Письма в ЖЭТФ, том 112, вып. 2, с. 81 – 87 © 2020 г. 25 июля

Генерация терагерцового излучения многоцветными ионизирующими импульсами

В. А. Костин[+*], *И. Д. Ларюшин*[+*], *Н. В. Введенский*[+*1)]

[+]*Институт прикладной физики РАН, 603950 Н. Новгород, Россия*

[*]*Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603950 Н. Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 29 апреля 2020 г.
После переработки 7 июня 2020 г.
Принята к публикации 8 июня 2020 г.

Получены аналитические формулы для оптимальной волновой формы ионизирующего импульса и отвечающих ей максимальных значений плотности остаточных терагерцовых токов. Найденные аналитические решения могут быть реализованы с использованием многоцветных фемтосекундных импульсов, содержащих поле на основной частоте и несколько его начальных гармоник, при этом в оптимальном для генерации терагерцового излучения поле амплитуды нечетных гармоник больше, чем соседних четных. Максимальная остаточная плотность тока растет как с увеличением числа гармоник, длины волны основной гармоники и потенциала ионизации частиц газа, так и с уменьшением длительности ионизирующего импульса, приближаясь к предельным значениям в условиях насыщения ионизации при использовании малоцикловых импульсов.

DOI: 10.31857/S1234567820140037

Методы генерации терагерцового (ТГц) излучения, основанные на ионизации газов интенсивными фемтосекундными лазерными импульсами, позволяют получать мощные сверхширокополосные импульсы, спектр которых простирается от единиц ТГц до нескольких десятков ТГц [1–5]. Как правило, эти методы реализуются с использованием бихроматических импульсов с пиковой интенсивностью $\sim 10^{14}\ldots10^{15}$ Вт/см^2, соответствующей туннельной ионизации атомов и молекул, при этом отношение частот одноцветных компонент, образующих эти импульсы, равно 2 [1–11]. Как было предсказано в [12] и затем экспериментально подтверждено в [13], эффективная ТГц-генерация возможна также и при использовании бихроматических импульсов с другими частотными отношениями, равными рациональным дробям с не очень большой нечетной суммой числителя и знаменателя; при этом само возникновение ТГц-излучения является частным проявлением ионизационного многоволнового смешения, приводящего к генерации излучения также и в других, более высокочастотных, спектральных диапазонах [14–17]. Верхняя граница, до которой простирается спектр получаемых ТГц-импульсов, определяется обратной длительностью ионизации, которая, вследствие резкости зависимости скорости ионизации от напряженности поля, много меньше длительности лазерного импульса [4, 10–15, 18]. Использование таких ТГц-импульсов существенно расширяет возможности спектроскопии и диагностики, а также реализации нелинейных свойств различных материалов и сред по сравнению с ТГц-импульсами, получаемыми другими методами [2–4].

Одной из ключевых проблем в исследованиях генерации ТГц-импульсов является поиск способов увеличения эффективности и яркости соответствующих источников ТГц-излучения за счет изменения свойств ионизируемой среды или параметров самих ионизирующих импульсов [1–8, 19–25]. Последнее включает использование многоцветных импульсов [21–25] вместо традиционно используемых бихроматических (двухцветных) импульсов. В работе [21] в условиях сравнительно невысоких значений интенсивностей ионизирующих импульсов, когда эффекты истощения нейтральных частиц не столь существенны, было получено, что последовательное добавление гармоник к основному полю значительно увеличивает плотность тока в образующейся плазме, отвечающего за генерацию ТГц-излучения. Однако важный вопрос о том, какие значения плотности ТГц-тока могут быть достигнуты при использовании более интенсивных многоцветных ионизирующих импульсов, соответствующих высоким значениям степени иони-

1)e-mail: vved@appl.sci-nnov.ru

зации образующейся плазмы, до сих пор остается открытым.

В настоящей работе мы исследуем, как истощение нейтральных частиц ограничивает рост плотности ТГц-тока и, соответственно, возможности повышения яркости основанных на ионизации ТГц-источников за счет оптимизации волновой формы и интенсивности ионизирующих импульсов. Мы впервые находим плотность тока насыщения и отвечающую ей волновую форму ионизирующего импульса, позволяющую определить, в частности, оптимальные соотношения между амплитудами гармоник, образующих многоцветный ионизирующий импульс.

Как известно, энергия низкочастотной части ТГц-излучения (с частотами, ниже обратной длительности фемтосекундного лазерного импульса) пропорциональна квадрату генерируемой в плазме остаточной плотности тока (ОПТ) [10, 18, 26–28]. Как было показано ранее для бихроматических полей, состоящих из линейно поляризованных одноцветных компонент, наиболее интенсивные ТГц-импульсы генерируются в случае параллельных поляризаций (т.е. когда суммарное поле всегда направлено вдоль одной прямой) [10, 13]. При однократной туннельной ионизации атомов или молекул в электрическом поле с напряженностью $\mathbf{E}(t) = E_x(t)\mathbf{x}_0 \equiv -\dot{a}(t)\mathbf{x}_0$ ($\mathbf{x}_0$ – единичный вектор вдоль оси x) проекция ОПТ J_x на ось x находится из уравнений

$$J_x = \frac{e^2 N_m}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma E_x\,dt \equiv \frac{e^2 N_m}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{\sigma} a\,dt, \qquad (1)$$

$$\dot{\sigma} = (1-\sigma)w(|\dot{a}|) \qquad (2)$$

с начальным условием $\sigma(t \to -\infty) = 0$, где $a(t) = -\int_{-\infty}^{t} E_x(t')\,dt'$, e – элементарный заряд, m – масса электрона, N_m – начальная концентрация нейтральных частиц, $\sigma(t) = N(t)/N_m$ – степень ионизации, $N(t)$ – плотность плазмы, $w(|\dot{a}|)$ – вероятность ионизации в единицу времени, точка над символом обозначает производную по времени t.

В первой части данной работы найдем аналитически максимальную ОПТ $J_{\max}(\sigma_T)$ и отвечающее ей оптимальное поле $E_x = E_{\text{opt}}(t)$ такое, что $E_x(|t| > T/2) \equiv 0$, $\int_{-T/2}^{T/2} E_x\,dt = 0$ и

$$\int_{-T/2}^{T/2} a\,dt = 0 \qquad (3)$$

при фиксированных T и конечной степени ионизации $\sigma_T = \sigma(T/2)$. Пусть $n(E) \equiv w'(E)E/w(E) > 1$ при любых E. Тогда $J_{\max}(\sigma_T) = e^2 N_m \sigma_T T E_{\max}(\sigma_T)/m$, где $E_{\max}(\sigma_T)$ находится из вариационной задачи максимизации функционала

$$E_T[a(t),\sigma(t)] = \frac{\int_{-T/2}^{T/2}(1-\sigma)w(|\dot{a}|)a\,dt}{T\left[\sigma(T/2)-\sigma(-T/2)\right]} \qquad (4)$$

при ограничениях (2), (3) и краевых условиях

$$\sigma(-T/2) = 0, \quad \sigma(T/2) = \sigma_T, \quad a(\pm T/2) = 0. \qquad (5)$$

Методом неопределенных множителей Лагранжа поиск условного экстремума $E_T[a(t),\sigma(t)]$ сводится к нахождению безусловного экстремума функционала $\mathcal{S}[a(t),\sigma(t),p(t),\chi] = \int_{-T/2}^{T/2}\mathcal{L}\,dt$ с функцией Лагранжа $\mathcal{L}(a,\sigma,p,\dot{a},\dot{\sigma},\chi) = \chi a + p\dot{\sigma} - (p+a)(1-\sigma)w(|\dot{a}|)$, где $p(t)$ и χ – множители Лагранжа, отвечающие условиям (2) и (3) соответственно. На экстремали сохраняется значение функции Гамильтона

$$H = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{a}}\dot{a} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\sigma}}\dot{\sigma} - \mathcal{L} = = -(n-1)(p+a)(1-\sigma)w - \chi a = \text{const}; \qquad (6)$$

здесь и далее для краткости опускается аргумент $|E_x| \equiv |\dot{a}|$ при n и w. Используя (6), исключаем p из уравнений Эйлера–Лагранжа и получаем связь между a и σ на экстремали,

$$\sigma = \psi + \chi t - \frac{n}{n-1}\frac{H+\chi a}{\dot{a}}, \qquad (7)$$

где ψ – константа интегрирования. Подставляя (7) в (2), можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для a. Значения двух констант интегрирования, а также ψ, χ и H определяются из условий (3) и (5).

При $\sigma_T \ll 1$ задача сводится к уравнению первого порядка для a, которое интегрируется в квадратурах. В частности, для $w(E) = CE^n$ с постоянным коэффициентом C получаем $E_{\text{opt}} \equiv -\dot{a}_{\text{opt}}$, где

$$a_{\text{opt}}(t) \approx E_{\max}T\left[2I_{|u|}^{-1}\left(1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{n}\right], \qquad (8)$$

$$E_{\max} \approx \frac{n}{4\pi}\sin\frac{\pi}{n}\left[\frac{\sigma_T}{(n-1)CT}\right]^{1/n}, \qquad (9)$$

$u = 2\{(t-t_d)/T + 1/2\} - 1$, $t_d \approx -(T/2)I_{(n-1)/2n}(1 - 1/n, 1 + 1/n)$, фигурные скобки $\{z\} = z - \lfloor z \rfloor$ обозначают дробную часть, $I_z(\alpha,\beta)$ и $I_z^{-1}(\alpha,\beta)$ – регуляризованная неполная бета-функция и обратная к ней (по аргументу z) соответственно [29]. При $n \gg 1$: $t_d \approx -T/4$ и

$$E_{\text{opt}}(t) \approx 4E_{\max}\left(1/|u| - 1\right)^{1/n}\operatorname{sign} u. \qquad (10)$$

Решение для произвольной зависимости $w(E)$ достаточно громоздко, однако при $n_{\rm eff} = n(4E_{\max}) \gg 1$ (когда $E = 4E_{\max}$ соответствует быстрорастущему участку $w(E)$) можно найти $E_{\max}$ из уравнения $w(4E_{\max}) = \sigma_T/Tn_{\rm eff}$ (которое соответствует $w(E) \propto \propto E^{n_{\rm eff}}$). В частности, для туннельной формулы [30]

$$w(E) = \begin{cases} 4\omega_a\kappa^5 \dfrac{E_a}{E}\exp\left(-\dfrac{2\kappa^3 E_a}{3E}\right), & E < E', \\ 2.4\omega_a \dfrac{E^2}{\kappa^4 E_a^2}, & E \geqslant E' \end{cases} \quad (11)$$

получим $E_{\max} \approx \kappa^3 E_a/6n_{\rm eff}$ и

$$n_{\rm eff} \approx -2{\rm Wm}[-\sqrt{\sigma_T/24\kappa^2\omega_a T}] \approx \approx \ln[(6\kappa^2\omega_a T/\sigma_T)\ln^2(24\kappa^2\omega_a T/\sigma_T)], \quad (12)$$

где $\omega_a \approx 4.13\times10^{16}\,$с$^{-1}$ и $E_a \approx 5.14\times10^9\,$В/см – атомные единицы частоты и поля соответственно, $\kappa = \sqrt{U_i/U_{\rm H}}$, $E' \approx 0.084\kappa^3 E_a$, U_i – потенциал ионизации, $U_{\rm H} \approx 13.61\,$эВ, Wm обозначает -1-ю (неосновную, "нижнюю") ветвь функции Ламберта [29].

Зависимость $J_{\max}(\sigma_T)$ монотонно возрастает и ограничена, так что существует точная верхняя грань $J_{\rm sup} \equiv e^2N_mTE_{\rm sup}/m$, где $E_{\rm sup} = \lim_{\sigma_T\to1} E_{\max}(\sigma_T)$. Для оценки $E_{\rm sup}$ сверху можно не ставить условие (3), что существенно упрощает задачу и сводит ее к уравнению первого порядка для E_x, из решения которого для $w(E) = CE^n$ получаем $E_{\rm sup} \leqslant (nCT)^{-1/n}$. Для произвольной быстрорастущей $w(E)$, при $n_{\rm eff} = n(E_{\rm sup}) \gg 1$, $w(E_{\rm sup}) \lesssim 1/Tn_{\rm eff}$. В частности, для (11) $n_{\rm eff} \approx \Lambda_T + 2\ln(\Lambda_T/2)$, $E_{\rm sup} \lesssim 2\kappa^3E_a/3n_{\rm eff}$ и

$$J_{\rm sup} \lesssim 2e^2\kappa^3N_mE_aT/3mn_{\rm eff} \approx \approx 640\frac{U_i^{3/2}[\text{эВ}]N_m\,[10^{19}\,\text{см}^{-3}]\lambda_1[\text{мкм}]}{\Lambda_T + 2\ln(\Lambda_T/2)}\frac{\text{МА}}{\text{см}^2}, \quad (13)$$

где $\Lambda_T = \ln(24\kappa^2\omega_aT) \approx \ln(240U_i[\text{эВ}]\lambda_1[\text{мкм}])$, $\lambda_1 = cT$ и c – скорость света

Во второй части работы с использованием решений (8)–(10), (12) (описывающих одноцикловый импульс) найдем оптимальную волновую форму и плотность тока насыщения в приближенно периодическом поле $E_x(t) = f(t)E_c(t)$, где $f(t)$ – медленная в масштабе T огибающая импульса, а $E_c(t)$ – периодическая несущая, $E_c(t+T) = E_c(t)$, $\int_t^{t+T} E_c(t')\,dt' = 0$. Для простоты примем, что $f(t)$ – колоколоподобная функция с одним максимумом $f(0) = 1$ и характеризуется одним временным масштабом – полной длительностью τ_p (по уровню $1/\sqrt{2}$).

Обозначим $\Delta(t) = \sigma(t+T/2) - \sigma(t-T/2)$ и запишем ОПТ (1) как $J_x = (e^2N_m/m)\int_{-\infty}^{\infty}\Delta(t')\,\times$ $\times\, E_T[a(t-t'),\sigma(t-t')]\,dt'$. В подынтегральном выражении второй сомножитель более медленно зависит от t', чем первый, и может быть вынесен за интеграл:

$$J_x \approx \frac{e^2N_m\sigma_fT}{m}E_T[a(t-t_i),\sigma(t-t_i)]\,, \quad (14)$$

где t_i – момент времени, когда средняя скорость возрастания степени ионизации максимальна, и $\sigma_f = \sigma(t\to+\infty) = (1/T)\int_{-\infty}^{\infty}\Delta(t')\,dt'$ – финальная степень ионизации.

Согласно (14) максимум J_x соответствует максимуму функционала E_T, а замена $\sigma(t) = \sigma(t_i - T/2) + \tilde\sigma(t)[1-\sigma(t_i-T/2)]$ приводит к краевым условиям для $\tilde\sigma$ вида (5) с $\sigma_T = \Delta(t_i)/[1-\sigma(t_i-T/2)]$. Таким образом, найденная в первой части работы экстремаль функционала (4) определяет оптимальную форму поля при $|t_i - t| < T/2$ в приближенно периодическом импульсе и соответствующую ей ОПТ (при фиксированном σ_f) $J_{\rm sat} = e^2N_mT\sigma_fE_{\rm sat}/m$, где $E_{\rm sat} = E_{\max}(\sigma_T)$. Значение σ_T зависит от $f(t)$ и τ_p и находится как $\sigma_T \approx \bar w|_{t=t_i}T$ с использованием (по аналогии с [18]) уравнения $\dot{\bar\sigma} = (1-\bar\sigma)\bar w$, где $\bar w$ и $\bar\sigma$ – средние по периоду T вероятность и степень ионизации соответственно. Из этого уравнения следует $\int_{-\infty}^{\infty}\bar w\,dt = -\ln(1-\sigma_f)$, а t_i определяется условием $\ddot{\bar\sigma}|_{t=t_i} = 0$. Отсюда для $w(E) = CE^n$ и $f(t) = e^{-2\ln2\,t^2/\tau_p^2}$ получаем

$$\sigma_T \approx \xi(\sigma_f)\sqrt{n}T/\tau_p, \quad (15)$$

где $\xi(\sigma_f) = 2\sqrt{\ln2\,{\rm Wp}[\ln^2(1-\sigma_f)/2\pi]}$, Wp – основная ветвь функции Ламберта [29]. Подстановка (15) в (9) дает

$$E_{\rm sat} \approx (n/4\pi)\sin(\pi/n)[\xi(\sigma_f)\sqrt{n}/(n-1)C\tau_p]^{1/n}.$$

Для вероятности ионизации (11) используем уравнение (15) с $n = n_{\rm eff}$, определяемым (12). Решив его относительно $n_{\rm eff}$, получим

$$n_{\rm eff} \approx -(3/2){\rm Wm}[-(9\sqrt6\kappa^2\omega_a\tau_p/2\xi)^{-2/3}] \approx \approx \Lambda + (3/2)\ln(2\Lambda/3), \quad (16)$$

$$E_{\rm sat} \approx \kappa^3E_a/6n_{\rm eff}, \quad (17)$$

где $\Lambda = \ln(9\sqrt6\kappa^2\omega_a\tau_p/2\xi)$. Если $\sigma_f \ll 1$, то $\xi \approx \approx \sigma_f\sqrt{2\pi^{-1}\ln2}$; если $\sigma_f \to 1$, то ξ медленно растет как $2\sqrt{2\ln2\,\ln[-\ln(1-\sigma_f)]}$. Взяв значение $\xi \approx 1.8$, отвечающее $\sigma_f = 0.99$, получим

$$\Lambda \approx \ln(6\kappa^2\omega_a\tau_p). \quad (18)$$

Далее проанализируем, как полученные выше решения могут быть реализованы с использованием многоцветных импульсов, содержащих поле на основной частоте $\omega_1 = 2\pi/T$ и несколько его начальных гармоник,

$$E_x(t) = f(t)E_c(t), \quad E_c = \sum_{s=1}^{K} E_s \sin(s\omega_1 t + \phi_s)\,, \quad (19)$$

где E_s и ϕ_s – амплитуды и фазы Фурье-компонент несущей, K – число гармоник. Экстремали (8) соответствует предел $K \to \infty$ с $\phi_s = 0$ и

$$E_s = \frac{4\pi s}{T^2 f(t_i)} \int_{-T/2}^{T/2} a_{\rm opt}(t) \cos[s\omega_1(t - t_d)]\, dt. \quad (20)$$

Согласно (20) E_s является функцией s, n и σ_T, которая выражается аналитически при $n = 2$ и $n \gg \ln \pi s$. При $n = 2$, используя $I_v(3/2, 1/2) = (2/\pi)[\arcsin\sqrt{v} - \sqrt{v(1-v)}]$, находим $E_s \approx 4\pi J_s'(s) E_{\max}/f(t_i)$, где $J_\nu'(z)$ – производная функции Бесселя. При $n \gg \ln \pi s$:

$$E_s \approx \frac{8E_{\max}}{\pi s f(t_i)} \left[1 - (-1)^s + \frac{1 + (-1)^s}{n} \mathrm{Cin}\, \pi s\right], \quad (21)$$

где $\mathrm{Cin}\, z = -\int_z^\infty (1 - \cos v) v^{-1}\, dv$ – интегральный косинус. Поскольку $\mathrm{Cin}\, \pi s \approx \gamma + \ln \pi s$ для натуральных s, где $\gamma \approx 0.577$ – постоянная Эйлера, из (21) получаем $E_s \approx 16E_{\max}/\pi s f(t_i)$ для нечетных s и $E_s \approx 16E_{\max}(\gamma + \ln \pi s)/\pi s n f(t_i)$ для четных s. Отсюда, в оптимальном для генерации ТГц-излучения поле амплитуды четных гармоник примерно в n раз меньше, чем амплитуды соседних нечетных гармоник. Заметим, что, таким образом, предложенное в [21] пилообразное поле (для которого амплитуды монотонно спадают обратно пропорционально s) в общем случае не является оптимальным.

Пусть $J_{\rm sat}^{(K)}$ – максимальная ОПТ при конечном K для поля (19), тогда в силу (14) $J_{\rm sat}^{(K)}/J_{\rm sat} \approx E_{\max}^{(K)}/E_{\max}$, где $E_{\max}^{(K)}$ – максимум по E_s и ϕ_s функционала (4) на поле $E_x(t) = \sum_{s=1}^{K} E_s \sin(s\omega_1 t + \phi_s)$ при условиях (3) и (5). Если $w(E) = CE^n$, то отношение $J_{\rm sat}^{(K)}/J_{\rm sat}$ является функцией K, n и σ_T. При некоторых K и n и $\sigma_T \ll 1$ значения $J_{\rm sat}^{(K)}/J_{\rm sat}$ находятся аналитически. В частности, для $n = 2$ и $K = 2$ после интегрирования (4) и оптимизации находим, что $E_2/E_1 = 1/\sqrt{2}$ и $J_{\rm sat}^{(2)}/J_{\rm sat} \approx 1/\sqrt{6} \approx 0.41$. При $n \gg 1$ интеграл (4) вычисляется методом Лапласа, как это делалось в [10, 12, 18], что дает в оптимуме для $K = 2$ (т. е. для обычно используемой двухцветной схемы генерации ТГц-излучения) $E_2/E_1 \approx 1/2$ и $J_{\rm sat}^{(2)}/J_{\rm sat} \approx 1/\sqrt{3}\pi \approx 0.18$, а для $K = 3$ – $E_3/E_1 \approx 1/3$, $E_2/E_1 \sim 1/n$ и $J_{\rm sat}^{(3)}/J_{\rm sat} \approx 4/3\pi \approx 0.42$, $J_{\rm sat}^{(3)}/J_{\rm sat}^{(2)} \approx 4/\sqrt{3} \approx 2.3$.

При $1.5 < n < 20$ и $K \leqslant 20$ (и $\sigma_T \ll 1$) мы нашли численно, что

$$\frac{J_{\rm sat}^{(K)}}{J_{\rm sat}} \approx \left[\frac{K-1}{K + q(n)}\right]^{2(1-1/n)},$$

$$q = \left[\frac{J_{\rm sat}}{J_{\rm sat}^{(2)}}\right]^{\frac{n}{2(n-1)}} - 2 \approx \frac{0.54}{n - 1.24} - \frac{3.44}{n + 4.43} + 0.27;$$

$q(2) = \sqrt{6} - 2$, $\lim_{n\to\infty} q(n) = 3^{1/4}\pi^{1/2} - 2$. При $5 < n < 20$: $q(n) \approx 10^{-3}(14 + 7.6n) \ll 1$ и

$$J_{\rm sat}^{(K)} \approx J_{\rm sat} \frac{(K-1)^2}{K^2} = \frac{e^2 N_m T \sigma_f E_{\rm sat}}{m} \frac{(K-1)^2}{K^2}. \quad (22)$$

Для вероятности ионизации (11), считая $n = n_{\rm eff}$ и $\sigma_f \approx 1$, из формул (16)–(18), (22) находим

$$J_{\rm sat}^{(K)} \approx \left(1 - \frac{1}{K}\right)^2 \frac{e^2 \kappa^3 N_m E_a T}{6 m n_{\rm eff}} \approx 160 \left(1 - \frac{1}{K}\right)^2 \times \\ \times \frac{U_i^{3/2}[\text{эВ}] N_m [10^{19}\,\text{см}^{-3}] \lambda_1[\text{мкм}]}{\Lambda + (3/2)\ln(2\Lambda/3)} \frac{\text{МА}}{\text{см}^2}, \quad (23)$$

где $\Lambda \approx \ln(20 U_i[\text{эВ}] \tau_p[\text{фс}])$, $\lambda_1 = cT$ – длина волны основной гармоники. Заметим, что для фемтосекундных импульсов $\Lambda \approx 7\ldots 11$ и $n_{\rm eff} \approx 9\ldots 14$, при этом согласно формуле (23) $J_{\rm sat}^{(K)}$ медленно (логарифмически) растет с уменьшением τ_p. При $\tau_p \sim T$ формула (23) выходит за рамки своей применимости и рост становится более резким [18, 26, 28, 31], однако максимально возможная ОПТ ограничена предельным значением $J_{\rm sup}$ (13).

Развитая теория подтверждается результатами численных расчетов для многоцветных фемтосекундных импульсов (19) с гауссовой огибающей $f(t)$. Численные значения ОПТ J_x находились из уравнений (1), (2) и (11). По амплитудам E_s и фазам ϕ_s гармоник с $s > 1$ проводилась оптимизация и находился максимум ОПТ $J_K = \max_{E_{s>1}, \phi_{s>1}} J_x$ в области $|E_{s>1}| < 0.2 E_a \kappa^3$ при фиксированных значениях числа гармоник K, максимальной интенсивности основной гармоники $S_1 = cE_1^2/8\pi$, ее фазы $\phi_1 = 0$, длины волны $\lambda_1 = 0.8$ мкм, полной длительности по уровню 1/2 от максимальной интенсивности τ_p, начальной концентрации нейтральных частиц $N_m = 2.3\times 10^{19}$ см$^{-3}$ и потенциала ионизации U_i. Расчеты проводились при $S_1 = 10^{14}\ldots 5\times 10^{14}$ Вт/см^2, $\tau_p = 30\ldots 200$ фс, $K = 2\ldots 10$, $U_i = 13.61$ эВ и $U_i = 15.76$ эВ (соответствуют атомарному водороду и аргону). Оптимальные значения ϕ_s близки к нулю, а существенно ненулевые ϕ_s получались лишь у достаточно слабых по сравнению с другими гармоник.

Результаты численных расчетов и их сопоставление с полученными аналитическими формулами

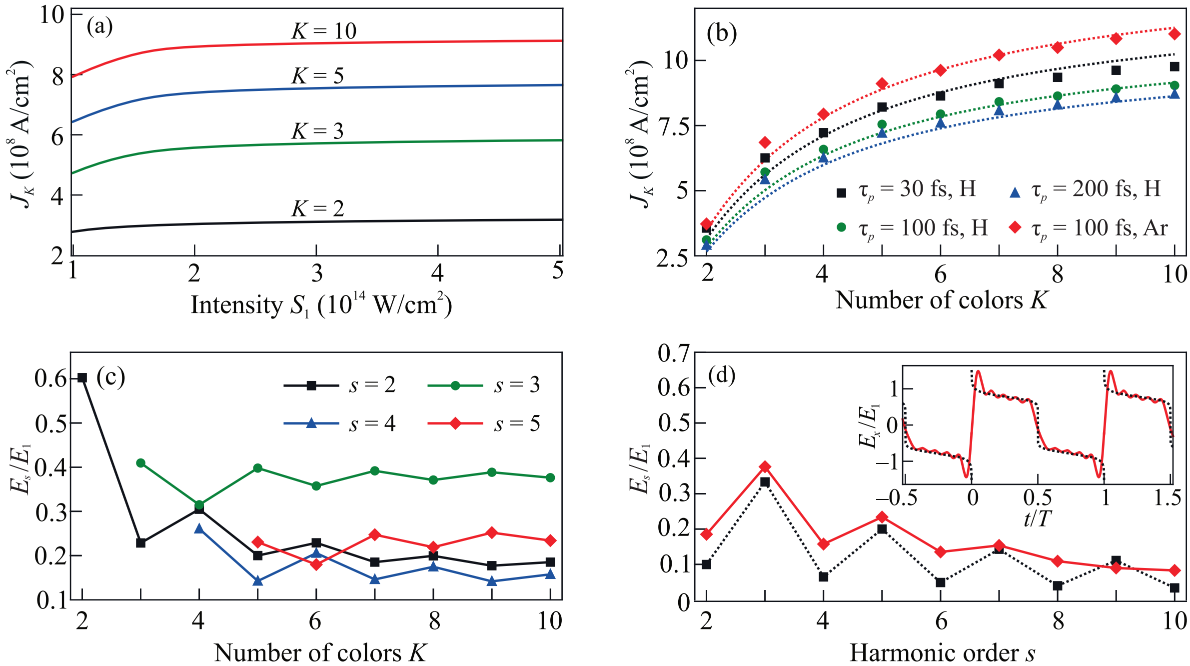

Рис. 1. (Цветной онлайн) (a) – Найденные в результате численного решения уравнений (1), (2) и (11) с $\kappa = 1$ зависимости максимальной остаточной плотности тока (ОПТ) J_K, генерируемой многоцветным ионизирующим импульсом (19), от пиковой интенсивности основной гармоники S_1 с длиной волны $\lambda_1 = 0.8$ мкм при длительности $\tau_p = 100$ фс, начальной концентрации нейтральных частиц $N_m = 2.3 \times 10^{19}$ см$^{-3}$ и различном числе гармоник K. (b) – Маркеры: найденные численно зависимости J_K от K при $\tau_p = 30$, 100, 200 фс и потенциалах ионизации частиц $U_i = 13.61$ эВ (H) и $U_i = 15.76$ эВ (Ar); остальные параметры такие же, как на панели (a). Пунктирные линии: плотность тока насыщения, определенная по формуле (23). (c) – Найденные численно нормированные амплитуды гармоник E_s/E_1 в зависимости от K при $S_1 = 3 \times 10^{14}$ Вт/см^2; остальные параметры такие же, как на панели (a). (d) – Нормированная амплитуда гармоники E_s/E_1 в зависимости от s для $K = 10$, остальные параметры такие же, как на панели (c). Маркеры, соединенные сплошными отрезками, отмечают результаты численной оптимизации, а соединенные пунктиром – значения, полученные по формуле (21) с $n = n_{\text{eff}}$, определенным из (16) и (18). На вставке панели (d) изображен временной профиль нормированного оптимального поля E_x/E_1 на двух периодах $T = \lambda_1/c$. Сплошная кривая соответствует значениям E_s и ϕ_s, найденным в результате численной оптимизации для $K = 10$, пунктир построен по формулам (10) и (21) с $u = 2t/T$ и $n = n_{\text{eff}}$

представлены на рис. 1. На рисунке 1a приведены зависимости J_K от S_1 для различных K, демонстрирующие монотонный рост J_K с увеличением S_1. Однако при $S_1 \approx 2 \times 10^{14}$ Вт/см^2 его скорость существенно падает, что связано с истощением нейтральных частиц (насыщением ионизации), когда финальная степень ионизации $\sigma_f \approx 1$ и рост входящего в формулы (16), (17) и (22) параметра $\xi(\sigma_f)$ становится все более медленным по мере приближения σ_f к 1. Заметим, что выход на подобные насыщающиеся зависимости наблюдался в различных экспериментах по ТГц-генерации в двухцветных ионизирующих полях [1, 4, 10, 13, 19]. На рисунке 1b изображены зависимости J_K от K, найденные численно при $S_1 = 3 \times 10^{14}$ Вт/см^2, и $J_{\text{sat}}^{(K)}$ от K, полученные по формуле (23), для различных τ_p и U_i. Как видно, (23) хорошо описывает рост J_K с увеличением K (и его насыщение при $K \gg 1$), а также с увеличением U_i и уменьшением τ_p, демонстрируя отличное количественное согласие с результатами численных расчетов во всем рассмотренном диапазоне параметров.

Рисунок 1c показывает найденные численно оптимальные отношения E_s/E_1 при $s = 2\ldots5$ в зависимости от K. Как видим, в обычно используемой двухцветной схеме генерации ТГц-излучения (т.е. при $K = 2$) оптимальное отношение $E_2/E_1 \approx 0.6$. Однако уже при $K = 3$ отношение $E_2/E_1 \approx 0.23 < E_3/E_1 \approx 0.41$, что является частным случаем общей закономерности, заключающейся в преобладании нечетных гармоник (в особенности 3-й) в оптимальных для генерации ТГц-излучения многоцветных импульсах. Эта закономерность иллюстрируется также рис. 1d, на котором показано сопоставление результатов численных расчетов оптимального отношения E_s/E_1 при $K = 10$ в зависимости от s с аналитической формулой (21) с $n = n_{\text{eff}} \approx 13$, определенным из (16) и (18). Видно, что найденные численно амплитуды нечетных гармоник оказываются больше соседних четных, а их значения с высокой точностью совпадают с даваемыми (21). На вставке изображено нормированное оптимальное поле $E_x(t)/E_1$ на двух периодах $T = \lambda_1/c$, найденное численно для $K = 10$ и по формулам (10) и (21) с $n = n_{\text{eff}}$. Как видим, имеющее слабые сингулярности решение (10) везде, кроме окрестностей особенностей, где оно меняет знак, хорошо приближает оптимальное многоцветное поле. С увеличением K это поле все лучше описывается частичной суммой ряда Фурье зависимости (10) и оптимальные амплитуды гармоник стремятся к аналитическим значениям (20) и (21).

В заключение сформулируем основные результаты работы. Разработан аналитический подход для определения оптимальной для генерации ТГц-излучения волновой формы импульса, производящего туннельную ионизацию газа, и соответствующей максимальной ОПТ при фиксированной финальной степени ионизации. Показано, что найденные аналитические решения (10), (15)–(18) могут быть реализованы с использованием многоцветных фемтосекундных импульсов, содержащих поле на основной частоте и несколько его начальных гармоник. Найдены оптимальные соотношения между амплитудами гармоник в зависимости от их числа K, при этом важным и неожиданным результатом является то, что амплитуды у нечетных гармоник должны быть больше, чем у соседних четных. Максимальная мощность генерируемого ТГц-излучения (пропорциональная квадрату ОПТ) с увеличением K растет согласно формуле (22) как $(1 - 1/K)^4$, усиливаясь, таким образом, примерно в 16 раз при больших K по сравнению с тем, что дает обычно используемая двухцветная схема. При достаточно высоких интенсивностях ионизирующего импульса, когда наступает истощение нейтральных частиц и финальная степень ионизации становится близка к 1, максимальная ОПТ определяется формулой (23) и плотность тока насыщения (которая может быть порядка $10^9\,\text{А/см}^2$ для больших K и обычно используемых в экспериментах параметров) растет как с увеличением длины волны основной гармоники и потенциала ионизации частиц газа, так и с уменьшением длительности импульса; при этом в случае использования малоцикловых ионизирующих импульсов ОПТ приближается к наибольшему возможному значению (13). Полученные результаты позволяют установить предельные величины эффективности и яркости ТГц-источников, реализуемых в различных условиях ионизации газов фемтосекундными лазерными импульсами. Возможности повышения этих величин связаны с созданием условий для эффективной многократной ионизации частиц газа [6], а также с использованием многоцветных импульсов с эллиптически или циркулярно поляризованными одноцветными компонентами [7, 8].

Работа в части выполнения численных расчетов поддержана Российским научным фондом (грант # 18-72-00103). Аналитические исследования поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (гранты # 18-02-01150, 18-32-00951 и 20-32-70213) и фондом "Базис" (грант # 19-1-2-52-1).

1. A. D. Koulouklidis, C. Gollner, V. Shumakova, V. Yu. Fedorov, A. Pugžlys, A. Baltuška, and S. Tzortzakis, Nat. Commun. **11**, 292 (2020).
2. J. A. Fülöp, S. Tzortzakis, and T. Kampfrath, Adv. Opt. Mater. **8**, 1900681 (2020).
3. B. Clough, J. Dai, and X.-C. Zhang, Mater. Today **15**, 50 (2012).
4. K.-Y. Kim, J. H. Glownia, A. J. Taylor, and G. Rodriguez, IEEE J. Quantum Electron. **48**, 797 (2012).
5. X. C. Zhang, A. Shkurinov, and Y. Zhang, Nature Photon. **11**, 16 (2017).
6. P. M. Solyankin, I. A. Nikolaeva, A. A. Angeluts, D. E. Shipilo, N. V. Minaev, N. A. Panov, A. V. Balakin, Y. Zhu, O. G. Kosareva, and A. P. Shkurinov, New J. Phys. **22**, 013039 (2020).
7. C. Meng, W. Chen, X. Wang, Z. Lü, Y. Huang, J. Liu, D. Zhang, Z. Zhao, and J. Yuan, Appl. Phys. Lett. **109**, 131105 (2016).
8. V. A. Tulsky, M. Baghery, U. Saalmann, and S. V. Popruzhenko, Phys. Rev. A **98**, 053415 (2018).
9. A. A. Ushakov, M. Matoba, N. Nemoto, N. Kanda, K. Konishi, P. A. Chizhov, N. A. Panov, D. E. Shipilo, V. V. Bukin, M. Kuwata-Gonokami, J. Yumoto, O. G. Kosareva, S. V. Garnov, and A. B. Savel'ev, JETP Lett. **106**, 706 (2017).
10. N. V. Vvedenskii, A. I. Korytin, V. A. Kostin, A. A. Murzanev, A. A. Silaev, and A. N. Stepanov, Phys. Rev. Lett. **112**, 055004 (2014).
11. L. Zhang, S. Zhang, R. Zhang, T. Wu, Y. Zhao, C. Zhang, and X.-C. Zhang, Opt. Express **25**, 32346 (2017).
12. V. A. Kostin, I. D. Laryushin, A. A. Silaev, and N. V. Vvedenskii, Phys. Rev. Lett. **117**, 035003 (2016).
13. L.-L. Zhang, W.-M. Wang, T. Wu, R. Zhang, S.-J. Zhang, C.-L. Zhang, Y. Zhang, Z.-M. Sheng, and X.-C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **119**, 235001 (2017).
14. V. A. Kostin and N. V. Vvedenskii, Phys. Rev. Lett. **120**, 065002 (2018).

15. А. А. Силаев, В. А. Костин, И. Д. Ларюшин, Н. В. Введенский, Письма в ЖЭТФ **107**, 160 (2018).
16. T. Balčiūnas, D. Lorenc, M. Ivanov, O. Smirnova, A. M. Zheltikov, D. Dietze, K. Unterrainer, T. Rathje, G. G. Paulus, A. Baltuška, and S. Haessler, Opt. Express **23**, 15278 (2015).
17. В. А. Костин, Н. В. Введенский, Письма в ЖЭТФ **110**, 449 (2019).
18. A. A. Silaev and N. V. Vvedenskii, Phys. Plasmas **22**, 053103 (2015).
19. G. Rodriguez and G. L. Dakovski, Opt. Express **18**, 15130 (2010).
20. M. Chen, A. Pukhov, X.-Y. Peng, and O. Willi, Phys. Rev. E **78**, 046406 (2008).
21. P. González de Alaiza Martínez, I. Babushkin, L. Bergé, S. Skupin, E. Cabrera-Granado, C. Köhler, U. Morgner, A. Husakou, and J. Herrmann, Phys. Rev. Lett. **114**, 183901 (2015).
22. L. Zhang, G.-L. Wang, and X.-X. Zhou, J. Mod. Opt. **63**, 2159 (2016).
23. C. Lu, C. Zhang, L. Zhang, X. Wang, and S. Zhang, Phys. Rev. A **96**, 053402 (2017).
24. M.-J. Pei, C.-H. Lu, X.-W. Wang, Z.-R. Sun, and S.-A. Zhang, Chinese Phys. B **27**, 084209 (2018).
25. V. Vaičaitis, O. Balachninaitė, U. Morgner, and I. Babushkin, J. Appl. Phys. **125**, 173103 (2019).
26. V. B. Gildenburg and N. V. Vvedenskii, Phys. Rev. Lett. **98**, 2450020 (2007).
27. H.-C. Wu, J. Meyer-ter-Vehn, and Z.-M. Sheng, New J. Phys. **10**, 043001 (2008).
28. A. A. Silaev and N. V. Vvedenskii, Phys. Rev. Lett. **102**, 115005 (2009).
29. *NIST Digital Library of Mathematical Functions.* http://dlmf.nist.gov/, Release 1.0.26 of 2020-03-15, ed. by F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain.
30. D. Bauer and P. Mulser, Phys. Rev. A **59**, 569 (1999).
31. W.-M. Wang, P. Gibbon, Z.-M. Sheng, and Y.-T. Li, Phys. Rev. A **90**, 023808 (2014).