямном молекулярном потенциале. В этом случае туннельное расщепление приводит к образованию двух близлежащих квантовых состояний, разделенных по частоте терагерцовым интервалом.

В связи с изложенным выше актуальным представляется развитие резонансной нелинейной оптики терагерцового диапазона. Проводя здесь активные параллели с резонансной нелинейной оптикой видимого диапазона, следует ожидать соответствующих сходств и различий. Это обстоятельство может оказаться важным как со стороны фундаментальных исследований, так и с прикладной точки зрения.

При оптическом методе генерации терагерцового излучения, основанном на эффекте оптического выпрямления, генерируемые сигналы содержат порядка всего нескольких периодов электромагнитных колебаний [14, 15]. Поэтому в спектральном смысле они являются широкополосными. Тем не менее в

<sup>1)</sup>e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

спектре таких импульсов можно выделить доминирующую частоту  $\omega$ , определяемую периодом содержащихся в них нескольких осцилляций.

Помимо нерезонансного эффекта оптического выпрямления для генерации импульсов длительностью в несколько периодов колебаний (включая терагерцовые сигналы) может быть использована пассивная синхронизация мод при резонансном эффекте СИП [16, 17].

Ситуация, описанная выше, позволяет при построении теории сделать акцент на двух аспектах. Первый состоит в том, что в среде можно выделить два квантовых уровня, частота перехода между которыми близка к доминирующей частоте в спектре терагерцового импульса. Тем не менее, достаточно широкий спектр таких импульсов приводит к необходимости отойти от приближения двухуровневой среды, учтя и другие квантовые переходы. Суть второго аспекта состоит в том, что в этом случае можно использовать понятия огибающих для импульса и нестационарных дипольных моментов среды. Важно, однако, что эти огибающие здесь не являются медленно меняющимися.

Первый аспект был принят во внимание в работах [7, 12, 13], где примешивающиеся к резонансному взаимодействию переходы на вышележащие квантовые уровни учитывались в приближении оптической прозрачности. Как результат, в работе [13] была получена обобщенная редуцированная система Максвелла–Блоха (ОРМБ), интегрируемая методом обратной задачи рассеяния (МОЗР) [18–20]. В этой системе не используются понятия огибающих для поля и материальных переменных. Ее бризерные решения в резонансном случае описывают терагерцовые солитоны СИП с малым числом электромагнитных колебаний. Однако вывод системы ОРМБ схож во многом с выводом обычной редуцированной системы уравнений Максвелла–Блоха [21] и предполагает, что она описывает эффект СИП только при малой плотности туннельных переходов. В этом случае скорость распространения солитонов близка к линейной скорости света в среде.

Если отвлечься от приближения малой плотности квантовых переходов, то при эффекте СИП скорость резонансных солитонов может на 2–4 порядка быть меньше, чем линейная скорость света в среде [10, 11, 22]. Чтобы рассмотреть терагерцовые солитоны с малым числом колебаний в достаточно плотной резонансной среде, следует учесть второй отмеченный выше аспект. А именно, использовать понятие огибающих для электрического поля терагерцового импульса и для нестационарных дипольных

моментов возбуждаемых квантовых переходов. Заметим, что такой подход хорошо себя зарекомендовал в нерезонансной нелинейной оптике импульсов длительностью в несколько колебаний [23]. Здесь же этот подход позволит исследовать резонансные терагерцовые солитоны с малым числом колебаний и скоростями, значительно меньшими линейной скорости света в среде. Такое исследование и составляет содержание настоящей работы.

**Уравнения самоиндуцированной прозрачности для импульсов из малого числа колебаний.** В качестве среды будем рассматривать протоны, способные туннелировать между минимумами молекулярных двухъямных потенциалов [7, 12, 13]. Такая ситуация реализуется, например, в кристаллах типа KDP [24]. Из-за туннелирования протонов происходит расщепление основного состояния с образованием двух близких квантовых уровней с номерами 1 и 2, разделенных частотным интервалом терагерцового диапазона. С этих уровней разрешены переходы на удаленные вверх по энергии состояния. Из-за правил отбора по четности с уровней 1 и 2 разрешены переходы на разные состояния. По этой причине аппроксимируем удаленные состояния двумя квантовыми уровнями с номерами 3 и 4 противоположных четностей. Таким образом, в условиях рассматриваемой задачи приходим к четырехуровневой модели с разрешенными переходами  $1 \leftrightarrow 2$ ,  $1 \leftrightarrow 3$  и  $2 \leftrightarrow 4$ , частоты переходов которых равны  $\omega_{21} \equiv \omega_0$ ,  $\omega_{31}$  и  $\omega_{42}$  соответственно. При этом выполняется условие [24, 25]

$$\omega_0 \approx \omega \ll \omega_{31}, \omega_{42}. \quad (1)$$

Переходом между удаленными состояниями 3 и 4 будем пренебрегать вследствие их сильной ослабленности. Анализ показывает, что включение в модель большего, чем двух удаленных состояний принципиально ситуации не меняет [13].

Пусть световой импульс распространяется вдоль оси  $z$ . Тогда имеем следующую систему материальных уравнений для элементов  $\rho_{ml}$  матрицы плотности  $\rho$  ( $m, l = 1, 2, 3, 4$ ) и волнового уравнения для электрического поля  $E$  терагерцового импульса:

$$\frac{\partial \rho_{ml}}{\partial t} = -i\omega_{ml}\rho_{ml} + \frac{i}{\hbar}E \left[ \hat{d}, \hat{\rho} \right]_{ml}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \\ = \frac{4\pi n}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (d_{21}\rho_{12} + d_{31}\rho_{31} + d_{42}\rho_{24} + \text{с.с.}). \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь  $\hbar$  – постоянная Планка,  $c$  – скорость света в вакууме,  $n$  – концентрация задействованных тун-

нелинейных переходов,  $\hat{d}$  – симметричная матрица дипольного момента с отличными от нуля элементами  $d_{21} = d_{12}$ ,  $d_{31} = d_{13}$ ,  $d_{42} = d_{24}$ ,  $t$  – время.

Пусть центральная частота спектра терагерцового сигнала равна  $E$ . Тогда представим поле  $E$  и, согласно (2) и (3), недиагональные элементы матрицы плотности, соответствующие разрешенным переходам, в виде

$$E = \mathcal{E} e^{i(\omega t - kz)} + \text{с.с.}, \quad \rho_{\mu\gamma} = R_{\mu\gamma} e^{i(\omega t - kz)} + \text{с.с.}, \quad (4)$$

где  $\mu < \gamma$ ,  $k$  – волновое число, соответствующее частоте  $\omega$ .

Подставив (4) в (2) и (3) и отбросив быстро осциллирующие слагаемые на частоте  $\omega$ , приходим к системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{12}}{\partial t} &= i\Delta R_{12} - \\ &- i\frac{\mathcal{E}}{\hbar} \left[ d_{21}(\rho_{11} - \rho_{22}) - (d_{31}\rho_{23}^* - d_{42}\rho_{14}) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial R_{13}}{\partial t} = i\omega_{31}R_{13} - i\frac{\mathcal{E}}{\hbar} \left[ d_{31}(\rho_{11} - \rho_{33}) - d_{21}\rho_{23} \right], \quad (6)$$

$$\frac{\partial R_{24}}{\partial t} = i\omega_{42}R_{24} - i\frac{\mathcal{E}}{\hbar} \left[ d_{42}(\rho_{22} - \rho_{44}) - d_{21}\rho_{14} \right], \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho_{23}}{\partial t} = i\omega_{32}\rho_{23} - \frac{i}{\hbar} \left( d_{31}\mathcal{E}R_{12}^* - d_{21}\mathcal{E}^*R_{13} \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho_{14}}{\partial t} = i\omega_{41}\rho_{14} - \frac{i}{\hbar} \left( d_{42}\mathcal{E}^*R_{12} - d_{21}\mathcal{E}R_{24}^* \right), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} &= -i\frac{d_{21}}{\hbar} \left( \mathcal{E}^*R_{12} - \mathcal{E}R_{12}^* \right) - \\ &- i\frac{d_{31}}{\hbar} \left( \mathcal{E}^*R_{13} - \mathcal{E}R_{13}^* \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} &= i\frac{d_{21}}{\hbar} \left( \mathcal{E}^*R_{12} - \mathcal{E}R_{12}^* \right) - \\ &- i\frac{d_{42}}{\hbar} \left( \mathcal{E}^*R_{24} - \mathcal{E}R_{24}^* \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho_{33}}{\partial t} = i\frac{d_{31}}{\hbar} \left( \mathcal{E}^*R_{13} - \mathcal{E}R_{13}^* \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial \rho_{44}}{\partial t} = i\frac{d_{42}}{\hbar} \left( \mathcal{E}^*R_{24} - \mathcal{E}R_{24}^* \right), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \left[ 1 + i\frac{c}{2\omega} \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \right] \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right) &= \\ = -i\frac{2\pi n\omega}{c} \left( 1 - \frac{2i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Theta, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\Delta = \omega_0 - \omega$  – отстройка центральной частоты спектра импульса от резонансной частоты перехода  $1 \leftrightarrow 2$ , введено обозначение

$$\Theta = d_{21}R_{12} + d_{31}R_{13} + d_{42}R_{24},$$

а также принято, что  $k = \omega/c$ .

В правой части (14) мы пренебрегли вторыми производными по времени от  $R_{12}$ ,  $R_{13}$  и  $R_{24}$ . При этом с хорошей точностью имеем  $\rho_{34} = 0$ . Кроме того, при получении материальных уравнений (6) и (7) мы, в соответствии с (1), учли, что  $\omega_{31} - \omega \approx \omega_{31} - \omega_0 \approx \omega_{31}$  и  $\omega_{42} - \omega \approx \omega_{42} - \omega_0 \approx \omega_{42}$ .

В силу того же условия (1) имеем  $1 \gg \omega_0/\omega_{31} \sim \omega/\omega_{31} \sim \omega/\omega_{42}$ . Так как импульс вмещает всего несколько, но все же более одного колебания, то  $\omega > 1/\tau_p$ , где  $\tau_p$  – временная длительность импульса. Тогда  $\omega_{31}\tau_p \sim \omega_{42}\tau_p \gg 1$ . Поскольку как  $\omega_{31} \approx \omega_{32}$  и  $\omega_{42} \approx \omega_{41}$ , то с очевидностью выполняются неравенства  $\omega_{32}/\omega \sim \omega_{41}/\omega \gg 1$ . Перепишем отмеченные неравенства, введя малые параметры:

$$\varepsilon_1 \sim (\omega_{31}\tau_p)^{-1} \sim (\omega_{42}\tau_p)^{-1} \ll 1, \quad (15)$$

$$\varepsilon_2 \sim \frac{\omega}{\omega_{32}} \sim \frac{\omega}{\omega_{41}} \ll 1. \quad (16)$$

Ограничимся ниже приближениями первого порядка по этим параметрам.

В силу условий (15), (16) в первом порядке по  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  в уравнениях (6)–(9) можно пренебречь левыми частями, превратив их из дифференциальных уравнений в алгебраические. Тогда из (6)–(9) имеем

$$R_{13} = \frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega_{31}} \left[ d_{31}(\rho_{11} - \rho_{33}) - d_{21}\rho_{23} \right], \quad (17)$$

$$R_{24} = \frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega_{42}} \left[ d_{42}(\rho_{22} - \rho_{44}) - d_{21}\rho_{14} \right], \quad (18)$$

$$\rho_{23} = \frac{d_{31}\mathcal{E}R_{12}^* - d_{21}\mathcal{E}^*R_{13}}{\hbar\omega_{32}}, \quad (19)$$

$$\rho_{14} = \frac{d_{42}\mathcal{E}^*R_{12} - d_{21}\mathcal{E}R_{24}^*}{\hbar\omega_{41}}. \quad (20)$$

Отсюда легко видеть, что последними слагаемыми в квадратных скобках (17), (18) и в числителях (19), (20) следует пренебречь, поскольку они второго порядка малости относительно  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Тогда, подставив (17) и (18) в уравнения (12) и (13), получим  $\partial\rho_{33}/\partial t = \partial\rho_{44}/\partial t = 0$ . Ниже будем считать, что до воздействия импульса на среду были заселены только два нижних состояния 1 и 2. В результате имеем  $\rho_{33} = \rho_{44} = 0$ . Таким образом,

$$R_{13} = \frac{d_{31}\mathcal{E}}{\hbar\omega_{31}}\rho_{11}, \quad \rho_{23} = \frac{d_{31}\mathcal{E}R_{12}^*}{\hbar\omega_{32}} \approx \frac{d_{31}\mathcal{E}R_{12}^*}{\hbar\omega_{31}}, \quad (21)$$

$$R_{24} = \frac{d_{42}\mathcal{E}}{\hbar\omega_{42}}\rho_{22}, \quad \rho_{14} = \frac{d_{42}\mathcal{E}^*R_{12}}{\hbar\omega_{41}} \approx \frac{d_{42}\mathcal{E}^*R_{12}}{\hbar\omega_{42}}. \quad (22)$$

Введем разность населенностей двух нижних состояний  $W = (\rho_{22} - \rho_{11})/2$ . Так как верхние состояния

в принятом приближении не заселяются, то выполняется условие нормировки  $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$ . Отсюда имеем

$$\rho_{11} = \frac{1}{2} - W, \quad \rho_{22} = \frac{1}{2} + W. \quad (23)$$

Подставив теперь вторые выражения (21) и (22) в (5), а первые – в (10) и (11), после использования (23) придем к уравнениям

$$\frac{\partial R_{12}}{\partial t} = i \left[ \Delta + \left( \frac{d_{31}^2}{\omega_{31}} - \frac{d_{42}^2}{\omega_{42}} \right) \frac{|\mathcal{E}|^2}{\hbar^2} \right] R_{12} + 2i \frac{d_{21} \mathcal{E}}{\hbar} W, \quad (24)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = i \frac{d_{21}}{\hbar} (\mathcal{E}^* R_{12} - \mathcal{E} R_{12}^*). \quad (25)$$

Таким образом, из материальных уравнений мы исключили переменные, относящиеся к удаленным квантовым состояниям и к переходам на них из двух нижних состояний. Прделаем теперь аналогичные операции с волновым уравнением (14).

Пусть для нерезонансных переходов  $1 \leftrightarrow 3$  и  $2 \leftrightarrow 4$  выполняется условие малой плотности

$$\eta = \frac{\pi n}{\hbar} \left( \frac{d_{31}^2}{\omega_{31}} + \frac{d_{42}^2}{\omega_{42}} \right) \ll 1. \quad (26)$$

Тогда в квадратных скобках левой части (14) можно приближенно положить  $\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ . Переносим затем оператор в квадратных скобках в правую часть, будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \\ & = -i \frac{2\pi n \omega}{c} \left( 1 - \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{2i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Theta \approx, \\ & \approx \frac{2\pi n \omega}{c} \left( 1 + \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( 1 - \frac{2i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Theta \approx, \\ & \approx -i \frac{2\pi n \omega}{c} \left( 1 - \frac{i}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Theta. \end{aligned}$$

Подставив сюда первые выражения (21) и (22), с учетом (23) получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -i \frac{\omega}{c} \eta \mathcal{E} - \\ & - \frac{2\pi n}{c} \left( i\omega + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[ d_{21} R_{12} - \left( \frac{d_{31}^2}{\omega_{31}} - \frac{d_{42}^2}{\omega_{42}} \right) \frac{\mathcal{E}}{\hbar} W \right], \quad (27) \end{aligned}$$

где линейная групповая скорость  $v_g$  определяется выражением  $v_g = c/(1 + \eta)$ .

Теперь используем фазовые преобразования

$$\frac{2d_{21}}{\hbar} \mathcal{E} = \psi e^{-i\omega\eta z/c}, \quad R_{21} = R e^{-i\omega\eta z/c}. \quad (28)$$

Тогда система уравнений (24), (25), (27) примет вид

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = i (\Delta + \beta |\psi|^2) R + i\psi W, \quad (29)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{i}{2} (\psi^* R - \psi R^*), \quad (30)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\alpha \left( i\omega + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) (R - 2\beta \psi W). \quad (31)$$

Здесь

$$\tau = t - \frac{z}{v_g}, \quad \alpha = \frac{4\pi d_{21}^2 n}{\hbar c}, \quad \beta = \frac{1}{4d_{21}^2} \left( \frac{d_{31}^2}{\omega_{31}} - \frac{d_{42}^2}{\omega_{42}} \right).$$

Системой (29)–(31) описывается эффект СИП для терагерцовых импульсов с малым числом колебаний в системе туннельных переходов.

Пренебрегая производной  $\frac{\partial}{\partial \tau}$  в правой части уравнения (31), придем к системе, описывающей СИП для квазимонохроматических терагерцовых импульсов. Если к тому же положить  $\beta = 0$ , то система (29)–(31) перейдет в систему СИП в двухуровневой среде [10, 11]. В этой связи заметим, что слагаемые с коэффициентом  $\beta$  в (29) и (31), учитывающие влияние квантовых переходов на удаленные уровни, в общем случае нельзя рассматривать как малые поправки к уравнениям СИП для двухуровневой среды. Например, в случае точного резонанса ( $\Delta = 0$ ) слагаемое  $\beta |\psi|^2$  в скобках уравнения (29) становится доминирующим и способно оказать принципиальное влияние на эффект СИП.

**Терагерцевые солитоны СИП.** Система (29)–(31) тоже оказалась интегрируемой в рамках МОЗР [18–20], как и обычные уравнения СИП. Эту систему удалось записать в виде условия нулевой кривизны

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial z} - \frac{\partial \hat{A}}{\partial \tau} + [\hat{L}, \hat{A}] = 0,$$

в котором матрицы  $\hat{L}$  и  $\hat{A}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \frac{i}{16} \begin{pmatrix} \Xi & \frac{2\rho_-}{\sigma} (\lambda - \lambda_0) \psi \\ -\frac{2\rho_-}{\sigma} (\lambda + \lambda_0) \psi^* & -\Xi \end{pmatrix}, \\ \hat{A} &= \frac{i\alpha}{2} \begin{pmatrix} -\Phi W & \frac{2\sigma(\lambda - \lambda_0)}{\lambda - 1} R \\ -\frac{2\sigma(\lambda + \lambda_0)}{\lambda - 1} R^* & \Phi W \end{pmatrix} \\ & \quad + 2\alpha \beta W \hat{L}. \end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\Xi = \lambda \rho_- \frac{\omega_+ + \beta |\psi|^2}{\beta \omega_+} - \frac{4\beta \omega_- - 1}{\beta} + \frac{\rho_+}{\omega_+} |\psi|^2,$$

$$\Phi = \frac{8\beta\omega_+}{\rho_-(\lambda - 1)} + 1 - 2\beta\omega,$$

$$\lambda_0 = \frac{\rho_+}{\rho_-}, \quad \sigma = \sqrt{\beta\omega_+},$$

$$\rho_{\pm} = 4\beta\omega_{\pm} \pm 1, \quad \omega_{\pm} = \omega \pm \Delta,$$

$\lambda$  – спектральный параметр.

С помощью алгебраических методов, связанных с МОЗР, нами были получены солитонные решения системы (29)–(31). Эти решения записываются в неявной форме и имеют чрезвычайно громоздкий вид. Поэтому мы не приводим здесь выражения для солитонных решений и представим только графики безразмерной напряженности электрического поля

$$Q = \frac{\psi}{\omega_0} e^{i\omega\tau} + \text{с.с.},$$

соответствующей этим решениям.

Односолитонное решение системы (29)–(31) имеет один свободный параметр, в качестве которого можно выбрать длительность  $\tau_p$  солитона, исходя из того, что на его хвостах имеется экспоненциальный спад:  $\psi \sim \exp\left(-\frac{|t-z/v|}{\tau_p}\right)$ , где  $v$  – групповая скорость солитона (см. ниже). Две постоянные, определяющие положение центра солитона и его начальную фазу, можно положить равными нулю, выбрав соответствующим образом начала отсчета координаты  $z$  и времени  $t$ . Центральная частота  $\omega$  спектра терагерцового солитона задается изначально в системе (29)–(31). Значение безразмерного параметра  $\omega\tau_p$  пропорционально количеству  $N$  колебаний, содержащихся в солитоне. Так, однопериодному солитону соответствует  $\omega\tau_p \approx 2\pi$ . На рисунках 1 и 2 представлены графики переменной  $Q$  для случаев  $\beta > 0$  и  $\beta < 0$  соответственно. Импульсы, для которых  $\omega\tau_p \approx 6\pi$  (трехпериодные солитоны), изображены толстыми линиями. Тонкой линией на рис. 1 показан солитон, содержащий полтора колебания ( $\omega\tau_p \approx 3\pi$ ). На рисунках 2 тонкой линией изображен однопериодный солитон.

Имеются отличия в свойствах односолитонных решений системы (29)–(31) при разных знаках параметра  $\beta$ . В случае  $\beta > 0$  у солитонов имеются предельные наименьшая длительность и наибольшая амплитуда. Импульс, изображенный тонкой линией на рис. 1, имеет параметры, близкие к предельным. В случае  $\beta < 0$  у солитонов возникает осциляция заостренной формы при уменьшении длительности (см. график, изображенный тонкой линией, на рис. 2). Здесь амплитуда солитона неограниченно растет при уменьшении длительности. Отмеченные эффекты ярко проявляются для однопериодных солитонов. При этом трехпериодные солитоны близки

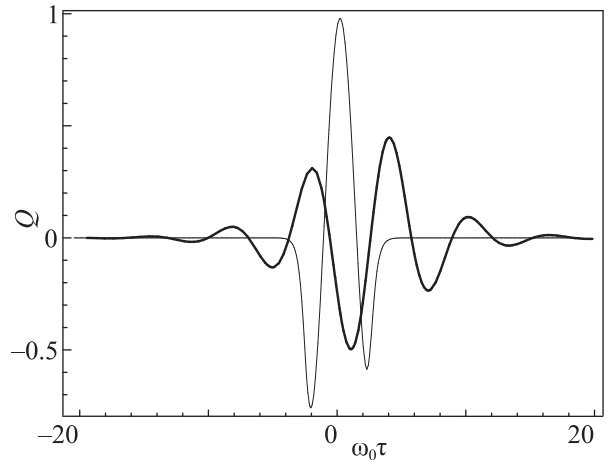


Рис. 1. Временные зависимости полторапериодных (тонкая линия) и трехпериодных (толстая линия) солитонных профилей электрического поля лазерного импульса в случае  $\beta > 0$

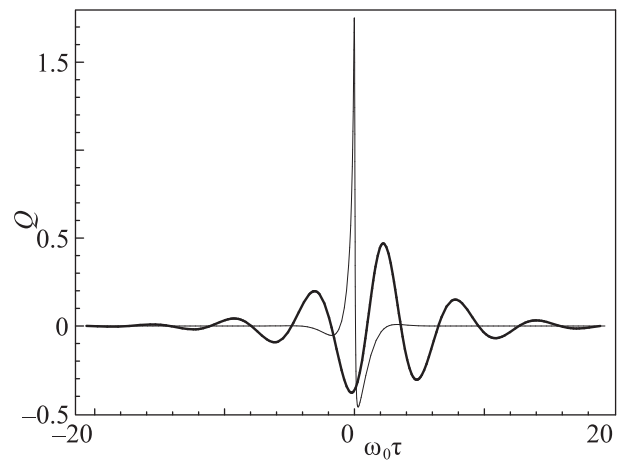


Рис. 2. Временные зависимости однопериодных (тонкая линия) и трехпериодных (толстая линия) солитонных профилей электрического поля лазерного импульса в случае  $\beta < 0$

по своим свойствам к квазимонохроматическим импульсам, практически не проявляя свойств предельных и заостренных солитонов.

Выражение для скорости  $v$  солитонов можно получить, используя метод аналитического продолжения дисперсионных параметров на комплексную плоскость [26–28]. Согласно этому методу, сначала линеаризуем систему (29)–(31). Затем, полагая  $\psi, R \sim e^{i(\Omega t - qz)}$ , придем к дисперсионному уравнению

$$q = \frac{\Omega}{v_g} + \alpha \frac{w_1 - w_2}{2} (\omega + \Omega) \left( \frac{1}{\Delta - \Omega} + 2\beta \right),$$

где  $w_1$  и  $w_2$  – начальные населенности первого и второго уровней соответственно. Теперь совершим в этом уравнении замены  $q \rightarrow q + i\kappa$ ,  $\Omega \rightarrow i/\tau_p$ . Выделив после этого в обеих частях мнимые части, с помощью соотношения  $1/v = 1/(\kappa\tau_p)$  и при учете (23) придем к выражению

$$\frac{1}{v} = \frac{n_0}{c} + \alpha \frac{w_1 - w_2}{2} \frac{\omega_0}{1 + (\Delta\tau_p)^2} \tau_p^2. \quad (32)$$

Здесь

$$n_0 = 1 + \frac{2\pi n}{\hbar} \left( \frac{d_{31}^2}{\omega_{31}} w_1 + \frac{d_{42}^2}{\omega_{42}} w_2 \right)$$

– показатель преломления, создаваемый переходами  $1 \leftrightarrow 3$  и  $2 \leftrightarrow 4$ .

Выражение (32) практически не отличается от выражения для обратной скорости квазимонохроматических солитонов СИП в резонансной двухуровневой среде.

В соответствии с (26) имеем  $n_0 \approx 1$ . Взяв, кроме того,  $d_{21} \sim 10^{-18}$  СГСЭ,  $n \sim 10^{22}$  см $^{-3}$ ,  $\Delta = 0$ ,  $\omega_0 \sim 10^{13}$  с $^{-1}$ ,  $\tau_p \approx 5/\omega_0$ , получим  $v \sim (0.01–0.1)$  с. Эта оценка соответствует однопериодному терагерцовому импульсу. Таким образом, скорость однопериодного терагерцового солитона СИП может на один – два порядка быть меньше, чем скорость света в вакууме.

Пусть длительность рассматриваемого терагерцового сигнала  $\tau_p \sim 10^{-12}$  с. Тогда  $|\mathcal{E}| \sim \hbar/d_{21}\tau_p \sim 10^3$  СГСЭ. Следовательно, интенсивность импульса  $I \sim c|\mathcal{E}|^2/4\pi \sim 10^8$  Вт/см $^2$ . Такие интенсивности терагерцовых сигналов вполне достижимы в современных лабораториях [8]. Поэтому можно ожидать экспериментального обнаружения теоретически исследованных здесь терагерцовых солитонов СИП.

**Заключение.** Таким образом, здесь нами получена новая интегрируемая система материальных и волнового уравнений, описывающая эффект СИП для терагерцовых импульсов с небольшим числом колебаний. Проведенное выше исследование показывает, что использование понятия огибающих для поля и дипольных моментов среды имеет свое преимущество перед подходом, где это понятие не используется (система ОРМБ [13]).

Преимущество заключается в том, что при использовании огибающих скорость найденных солитонов СИП не обязательно должна быть близка к линейной скорости света в среде, а может на порядки быть меньше этой скорости. Это обусловлено тем, что при использовании огибающей отпадает необходимость применять приближение однонаправленного распространения, справедливого в случае малой плотности задействованных квантовых переходов

[13, 21]. Здесь мы такое приближение использовали только для нерезонансных переходов  $1 \leftrightarrow 3$  и  $2 \leftrightarrow 4$  (см. (26)). В то же время для резонансного перехода  $1 \leftrightarrow 2$  такое приближение не использовалось.

Значительное уменьшение скорости распространения терагерцовых сигналов при эффекте СИП может быть использовано в терагерцовых линиях задержки. Такие линии могут оказаться полезными, например, для реализации голографической записи информации с помощью широкополосных сигналов [29]. В этом случае можно говорить о развитии терагерцовой динамической голографии.

В качестве резонансной среды, на которую воздействуют мощные терагерцовые сигналы, здесь мы предложили использовать сегнетоэлектрик типа KDP, содержащий туннельные переходы протонов. Однако не следует ограничиваться только этим примером. Квантовые переходы, аналогичные рассмотренным здесь, реализуются еще в таких объектах, как квантовые точки, квантовые ямы [30–32], многослойные гетероструктуры [33] и т.д. Более того, частоты соответствующих квантовых переходов могут принадлежать терагерцовому диапазону [34]. Поэтому можно ожидать экспериментальной реализации исследованного здесь эффекта СИП и на таких объектах.

Пренебрежение быстро осциллирующими слагаемыми при выводе материальных уравнений (29) и (30) (приближение вращающейся волны [22]), а также отбрасывание высших (после первой) степеней оператора  $\frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial t}$  при выводе волнового уравнения (31) могут проявить себя как недостатки используемого здесь подхода при рассмотрении солитонов длительностью в одно колебание. В то же время, как отмечалось выше, для однопериодного солитона  $\omega\tau_p \approx 2\pi$ . Тогда учет второй и высших степеней разложения данного оператора в волновом уравнении, а также быстро осциллирующих слагаемых в материальных уравнениях эквивалентны относительным поправкам  $\sim (\omega\tau_p)^{-2} \approx 0.025$ . Поэтому мы можем утверждать, что уже однопериодные солитоны описываются системой (29)–(31) с хорошей точностью. Это утверждение тем более справедливо для двух- и трехпериодных солитонов, не говоря о солитонах с еще большим количеством колебаний.

Немаловажным и естественным представляется обобщение системы (29)–(31) на случай учета неоднородного уширения резонансного туннельного перехода и исследование такой системы на интегрируемость с поиском соответствующих солитонных решений. Однако данное исследование выходит за рамки настоящей работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (# 19-02-00234а).

1. G. Kh. Kitaeva, *Laser Phys. Lett.* **5**, 559 (2008).
2. А. Н. Тучак, Г. Н. Гольцман, Г. Х. Китаева, А. Н. Пенин, С. В. Селиверстов, М. И. Финкель, А. В. Шепелев, П. В. Якунин, *Письма в ЖЭТФ* **96**, 97 (2012) [A. N. Tuchak, G. N. Gol'tsman, G. Kh. Kitaeva, A. N. Penin, S. V. Seliverstov, M. I. Finkel, A. V. Shepelev, and P. V. Yakunin, *JETP Lett.* **96**, 94 (2012)].
3. С. В. Сазонов, *Письма в ЖЭТФ* **96**, 281 (2012) [S. V. Sazonov, *JETP Lett.* **96**, 263 (2012)].
4. S. Stremoukhov and A. Andreev, *J. Opt. Soc. Am. B* **34**, 020232 (2017).
5. А. Н. Бугай, *ЭЧАЯ* **50**, 185 (2019) [A. N. Bugay, *Physics of Particles and Nuclei* **50**, 210 (2019)].
6. С. Р. Hauri, C. Ruchert, C. Vicario, and F. Ardana, *Appl. Phys. Lett.* **99**, 161116 (2011).
7. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **146**, 483 (2014) [S. V. Sazonov, *JETP* **119**, 423 (2014)].
8. А. Н. Tsyarkin, М. В. Melnik, М. О. Zhukova, I. O. Vorontsova, S. E. Putilin, S. A. Kozlov, and X. C. Zhang, *Opt. Express* **27**, 10419 (2019).
9. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны: от волоконных световодов к фотонным кристаллам*, Физматлит, М. (2005), 648 с. [Yu. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, N.Y. (2003)].
10. S. L. McCall and E. L. Hahn, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 908 (1967).
11. S. L. McCall and E. L. Hahn, *Phys. Rev.* **183**, 457 (1969).
12. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, *Phys. Rev. A* **98**, 063803 (2018).
13. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, *Phys. Rev. A* **100**, 053807 (2019).
14. А. Г. Степанов, А. А. Мельников, В. О. Компанец, С. В. Чекалин, *Письма в ЖЭТФ* **85**, 279 (2007) [A. G. Stepanov, A. A. Mel'nikov, V. O. Kompanets, and S. V. Chekalin, *JETP Lett.* **85**, 227 (2007)].
15. А. Н. Бугай, С. В. Сазонов, *Письма в ЖЭТФ* **87**, 470 (2008) [A. N. Bugai and S. V. Sazonov, *JETP Lett.* **87**, 403 (2008)].
16. М. В. Архипов, Р. М. Архипов, А. А. Шимко, И. Бабушкин, Н. Н. Розанов, *Письма в ЖЭТФ* **109**, 657 (2019) [M. V. Arkhipov, R. M. Arkhipov, A. A. Shimko, I. Babushkin, and N. N. Rosanov, *JETP Lett.* **109**, 634 (2019)].
17. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, А. А. Шимко, А. В. Пахомов, Н. Н. Розанов, *Письма в ЖЭТФ* **110**, 9 (2019) [R. M. Arkhipov, M. V. Arkhipov, A. A. Shimko, A. V. Pakhomov, and N. N. Rosanov, *JETP Lett.* **110**, 15 (2019)].
18. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, М. (1980) [V. E. Zakharov, S. V. Manakov, S. P. Novikov, and L. P. Pitaevskii, *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*, Consultants Bureau, N.Y. (1984)].
19. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, М. (1988) [R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. Gibbon, and H. C. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Academic Press, N.Y. (1982)].
20. М. J. Ablowitz and P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, Cambridge University Press, Cambridge (1991).
21. P. J. Caudrey, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and R. K. Bullough, *J. Phys. A: Math. Nucl. Gen.* **6**, L53 (1973).
22. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, М. (1978) [L. Allen and J. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, John Wiley and Sons, N.Y. (1975)].
23. Т. Brabec and F. Krausz, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 545 (2000).
24. В. Г. Вакс, *Введение в микроскопическую теорию сегнетоэлектриков*, Наука, М. (1973), 327 с.
25. R. Blintz and B. Zheks, *Soft Modes in Ferroelectrics and Antiferroelectrics*, North-Holland, Amsterdam (1974).
26. Е. Shlöman, *Appl. Phys. Lett.* **19**, 274 (1971).
27. В. Г. Барьяхтар, Б. А. Иванов, А. Л. Сукстанский, *Письма в ЖЭТФ* **27**, 226 (1978) [V. G. Bar'yakhtar, B. A. Ivanov, and A. L. Sukstanskii, *JETP Lett.* **27**, 211 (1978)].
28. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **119**, 419 (2001) [S. V. Sazonov, *JETP* **92**, 361 (2001)].
29. Р. М. Архипов, М. В. Архипов, Н. Н. Розанов, *Письма в ЖЭТФ* **111**, 586 (2020).
30. А. И. Маймистов, *Оптика и спектроскопия* **97**, 981 (2004) [A. I. Maimistov, *Optics and Spectroscopy* **97**, 920 (2004)].
31. А. М. Башаров, С. А. Дубовис, *ЖЭТФ* **128**, 476 (2005) [A. M. Basharov and S. A. Dubovis, *JETP* **101**, 410 (2005)].
32. А. М. Башаров, С. А. Дубовис, Н. В. Знаменский, *Оптика и спектроскопия* **104**, 784 (2008) [A. M. Basharov, S. A. Dubovis, and N. V. Znamenskii, *Optics and Spectroscopy* **104**, 709 (2008)].
33. А. Е. Шеголев, А. М. Попов, А. В. Богацкая, П. М. Никифорова, М. В. Терешонок, Н. В. Кленов, *Письма в ЖЭТФ* **111**, 443 (2020) [A. E. Shchegolev, A. M. Popov, A. V. Bogatskaya, P. M. Nikiforova, M. V. Tereshonok, and N. V. Klenov, *JETP Lett.* **111**, 371 (2020)].
34. Д. В. Козлов, В. В. Румянцев, А. М. Кадыков, М. А. Фадеев, Н. С. Куликов, В. В. Уточкин,

Н. Н. Михайлов, С. А. Дворецкий, В. И. Гавриленко, Х.-В. Хюберс, Ф. Теппе, С. В. Морозов, Письма в ЖЭТФ **109**, 679 (2019) [D. V. Kozlov, V. V. Romyantsev, A. M. Kadykov, M. A. Fadeev,

N. S. Kulikov, V. V. Utochkin, N. N. Mikhailov, S. A. Dvoretiskii, V. I. Gavrilenko, H. W. Hubers, F. Teppe, and S. V. Morozov, JETP Lett. **109**, 657 (2019)].