Письма в ЖЭТФ, том 49, вып. 9, стр 473 – 475 *10 мая 1989 г.*

КВАРТИОНЫ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Д.В.Волков

Рассматриваются уравнения движения и функция Лагранжа для безмассовых частиц со спиральностью $\pm$ 1/4 (квартионов) [1)] в $D = (2+1)$- и $D = (3+1)$-пространствах.

В последние годы большое внимание уделяется изучению возможных значений спина и статистики солитонов в $D = (2+1)$ релятивистских квантовых моделях. Было показано, что при наличии в лагранжиане таких моделей определенных топологических членов значения спина и статистики солитонов могут быть дробными [1]. Для случая калибровочной $SU(2)$-группы симметрии спин солитона может принимать значения $s = 1/4 + m$ и $3/4 + m$ $(m \in Z)$ [2].

В связи с вышесказанным возникает проблема построения квантовой $D = (2+1)$ релятивистской модели, которая непосредственно описывала бы локальные объекты с указанными выше значениями спина. Можно ожидать, что такая модель и $D = (2+1)$ σ-модели, в которых имеются соответствующие солитоны, находятся в отношениях аналогичных тем, которые имеют место для $D = (1+1)$ моделей Тирринга и синус–Гордон. Еще больший интерес представляло бы построение последовательной квантовой теории квартионов в $D = (3+1)$-пространстве. Такая теория могла бы иметь непосредственное отношение к физике элементарных частиц.

В настоящей статье обсуждается возможность описания на уровне классических полей квартионов с нулевой массой в $D = (2+1)$- и $D = (3+1)$-пространствах на основе использования бесконечномерных представлений $SL(2, R)$- и $SL(2, C)$-групп с весами 1/4 и 3/4.

Рассмотрим сначала, как можно описывать квартионы в $D = (3+1)$-пространстве. Соответствующие рассматриваемым значениям спина представления $(-1/4, 0)$; $(-3/4, 0)$ и $(0, -1/4)$, $(0, -3/4)$ $SL(2, C)$-группы могут быть построены посредством введения спинорных операторов с перестановочными соотношениями

$$[L_{\dot\alpha}, L_{\dot\beta}] = -i\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}; \qquad [L_\alpha, L_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta}. \tag{1}$$

Генераторы преобразований $SL(2, C)$-группы представляют в виде антикоммутаторов операторов $L_{\dot\alpha}$ и L_α [3,4]

$$M_{\dot\alpha\dot\beta} = \frac{1}{4}\{L_{\dot\alpha}, L_{\dot\beta}\}, \qquad M_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\{L_\alpha, L_\beta\}. \tag{2}$$

---

1) Термин "квартион" в переводе на русский означает "четвертинка".

Предлагаемые уравнения для квартионов имеют вид:

$$L_{\dot\alpha} \nabla^{\dot\alpha\beta} \bar\phi = 0, \tag{3а}$$

$$L_{\alpha} \nabla^{\alpha\dot\beta} \phi = 0. \tag{3б}$$

Из уравнений (3) следует, что $\nabla^2\bar\phi = \nabla^2\phi = 0$, т. е. уравнения (3) описывают частицу с массой нуль.

Действуя на функции $\bar\phi$ и ϕ, удовлетворяющие уравнениям (3), вектором Паули-Любанского $S_a = \frac{1}{2}\epsilon_{abcd}M^{bc}P^d$, получаем, используя уравнения (3) $S_a = \pm\frac{1}{4}P_a$, т. е. спиральность состояний $\bar\phi$ и ϕ равна соответственно $+1/4$ и $-1/4$ и эти состояния являются по отношению друг к другу суперпартнерами, образуя простейший возможный супермультиплет [2)]. Уравнения (3) не допускают включения взаимодействия с калибровочными полями. Указанное обстоятельство связано с тем, что каждое из уравнений (3а) и (3б) является системой из двух уравнений ($\beta, \dot\beta = 1, 2$), которые при включении взаимодействия перестают быть совместными.

Для определения модификации уравнений (3), которая не содержала бы указанную трудность, перепишем уравнение (3а) для плоской волны:

$$\bar\phi = \bar\phi(\lambda) \exp(i\pi_\alpha\pi_{\dot\alpha} x^{\alpha\dot\alpha}) \tag{4}$$

(λ – индекс базисных векторов пространства операторов L_α). Тогда из (3а) следует

$$L^{\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha}\pi_\alpha \bar\phi(\lambda) = 0, \tag{5}$$

или, что то же $L^{\dot\alpha}\pi_{\dot\alpha}\bar\phi(\lambda) = 0.$ (6)

Несмотря на то, что переход от уравнения (5) к уравнению (6) является тривиальным, уравнение (6) позволяет провести рассмотрение рассеяния квартиона полем электромагнитной или гравитационной волны методами теории твисторов [6]. Структура уравнений (5) и (6) подсказывает следующий вид интеграла действия для взаимодействующих квартионов:

$$S = \int d\lambda d\bar\lambda d^4x \,\{ (\phi C L_\alpha \phi)(\lambda, x) [\bar\phi \bar C L_{\dot\alpha} \nabla^{\dot\alpha\alpha}\bar\phi - (\nabla^{\alpha\dot\alpha}\bar\phi)\, \bar C L_{\dot\alpha}\bar\phi]\, (\bar\lambda, x) \; +$$

$$+ \text{ комплексно сопряженное слагаемое} \} \quad , \tag{7}$$

где оператор C определяется из условия $CL_\alpha C^{-1} = iL^T_\alpha$. В координатном представлении $C = \widetilde{\exp}(-(1+i)\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda})$ (знак $\sim$ означает правое упорядочение производной $\partial/\partial\lambda$ относительное переменной λ). Легко убедиться, что $C^T = C^{-1}$ и $C^4 = 1$.

Так как функции ϕ определены посредством четырехзначных представлений группы Лоренца, квантование действия (7) должно проводиться в соответствии с дробной статистикой.

Заметим, что в общем случае функция ϕ в представлении $(-{}^1/_4, 0)$ и $(-{}^3/_4, 0)$ зависит не только от переменной λ, но и от переменной $\bar\lambda$. Обобщение действия (7) с учетом указанной зависимости может быть легко проведено посредством использования стандартного метода Клебша–Жордана.

---

2) Ю.П.Степановский обратил наше внимание на то, что уравнения (3) являются предельным случаем бесконечно компонентного уравнения Дирака [5] при $m = 0$. Однако, используемая в [5] волновая функция содержала в отличие от (3) представления $(-1/4, -1/4)$ и т.д. Как следствие, спиральность безмассовых частиц Дирака равна нулю.

Уравнения Лагранжа для (7) содержат решения в виде плоских волн (4), при этом произведение $\pi_\alpha \pi_{\dot{\alpha}}$, определяющее 4-импульс квартиона, факторизуется симметричным образом по отношению к сомножителям с L_α и $L_{\dot{\alpha}}$ в (7). Нелинейность (7) приводит к перерассеянию квартиона на квартионе. Взаимодействие с калибровочными полями может быть введено в (7) стандартным способом.

Аналогично проводится рассмотрение $D = (2+1)$ релятивистских теорий. Операторы L_α в соотношениях (1) и (2) определяются в этом случае одним типом индексов α, а операторы $M_{\alpha\beta}$ в (2) являются генераторами $SL(2, R)$-преобразований. Для построения инвариантов может использоваться билинейная форма $\int (\phi_2 C \phi_1)(\lambda) d\lambda$, положительно определенная при условии $\phi_2^+ = \phi_2 C$. В качестве отдельных слагаемых в действии наравне с (7) могут использоваться билинейные кинетический и массовый члены. В настоящее время неясно, в какой мере и какие варинты действий при их квантовании в соответствии с дробной статистикой являются последовательными теориями.

В заключение на примере действия (7) для случая $D = (2+1)$ рассмотрим возможность модификации релятивистских теорий поля, при которой бозоны и фермионы могут интерпретироваться как составные объекты состоящие из квартионов. Заменим в квадратной скобке действия (7) знак минус на плюс. В результате выражение в скобках становится полной производной и действие (7) превращается в действие для свободного нейтрино. В случае произвольных констант перед слагаемыми в квадратных скобках действие (7) содержит как кинетический член для составного нейтрино, так и члены, определяющие его взаимодействие с квартионом.

Автор благодарит В.А.Сороку, Д.П.Сорокина, Ю.П.Степановского и В.И.Ткача за многочисленные полезные обсуждения.

Литература

1. *Wilczek F., Zee A.* Phys. Rev. Lett., 1983, **51**, 2250.
2. *Balachandran A., Bowick M., Gupta K., Srivastava A.* Mod. Phys. Lett. A, 1988, **3**, 1725.
3. *Санников С.* УФЖ, 1965, **10**, 684 ; *Санников С.С.* ТМФ, 1978, **34**, 34.
4. *Переломов А.М.* Обобщенные когерентные состояния и их применение. М.: Наука, 1987.
5. *Dirac P.* Proc. Roy. Soc. A, 1971, **322**, 435; 1972, **328**, 1.
6. *Penrous R., McCallum M.* Phys. Repts., 1972, **6**, 241.

Харьковский физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
20 марта 1989 г.