Письма в ЖЭТФ, том 49, вып. 9, стр. 489 – 491 *10 мая 1989 г.*

О КОЭФФИЦИЕНТЕ ДИФФУЗИИ СОЛИТОНОВ

Б.А.Иванов, А.К.Колежук

Показано, что солитонный газ в системах, близких к точно интегрируемым, характеризуется двумя принципиально различными коэффициентами диффузии. Коэффициент D_* описывает стохастизацию координаты солитона на фоне движения с постоянной скоростью. Коэффициент D связан с вязкостью солитона η соотношением Эйнштейна, его значение, в отличие от D_*, конечно только в системах с разрушенной интегрируемостью. Учет обоих коэффициентов важен для описания экспериментов.

Исследование центрального пика (ЦП) восприимчивости $\chi(q, \omega)$ методом неупругого рассеяния нейтронов продемонстрировало реальность солитонных возбуждений квазиодномерных упорядоченных сред (ферромагнетиков и антиферромагнетиков, сегнетоэлектриков и др., см. [1,2]). Первые теоретические работы [3,4] выполненные в приближении свободного движения солитонов, предсказывали гауссову форму ЦП, $\chi(q, \omega) \sim \exp\{-m_*\omega^2/2Tq^2\}$. Это противоречит экспериментам [5], в которых форма ЦП лоренцева. Такая форма характерна для стохастического (диффузионного) движения частиц [6], и возникает вопрос о стохастизации движения солитона за счет взаимодействия с термостатом квазилинейных возмущений (для определенности – магнонов). Первый микроскопический расчет был проведен в [7,8] для модели φ^4. Он привел к коэффициенту диффузии D, пропорциональному $\overline{W}$ – средней вероятности рассеяния магнонов на солитоне; согласно [7,8] $D \sim T^2$. Аналогичные ответы ($D \sim \overline{W}$, $D \sim T^2$) были получены и для точно интегрируемой модели синус-Гордон [9].

Результаты [7-9] критиковались в [10-13] на основе следующих аргументов. 1. В силу соотношений Эйнштейна $D = T/\eta$ (η – коэффициент вязкости солитона, обусловленный солитон-магнонными столкновениями), поэтому $D \sim 1/\overline{W}$ и $D \to \infty$ при $T \to 0$. 2. В точно интегрируемых (ТИ) системах типа синус-Гордон отсутствует необратимость, в частности, $\eta = 0$ и $D = \infty$. Эти аргументы убедительны, но теории типа [7-9] хорошо описывают эксперимент [5]. Поэтому вопрос о диффузии солитонов и форме ЦП, на наш взгляд, открыт.

Рассмотрим солитон с координатой $x(t)$, взаимодействующий с магнонами, магнонные амплитуды и частоты (мы ограничимся классическим случаем) обозначим α_k и ω_k, k – импульс магнона (везде $\hbar = 1$). Уравнения для x и α_k можно записать в виде

$$m_* \ddot{x} = \delta H_{int}/\delta x, \qquad i\dot{\alpha}_k = \omega_k \alpha_k + \delta H_{int}/\delta \alpha_k^*, \tag{1}$$

где m_* – масса солитона, $\dot{f} \equiv df/dt$, H_{int} – функция Гамильтона (точнее Рауса), описывающая взаимодействие солитона с магнонами. Для широкого класса систем, близких к интегрируемым (уравнение синус-Гордон [10,13], φ^4 [13], ферромагнетик [14] и т.д.) H_{int} имеет вид

$$H_{int} = \sum_{12} (\dot{x}T_{12} + \epsilon U_{12}) e^{i(k_2 - k_1)x(t)} \alpha_1^* \alpha_2 + \ldots . \tag{2}$$

Здесь $1 \equiv k_1$, амплитуда $T_{12} \neq 0$ даже для ТИ систем, параметр $\epsilon \ll 1$ определяет интенсивность разрушения точной интегрируемости (например, при переходе от модели синус-Гордон к модели двойной синус-Гордон вида $\ddot{\varphi} - \varphi'' + \sin\varphi + \epsilon \sin 2\varphi = 0$). Основное свойство амплитуд: $T_{12} = 0$ при $\omega_1 = \omega_2$, при этом $U_{12} \neq 0$, см. подробнее [10,13,14]. При записи (2) опущены слагаемые типа $\alpha_1 \alpha_2$, $\alpha_1^* \alpha_2 \alpha_3$ и т.д., а также содержащие $\dot{x}^2$, $\dot{x}^3$ (скорость солитона считается малой).

В силу (1) $m_* \ddot{x} = f(x, \{\alpha_k\})$, $f = -\delta H_{int}/\delta x$, то есть действующая на солитон сила является функционалом α_k. Используя теорию возмущений по H_{int} (то есть по $\dot{x}$ и ϵ) можно записать явный вид $f(t)$. В основном приближении $\alpha_k(t) = c_k \exp(-i\omega_k t)$, и $f(t)$ – случайная сила, $\langle f(t) \rangle = 0$ (при усреднении по термостату магнонов используются обычные правила $\langle c_k \rangle = 0$, $\langle c_1^* c_2 \rangle = (T/\omega_1)\delta_{12}$), T – температура (мы считаем $\omega_k \ll T \ll E_0$, где E_0 – энергия солитона). Для коррелятора случайной силы f в основном приближении по $\dot{x}$, ϵ получается:

$$\langle f(t) f(0) \rangle_0 \approx 2T\eta\delta(t) + 2D_* m_*^2 (-\ddot{\delta}(t)), \tag{3}$$

где

$$\eta = \pi T \epsilon^2 \sum_{12} (k_1 - k_2)^2 |U_{12}/\omega_1|^2 \delta(\omega_1 - \omega_2), \tag{4}$$

$$D_* = (\pi T^2/m_*^2) \sum_{12} |T_{12}/\omega_1|^2 \delta(\omega_1 - \omega_2). \tag{5}$$

Коэффициент η в (3) имеет смысл магнонной вязкости кинка, значение $\eta = 0$ при $\epsilon = 0$ (фактически, это связано со свойством $T_{12} = 0$ при $\omega_1 = \omega_2$, то есть с безотражательным характером столкновений магнона и солитона в ТИ системах). Вклад U_{12} описывает передачу импульса при столкновениях и приводит как к вязкости (в следующем порядке теории возмущений по ϵ значение $\langle f(t) \rangle = -\eta\dot{x} \neq 0$), так и к обычной диффузии с коэффициентом $D = T/\eta$. Эта диффузия определяет броуновское движение солитона. Коэффициент же D_* при слагаемом со второй производной от δ-функции в корреляторе описывает эффект, который мы будем называть D_*-диффузией. Он обусловлен тем, что даже в ТИ системе солитон при взаимодействии с магноном испытывает сдвиг по координате. Так как столкновения происходят в случайные моменты времени, то это также приводит к стохастизации движения солитона, но на фоне движения с постоянной скоростью. Второе слагаемое в (3) не дает, естественно, вклада в вязкость, вид D_* отвечает результатам работ [7-9].

Итак, динамика солитона может быть описана уравнением

$$m_* \ddot{x} + \eta \dot{x} = f(t), \tag{6}$$

где f — случайный процесс (для простоты — гауссовский) с коррелятором (3). При учете только D-диффузии ($D_* = 0$) или только D_*-диффузии ($\eta = 0$) из (6) легко получить

$$\langle (x(t) - x(0))^2 \rangle_D \to 2Dt \text{ при } t \gg m_*/\eta; \ \langle (x(t) - x(0) - \dot{x}(0)t)^2 \rangle_{D_*} = 2D_* t. \tag{7}$$

При учете обоих видов взаимодействия на малых временах ($t < \tau_r = m_*/\eta$, τ_r — время вязкой релаксации) "работает" D_*-диффузия, на больших (при $t > \tau_r$) солитон совершает обычное броуновское движение.

Вычислим форму ЦП, определяющегося солитонным вкладом в мнимую часть восприимчивости $\chi''(q, \omega)$. Как известно [15,16], $\chi''(q, \omega)$ пропорциональна интегралу $I(q, \omega) = 2 \int_0^\infty dt \cos \omega t \exp[-\frac{q^2}{2} \langle \Delta x^2(t) \rangle]$, $\Delta x(t) = x(t) - x(0)$. Из этой формулы в предельном случае $D_* \gg D$ получим

$$I(q, \omega) \approx \frac{2D_* q^2}{\omega^2 + (D_* q^2)^2} (1 - e^{-D_* q^2 \tau_r}) + \frac{2Dq^2}{\omega^2 + (Dq^2)^2} e^{-3D_* q^2 \tau_r /2}. \tag{8}$$

В более реальном противоположном случае $D_* \ll D$, асимптотика сложнее, но при предельно малых и больших q качественно похожа на (8). При $q < 1/l_c$, ($l_c = \sqrt{D\tau_r}$ — длина свободного пробега) и $q > 1/l_c^* \equiv \sqrt{T/m_* D_*^2}$ формируются лоренцевские пики с коэффициентами диффузии D и D_* соответственно; в промежуточной области форма ЦП напоминает гауссовскую, характерную для свободного движения. Оценки характерных значений $(1/l_c)$ и $(1/l_c^*)$ для модели синус-Гордон при стандартных параметрах [2] и $\epsilon = 0{,}1$, $T \sim E_0$ дают 10^{+5} см$^{-1}$ и 10^{+7} см$^{-1}$ соответственно, поэтому при соответствующем выборе угла рассеяния в нейтронном эксперименте можно отделить вклады D- и D_*-диффузий. Вклад D-диффузии может быть также определен по поглощению звука, электромагнитных волн с $q < 1/l_c$.

Мы благодарны В.Г.Барьяхтару, И.Е.Дзялошинскому и А.С.Ковалеву за полезные обсуждения, Ю.Н.Мицаю — за сотрудничество.

Литература

1. Physics in One DImension/Eds. Bernasconi J., Shneider T.-Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag, 1981.
2. *Изюмов Ю.А.* УФН, 1988, **155**, 553.
3. *Mikeska H.J.* J. Phys. C, 1978, **11**, L29.
4. *Mikeska H.J.* J. Magn. Magn.Mater., 1979, **13**, 35.
5. *Boucher J.P., Regnault L.P., Pynn R. et al.* Europhys. Lett., 1986, **1**, 415.
6. *Исихара А.* Статистическая физика. М.: Мир, 1973.
7. *Wada Y., Schrieffer T.R.* Phys. Rev. B, 1978, **18**, 3897.
8. *Ishiuchi H., Wada Y.* Prog. Theor. Phys., 1980, **69**, 242.
9. *Sasaki K., Maki K.* Phys. Rev. B, 1987, **35**, 257.
10. *Bar'yachtar V.G., Bar'yachtar I.V., Ivanov B.A., Sukstansky A.L.* II Intern. Sym. on Selected Topics in Statistical Mechanics, Dubna, 1981.
11. *Kunz C.* Phys. Rev. A, 1986, **34**, 510.
12. *Kunz C.* Phys. Rev. B, 1986, **34**, 8144.
13. *Барьяхтар В.Г., Иванов Б.А., Сукстанский А.Л., Тартаковская Е.В.* ТМФ, 1988, **74**, 46.
14. *Абызов А.С., Иванов Б.А.* ЖЭТФ, 1979, **76**, 1700.
15. *Collins M.A., Blumen A., Currie J.F., Ross J.* Phys. Rev. B, 1979, **19**, 3630.
16. *Иванов Б.А., Колежук А.К.* Препринт ИТФ-88-166Р, 1988, Киев.

Институт металлофизики
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
6 марта 1989 г.