

# Подавление сверхпроводимости в неупорядоченных пленках: конкуренция двумерной диффузии и трехмерной баллистики<sup>1)</sup>

Д. С. Антоненко<sup>+\*×2)</sup>, М. А. Скворцов<sup>+\*2)</sup>

<sup>+</sup> Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия

<sup>\*</sup> Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черногоровка, Россия

<sup>×</sup> Московский физико-технический институт, 141700 Москва, Россия

Поступила в редакцию 3 сентября 2020 г.

После переработки 8 сентября 2020 г.

Принята к публикации 8 сентября 2020 г.

Подавление критической температуры в однородно разупорядоченных сверхпроводящих пленках является следствием усиления кулоновского отталкивания в присутствии беспорядка. Мы показываем, что для большинства изучаемых в настоящее время тонких пленок эффект подавления не может быть полностью объяснен в предположении о двумерном диффузионном характере движения электронов. Основной вклад в подавление  $T_c$  возникает из-за поправки к константе электрон-электронного взаимодействия, обусловленной областью расстояний порядка фермиевской длины волны, что приводит к сдвигу критической температуры  $\delta T_c/T_{c0} \sim -1/k_F l$ , где  $k_F$  – импульс Ферми, а  $l$  – длина свободного пробега. Таким образом, для большинства сверхпроводящих пленок, где подавление  $T_c$  по мере уменьшения толщины происходит по фермионному сценарию, оно обусловлено приближением к порогу трехмерной андерсоновской локализации и контролируется параметром  $k_F l$ , а не сопротивлением пленки на квадрат.

DOI: 10.31857/S1234567820190064

**1. Введение.** Важнейшей характеристикой сверхпроводника является его критическая температура,  $T_c$ . Обычно считается, что  $T_c$  является свойством материала и не зависит от размеров образца. Однако многочисленные эксперименты свидетельствуют о том, что критическая температура широкого класса неупорядоченных сверхпроводников (V [1], NbN [2–9], TiN [10], MoGe [11, 12], MoSi [13, 14], MoC [15], WRe [16], InO [17] и др. [18]) систематически падает с уменьшением толщины пленки  $d$ . Как правило, подавление  $T_c$  становится заметным при  $d \sim 10$  нм, а для самых тонких пленок  $T_c$  может уйти в нуль, что соответствует квантовому фазовому переходу сверхпроводник-металл или сверхпроводник-изолятор [19–24].

Принято выделять два сценария подавления  $T_c$  в неупорядоченных материалах: бозонный и фермионный; их актуальность определяется структурой рассматриваемого материала. Бозонный механизм типичен для гранулированных и/или сильно разупорядоченных сверхпроводников (поликристаллический TiN, аморфный InO), в которых происхо-

дит преформирование локализованных куперовских пар [25–28]; температура сверхпроводящего перехода в таком случае определяется распространением сверхпроводящей когерентности с микро- на макромасштабы. При фермионном сценарии, который реализуется для равномерно разупорядоченных пленок без дополнительной структуры (NbN, MoGe и др.), подавление сверхпроводимости связано с усилением электрон-электронного отталкивания в присутствии беспорядка [29, 30], что приводит к уменьшению эффективной константы куперовского притяжения. Несмотря на одинаковый физический принцип подавления  $T_c$  беспорядком, способ описания фермионного механизма в трехмерных и двумерных системах существенно отличается.

В *трехмерной (3D) геометрии* за усиление отталкивания при движении в потенциале дефектов отвечают малые расстояния, не превосходящие длины пробега  $l$ . В результате весь эффект может быть описан изменением константы куперовского взаимодействия. В работе Андерсона, Мутталиба и Рамакришнана [31] изучался фермионный механизм для сильно неупорядоченного 3D сверхпроводника вблизи порога андерсоновской локализации ( $k_F l \sim 1$ , где  $k_F$  – импульс Ферми). Там же была дана оценка поправки к голой константе электрон-

<sup>1)</sup> См. дополнительные материалы к данной статье на сайте нашего журнала [www.jetpletters.ac.ru](http://www.jetpletters.ac.ru).

<sup>2)</sup> e-mail: antonenko@itp.ac.ru; skvor@itp.ac.ru

электронного взаимодействия  $\lambda$  в случае слабого беспорядка ( $k_F l \gg 1$ ):  $\delta\lambda/\lambda \sim 1/(k_F l)^2$ . Аналогичное выражение было получено в работах [32, 33]. Приведенную оценку легко получить, обрезав 3D диффузионный вклад на ультрафиолетовом пределе  $r \sim l$ . Однако, как показали Белитц и Киркпатрик на примере слаболокализационной поправки к проводимости [34, 35], в 3D геометрии диффузионные вклады протягиваются в баллистическую область вплоть до расстояний порядка длины волны и имеют относительный порядок  $1/(k_F l)$ , а не  $1/(k_F l)^2$ . Аналогичное явление с продолжением поправки от взаимодействия из диффузионной в баллистическую область известно и для туннельной плотности состояний, как в двумерной [36], так и в трехмерной [37, 38] геометрии.

Перенормировка электрон-фононного взаимодействия, вызванная беспорядком, и ее влияние на сверхпроводимость изучались в работе Кека и Шмида [39]. Они показали, что смещение примесей вслед за колебаниями решетки приводит к подавлению взаимодействия с продольными фононами и возникновению взаимодействия с поперечными фононами. Белитц предпринял попытку одновременно учесть примесную поправку как к кулоновскому, так и к электрон-фононному взаимодействию и их влияние на  $T_c$  с помощью техники точных собственных функций [40], а также путем решения полных уравнений Горькова в режиме сильной связи [41–43].

Часть его результатов может быть интерпретирована как поправка к голой константе электрон-электронного взаимодействия  $\delta\lambda/\lambda \sim 1/k_F l$ . Однако достоверность выводов Белитца была поставлена под сомнение Финкельштейном [44], который указал, что упругие диаграммы, связанные с поправкой к туннельной плотности состояний [45, 46], на важности которых настаивал Белитц, не дают вклада в ведущую поправку к сдвигу  $T_c$ .

Главное отличие *двумерной (2D) геометрии* от 3D случая заключается в том, что эффект перенормировок не может быть сведен к независимому от энергии сдвигу константы  $\lambda$ , а требует суммирования главных логарифмов. Общепринятое описание эффекта подавления  $T_c$  в тонких сверхпроводящих пленках существенно использует представление о *2D диффузионном* характере движения электронов, что основывается на следующей экспериментально значимой иерархии масштабов длин:  $\lambda_F \ll l \ll d \ll \xi_0$ , см. рис. 1. (Здесь  $\lambda_F$  – фермиевская длина волны,  $\xi_0 = \sqrt{\hbar D/T_c}$  – сверхпроводящая длина когерентности в грязном пределе,  $D$  – коэффициент диффузии.) В таком подходе усиление беспорядка с уменьшением

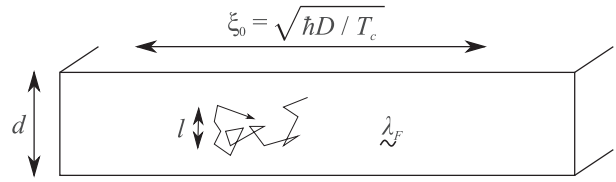


Рис. 1. Актуальная для эксперимента иерархия масштабов длин в разупорядоченных сверхпроводящих пленках

ем  $d$  связано с увеличением сопротивления на квадрат  $R_{\square}$ .

На пертурбативном уровне эффект взаимовлияния беспорядка и взаимодействия на  $T_c$  тонких сверхпроводящих пленок изучался в работах [45–49], где был вычислен вклад в сдвиг  $T_c$  от области 2D диффузии:

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = -\frac{\lambda}{3\pi g} \log^3 \frac{\hbar}{T_{c0} \tau_*}, \quad (1)$$

где  $T_{c0}$  – критическая температура объемного сверхпроводника,  $g = \hbar/e^2 R_{\square} = (2/3\pi)(k_F l)(k_F d) \gg \gg 1$  – безразмерный кондактанс пленки, а  $\lambda$  – безразмерная константа электрон-электронного взаимодействия (для экранированного кулоновского взаимодействия  $\lambda = 1/2$ ). Параметр  $\tau_*$  определяет время, на котором диффузия становится двумерной:  $\tau_* = \max\{\tau, \tau_d\}$ , где  $\tau$  – время упругого рассеяния, а  $\tau_d = d^2/4D$  – время диффузии через толщину пленки [44, 47]. В реальном пространстве логарифм в уравнении (1) набирается за счет двумерной диффузии от масштаба  $\max(l, d)$  до длины когерентности  $\xi_0$ . Поправка (1), обратно пропорциональная кондактансу пленки, концептуально подобна слаболокализационной [50, 51] и связанной со взаимодействием [30] поправкам к двумерной проводимости, при этом две из трех степеней логарифма связаны с экспоненциальной чувствительностью  $T_c$  к константе взаимодействия  $\lambda_{\text{BCS}}$ .

Выражение (1), полученное в первом порядке теории возмущений, было позже обобщено Финкельштейном на случай произвольно сильного подавления  $T_c$  с помощью ренорм-группового суммирования ведущих логарифмов [44, 52]. Аналогичный результат можно получить, решая уравнение самосогласования с зависящей от энергии вершиной куперовского притяжения  $\lambda_{E, E'} = \lambda_{\text{BCS}} - \gamma_g^2 \log[1/\max(E, E')\tau_*]$  [53]. В случае экранированного кулоновского взаимодействия ( $\lambda = 1/2$ ) непertурбативное выражение для критической температуры как функции безразмерного кондактанса пленки, описывающее сверхпро-

водимость вплоть до ее полного подавления, имеет вид:

$$\log \frac{T_c}{T_{c0}} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2\gamma g} \log \frac{\gamma + \gamma_g}{\gamma - \gamma_g}, \quad (2)$$

где  $\gamma_g = 1/\sqrt{2\pi g}$  и  $\gamma = 1/\log(\hbar/T_{c0}\tau_*)$ . Выражение (2), где параметр  $\gamma$  рассматривается как подгоночный, было использовано Финкельштейном [44] для описания экспериментальных данных по зависимости  $T_c$  пленок MoGe от толщины, напрямую связанной с безразмерным кондактансом  $g$  [11]. С тех пор такой способ объяснения экспериментальных данных по подавлению сверхпроводимости в неупорядоченных пленках стал фактически общепринятым [14, 15, 54].

Согласно уравнениям (1) и (2), подавление  $T_c$  в тонких ( $d \ll \xi_0$ ) сверхпроводящих пленках определяется исключительно безразмерным кондактансом на квадрат  $g$ . Это утверждение прекрасно вписывается в общую парадигму скейлинга [50], подтверждаемую ренорм-групповым анализом нелинейной сигма-модели в 2D пространстве [55–57].

Однако интерпретация экспериментальных данных по зависимости  $T_c(d)$  с помощью формулы (2) сталкивается с рядом принципиальных трудностей. Первая связана с внутренней противоречивостью подхода, в котором  $\gamma$  рассматривается как свободный подгоночный параметр. Как следует из таблицы 1, где собраны данные по различным сверхпроводящим пленкам, типичные значения  $\gamma_{\text{fit}}^{-1}$ , полученные из подгонки зависимости  $T_c(d)$  под выражение (2), находятся в интервале  $7 \div 9$ . Проблема заключается в том, что данные значения значительно превосходят теоретическую оценку  $\gamma^{-1} = \mathcal{L}_d = \ln(\hbar/T\tau_d)$  (последняя колонка в таблице 1), а в половине случаев превосходят также и величину  $\mathcal{L} = \ln(\hbar/T\tau)$  (предпоследняя колонка в таблице 1). С учетом того, что пертурбативный сдвиг  $T_c$ , согласно уравнению (1), пропорционален кубу этого логарифма, расхождение между микроскопической теорией и результатом фита по формуле (2) оказывается очень большим. Можно попытаться спасти положение, сказав, что  $\gamma_{\text{fit}}^{-1}$  содержит также вклад 3D диффузии, но в таком случае остается непонятным статус уравнений (1) и (2), полученных в предположении 2D диффузии.

Другая проблема, связанная с интерпретацией экспериментальных данных в терминах формулы (2), заключается в неявном постулировании того, что эффект подавления  $T_c$  определяется только безразмерным кондактансом пленки. Однако в реальных тонких пленках в силу технологических причин при изменении толщины меняется и концентрация при-

**Таблица 1.** Параметры сверхпроводящих пленок\*: объемная критическая температура  $T_{c0}$ , толщина  $d$ , длина свободного пробега  $l$ , величина параметра  $\gamma$  при подгонке зависимости  $T_c(g)$  формулой (2), а также значения двух логарифмов:  $\mathcal{L} = \log(\hbar/T_{c0}\tau)$  и  $\mathcal{L}_d = \log(\hbar/T_{c0}\tau_d)$

Состав	Ссылка	$T_{c0}$ , K	$d$ , нм	$l$ , Å	$\gamma_{\text{fit}}^{-1}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}_d$
NbN	[4]	15	$2 \div 15$	$\sim 5$	5.0	5.7	$5.6 \div 3.4$
NbN	[5]	15	$1 \div 26$	2	8.3	7.2	$6.2 \div 2.1$
NbN	[8]	17	$> 50$	$< 7$	—	4.8	3D
TiN	[10]	5	$3.6 \div 5$	3	6.2	8.9	$6.4 \div 2.4$
MoGe	[11, 52]	7	$1.5 \div 100$	$\sim 4$	8.2	6	$< 4.0$
MoSi	[13]	7	$1 \div 20$	5	7.0	5.6	$< 4.7$
MoC	[15]	8	$3 \div 30$	$< 4$	7.5	5.5	$3.2 \div 0.9$
WRe	[16]	6	$3 \div 120$	4	7.4	6.1	$< 2.7$
Nb	[58]	7	$2.5 \div 26$	18	11.7	5.2	$< 4.8$

\*Для пленок WRe и TiN мы положили  $1/k_F \sim l \sim a$ , где  $a$  – межатомное расстояние. При расчетах для MoC в качестве эффективной массы взята масса свободного электрона.

месяц, а с ней и длина свободного пробега  $l$ . Большой массив экспериментальных данных по критической температуре тонких пленок был проанализирован в работе [59], где было показано, что  $T_c$  зависит в первую очередь от трехмерной объемной проводимости  $\sigma \propto k_F^2 l$ , а не от двумерного кондактанса  $g \propto k_F^2 l d$ .

Фактически неприменимость формулы (2) для описания подавления  $T_c$  в тонких пленках связана со слишком узким интервалом для 2D диффузии (от  $d$  до  $\xi_0$ ), которого оказывается недостаточно для объяснения наблюдаемой величины эффекта, и малостью префактора  $1/g \sim (k_F l)^{-1} (k_F d)^{-1}$ . Следовательно, для количественного описания экспериментальных данных необходимо указать другой механизм усиления кулоновского взаимодействия беспорядком, не связанный с двумерной диффузией.

В настоящей работе мы показываем, что имеющиеся экспериментальные данные по подавлению  $T_c$  в тонких пленках могут быть удовлетворительно объяснены в предположении, что основной вклад происходит от процессов *трехмерного баллистического* движения электронов с типичным расстоянием между точкой взаимодействия и местом примесного рассеяния в несколько длин волн. Наш основной результат состоит в корректировке пертурбативной формулы (1) для сдвига  $T_c$ :

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = -\frac{\alpha}{k_F l} - \frac{\lambda}{3\pi g} \log^3 \frac{\hbar}{T_{c0}\tau_d}, \quad (3)$$

где добавленный первый член отвечает вкладу трехмерной баллистической области. При этом нужно отдавать отчет, что в подавление  $T_c$  вносят вклад все масштабы, начиная от фермиевской длины волны,

так что удержание последнего члена, происходящего из области двумерной диффузии, на фоне первого может быть оправдано только для материалов с исключительно низкой  $T_{c0}$  или достаточно тонких (в частности, атомных [60]) пленок.

Коэффициент  $\alpha$  в формуле (3) является неуниверсальным, он зависит от деталей взаимодействия и структуры случайного потенциала. В модели слабого короткодействующего отталкивания между электронами с амплитудой  $\lambda$  и гауссова белого случайного потенциала он имеет вид

$$\alpha = \frac{\pi \lambda \log^2 \omega_D / T_c}{2(1 + \lambda \log E_F / \omega_D)^2}. \quad (4)$$

Для реальных сверхпроводящих пленок с кулоновским взаимодействием следует ожидать зависящее от конкретного материала значение параметра  $\alpha \sim 1$ .

**2. Модель.** Мы рассматриваем модель  $s$ -волновой сверхпроводимости, предполагая притяжение электронов по фононому механизму, которое описывается потенциалом  $V_{ph}(\mathbf{r}) = -(\lambda_{ph}/\nu)\delta(\mathbf{r})$ , действующим в полосе энергий  $\omega_D$  вблизи энергии Ферми, а также короткодействующее отталкивание с потенциалом  $V(\mathbf{r}) = (\lambda/\nu)\delta(\mathbf{r})$  с обрезкой по энергии на величине  $E_F$ . Мы будем работать в приближении слабой связи,  $\lambda_{ph}, \lambda \ll 1$ , и пренебрегать перенормировкой фононной вершины беспорядком за рамками лестничного приближения [39]. Беспорядок моделируется случайным потенциалом с гауссовым белым шумом, задаваемом коррелятором  $\langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}') \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/2\pi\nu\tau$ , где  $\nu$  – плотность состояний на уровне Ферми в расчете на одну проекцию спина, а  $\tau$  – время примесного рассеяния.

Без учета примесных перенормировок вершин взаимодействия,  $T_c$  дается стандартным выражением теории Бардина–Купера–Шриффера (БКШ):

$$T_{c0} = \omega_D \exp(-1/\lambda_{BCS}), \quad (5)$$

где эффективная константа связи имеет вид

$$\lambda_{BCS} = \lambda_{ph} - \frac{\lambda}{1 + \lambda \log E_F / \omega_D}. \quad (6)$$

Второе слагаемое (в российской литературе известное, как толмачевский логарифм, а в западной – как кулоновский псевдопотенциал) описывает вклад электрон-электронного отталкивания в куперовский канал, которое подвержено логарифмической перенормировке в области энергий от  $\omega_D$  до  $E_F$  [61–63], см. также дополнительный материал.

Критическая температура определяется полюсом куперовской лестницы на нулевом импульсе и ну-

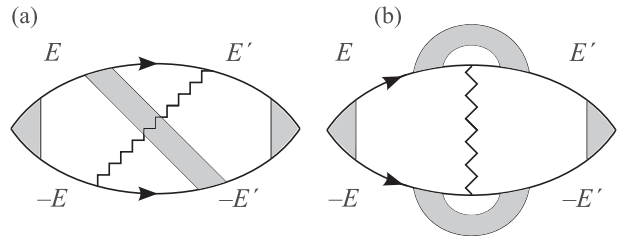


Рис. 2. Неупругие диаграммы для диффузионного вклада ( $q \ll 1/l$  и  $E, E' \ll 1/\tau$ , где  $q$  – импульс, переносимый линией взаимодействия) в куперовскую восприимчивость, определяющие сдвиг  $T_c$ . Затененные блоки в середине диаграмм обозначают диффузоны и купероны, соединяющие функции Грина с разными знаками мацубаровских энергий. Затененные треугольники в углах диаграмм обозначают перенормировку фононной вершины примесными лестницами и лестницами электронного взаимодействия с константой  $\lambda$

левой частоте в мацубаровской диаграммной технике. В присутствии случайного потенциала диаграммный ряд необходимо усреднить по беспорядку всеми возможными способами. В ведущем порядке (приближение непересекающихся пунктиров) этот процесс сводится к независимому усреднению произведения двух функций Грина,  $G_E G_{-E}$ , соединяющих вершины взаимодействия ( $\lambda_{ph}$  или  $\lambda$ ), что достигается вставкой куперона. В согласии с теоремой Андерсона [64–66], результат не зависит от силы беспорядка и приводит к выражениям (5) и (6) для критической температуры.

**3. Диффузионный вклад.** Для вычисления сдвига  $T_c$  необходимо учесть процессы, описывающие совместный эффект взаимодействия и беспорядка в следующем порядке по отношению к диаграммам без пересечений [44–46, 48, 49, 52]. Диаграммы, дающие ведущий вклад в диффузионной области, показаны на рис. 2, где взаимодействие (зигзагообразная линия) пересекается примесными лестницами – диффузонами и куперонами – обозначенными серыми блоками. Диаграмма (а) имеет симметричный аналог, а диаграмма (b) содержит два дополнительных вклада, содержащих примесную линию, соединяющую функции Грина с энергией одного знака (Hikami box) [67]. Аналитическое выражение для сдвига  $T_c$  содержит суммирование по двум мацубаровским энергиям  $E$  и  $E'$  (см. дополнительный материал):

$$\frac{\delta T_c}{T_{c0}} = -\frac{2\pi\lambda}{\nu} \left( \frac{\lambda_{ph}}{\lambda_{BCS}} \right)^2 T^2 \sum_{E, E' > 0}^{E_F} \frac{u(E)u(E')I_{E, E'}}{EE'}, \quad (7)$$

где множитель  $\lambda_{\text{ph}}/\lambda_{\text{BCS}}$  и логарифмическая функция  $u(E) = \theta(\omega_D - E) - (\lambda \log \omega_D/T)/(1 + \lambda \log E_F/T)$  отвечают за эффекты перенормировок, которые можно описать путем включения в левую и правую вершину диаграммы лестниц из линий взаимодействия  $\lambda$  (см. дополнительный материал). В диффузионной области величина  $I_{E,E'}$  определяется интегралом по двумерному импульсу в плоскости пленки  $q_{\parallel}$  и суммой по поперечным модам оператора Лапласа с граничными условиями Неймана ( $q_z = 2\pi m/d$ , где  $m = 0, 1, \dots$ ), переносимыми линией взаимодействия (см. дополнительный материал):

$$I_{E,E'} = \frac{\tau}{d} \sum_{q_z} \int \frac{d\mathbf{q}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{f_q(E+E')^2 [3 - f_q(E+E')]}{1 - f_q(E+E')}. \quad (8)$$

Имея цель проследить за кроссовером в баллистическую область, мы написали купероны и диффузоры за рамками диффузионного приближения, выразив их через величину  $f_q(\omega) = (ql)^{-1} \arctan[ql/(1 + |\omega|\tau)]$ , которая описывает одну ступень примесной лестницы при произвольных значениях  $ql$  и  $\omega\tau$  и условиях  $q \ll k_F$ ,  $\omega \ll E_F$ . Аналогичный подход был использован в работе [68] для вычисления флуктуационной проводимости при произвольной силе беспорядка.

Ведущий 2D диффузионный вклад возникает от моды с  $q_z = 0$ . Обрезая интеграл по  $q$  на импульсе  $1/d$ , а суммирование по энергиям – на  $\omega_D$ , и принимая во внимание, что в реальных пленках, изучаемых в эксперименте, энергия Дебая  $\omega_D$  по порядку величины совпадает с  $\hbar/\tau_d$  [9], приходим к стандартному ответу (1) с  $\tau_* \sim \tau_d$ . При этом выделение 2D диффузионного вклада из выражений (7) и (8) осложняется тем, что вклад других областей, вообще говоря, оказывается больше. Действительно, на масштабе  $q \sim 1/d$  двумерное логарифмическое поведение сменяется линейно расходящимся за счет включения высших поперечных мод, делающих импульсный интеграл трехмерным. При желании можно оценить вклад 3D диффузионной области, введя искусственную обрезку при  $q \sim 1/l$ , что дает

$$\frac{\delta T_c^{\text{(diff, 3D)}}}{T_{c0}} \sim -\frac{\lambda}{(k_F l)^2} \log^2 \frac{\omega_D}{T_{c0}}. \quad (9)$$

Этот вклад, содержащий на одну степень логарифма меньше, оказывается больше выражения (1) по параметру  $d/l \gg 1$ . Однако оказывается, что ничто не мешает в интеграле (8) уйти на еще большие импульсы, в баллистическую область  $q \gg 1/l$ . Примечательно, что в этой области подынтегральное выражение в уравнении (8) по-прежнему ведет себя как

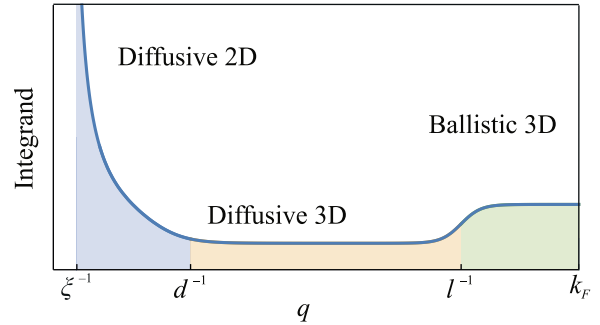


Рис. 3. (Цветной онлайн) Схематическое изображение зависимости подынтегрального выражения в уравнении (8) от  $q$  (при не очень больших  $E + E'$ ). В области  $q > 1/d$  оно слабо зависит от  $q$ , меняясь в  $\pi^2/8$  раз при переходе от диффузионного к баллистическому характеру движения при  $q \sim 1/l$

$1/q^2$ , но с другим численным коэффициентом. Данное обстоятельство указывает на то, что основной вклад в интеграл происходит от импульсов порядка фермиевского:  $q \sim k_F$ . Эта область требует особого рассмотрения, которое будет проведено ниже. Схематически роль различных областей импульса проиллюстрирована на рис. 3. С точностью до логарифмических факторов, возникающих от суммирования по энергии, интеграл от показанной кривой определяет вклад соответствующих областей в сдвиг  $T_c$ .

**4. Баллистический вклад.** В этом разделе мы изучим баллистический вклад в сдвиг  $T_c$ , возникающий от процессов с передачей импульса больше  $1/l$ . В силу неравенства  $l \ll d$  движение электронов можно считать трехмерным. Этот вклад описывается диаграммами, изображенными на рис. 2, где в диффузионных лестницах следует оставить единственную примесную линию, описывающую рассеяние на одной примеси. Для его аккуратного вычисления требуется уточнить выражение (8), отказавшись от использованного при его выводе приближении  $q \ll k_F$ .

Баллистический вклад может быть описан как поправка к голой (неперенормированной) константе электронного отталкивания в куперовском канале  $\lambda^c$ , в низшем приближении совпадающей с  $\lambda$  (рис. 4a). Ведущие поправки даются диаграммами, показанными на рис. 4b и c. В рассматриваемой модели точечного взаимодействия и дельта-коррелированного беспорядка вычисление этих диаграмм может быть проделано аналитически и приводит к, вообще говоря, зависящей от энергий поправке  $\delta\lambda_{E,E'}^c$  к константе взаимодействия в куперовском канале:

$$\frac{\delta\lambda_{E,E'}^c}{\lambda} = 2 \frac{(b) + (c)}{(a)} = \frac{2[P(E, E') + P(E, -E')]}{(2\pi\nu\tau)^2 f_0(2E) f_0(2E') \lambda}, \quad (10)$$



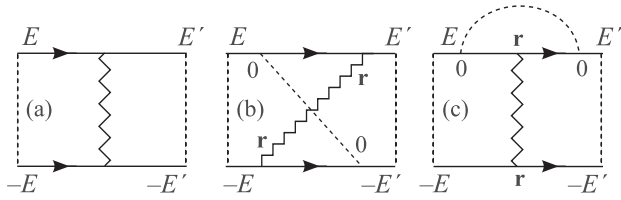


Рис. 4. (а) – Вершина электрон-электронного взаимодействия  $\lambda$  в куперовском канале и примесные линии, с которых начинаются купероны. (b), (c) – Диаграммы, описывающие ведущую поправку к вершине  $\lambda^c$  от баллистической области. Обе диаграммы имеют зеркальные аналоги

где слагаемые в скобках отвечают диаграммам (b) и (c), соответственно, а общий коэффициент 2 возник из-за наличия симметричных диаграмм. Множители  $f_0(\omega) = 1/(1 + |\omega|\tau)$  в знаменателе возникают от интегрирования пары функций Грина на рис. 4а по импульсу (ступень диффузионной лестницы).

Вычисление блока  $P(E, E')$  удобно проводить в координатном представлении [38]. Так как и электрон-электронное взаимодействие, и коррелятор беспорядка предполагаются точечными, аналитическое выражение содержит только одно интегрирование по расстоянию  $\mathbf{r}$  между примесью и точкой взаимодействия, и мы получаем:

$$P(E, E') = \frac{\lambda}{2\pi\nu\tau} \int d\mathbf{r} G_+ G'_- [G_+ G_-] [G'_+ G'_-], \quad (11)$$

где  $G_{\pm} = G_{\pm E}(\mathbf{r})$  – усредненные по беспорядку функции Грина, а штрих относится к аргументу энергии  $E'$ . Квадратные скобки обозначают свертку в реальном пространстве:  $[G_+ G_-] = \int G_+(\boldsymbol{\rho}) G_-(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}$ . Как мы увидим ниже, интеграл по  $\mathbf{r}$  в уравнении (11) сходится на масштабе  $1/k_F$ , что позволяет заменить функции Грина их значениями без беспорядка:

$$G_{\pm} = -\pi\nu \frac{e^{\pm ik_F r}}{k_F r}, \quad [G_+ G_-] = \frac{2\pi\nu\tau}{1 + 2|E|\tau} \frac{\sin k_F r}{k_F r}, \quad (12)$$

где при вычислении свертки использовано приближение  $E, E' \ll E_F$ .

Легко убедиться, что интеграл в уравнении (11) обращается в нуль для различных знаков энергий  $E$  и  $E'$ , так что  $P(E, E') \propto \theta(EE')$ . Таким образом, в рамках рассматриваемой модели баллистические диаграммы на рис. 4b и c отличны от нуля при том же соотношении между знаками энергий  $E$  и  $E'$ , что и диффузионные диаграммы на рис. 2a и b соответственно. Данное обстоятельство является *a priori* неочевидным, поскольку одиночный пунктир может

соединять две функции Грина с одинаковым знаком энергии. Однако, как мы видим, в случае точечного взаимодействия и дельта-коррелированного беспорядка такие диаграммы зануляются и в баллистическом пределе.

Подставляя выражения (12) в уравнение (11) и далее в (10), обнаруживаем, что множители  $(1 + 2|E|\tau)$  и  $(1 + 2|E'|\tau)$  в знаменателях  $[G_+ G_-]$  и  $[G'_+ G'_-]$  сокращают такие же множители в  $f_0(E)$  и  $f_0(E')$  в уравнении (10). Единственная остающаяся зависимость  $\delta\lambda_{E, E'}^c$  от энергий содержится в факторе  $\theta(EE')$ , которому пропорционален блок  $P(E, E')$ . Однако благодаря структуре выражения (10), она также пропадает. В итоге, поправка  $\delta\lambda_{E, E'}^c$  оказывается не зависящей от энергий  $E$  и  $E'$ :

$$\delta\lambda^c = \frac{\pi\nu\lambda}{2\tau} \int \frac{d\mathbf{r}}{(k_F r)^2} \left( \frac{\sin k_F r}{k_F r} \right)^2 = \frac{\pi\lambda}{2k_F l}. \quad (13)$$

Как и предполагалось, интеграл набирается с масштабов порядка длины волны электрона, что характерно для 3D мезоскопических эффектов [34, 69, 70].

Найденную поправку можно по аналогии с работой [36] рассматривать, как перенормировку вклада электрон-электронного взаимодействия в куперовский канал за счет рассеяния на фриделевских осцилляциях, вызванных примесями. Эта поправка описывает усиление электронного отталкивания, приводящее к увеличению кулоновского псевдопотенциала и, как следствие, к подавлению эффективной константы связи  $\lambda_{BCS}$ . Понижение  $T_c$  можно найти, заменяя  $\lambda$  на  $\lambda + \delta\lambda^c$  и раскладывая уравнение (6) по  $\delta\lambda^c$ :

$$\frac{\delta T_c^{(ball, 3D)}}{T_{c0}} = -\frac{\pi}{2} \frac{\lambda}{k_F l} \left( \frac{\log \omega_D / T_{c0}}{1 + \lambda \log E_F / \omega_D} \right)^2. \quad (14)$$

**5. Роль упругих диаграмм.** Помимо *неупругих* диаграмм, показанных на рис. 2 и 4, в которых линия взаимодействия соединяет верхнюю и нижнюю функции Грина, имеется также несколько так называемых *упругих* диаграмм, связанных с поправкой от взаимодействия в одноэлектронную функцию Грина. Как показал Финкельштейн [44], в случае 2D диффузии вклад в подавление  $T_c$  от этого класса диаграмм всегда мал: в случае  $Dq^2 > \omega$  они содержат меньшую степень логарифма, а в случае  $Dq^2 < \omega$  их вклад вместе со вкладом неупругих диаграмм сокращается при учете дополнительного семейства диаграмм, восстанавливающих калибровочную инвариантность теории. Последнее семейство диаграмм становится сублидирующим уже в диффузионной области при  $Dq^2 > \omega$  и по этой причине не рассматривается в настоящей работе.

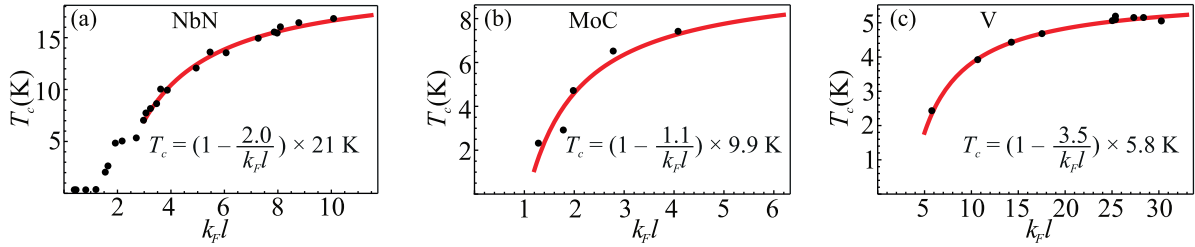


Рис. 5. (Цветной онлайн) Экспериментальные данные по зависимости  $T_c$  от  $k_F l$  (точки) и их подгонка с помощью формулы (17) (сплошная линия) для сверхпроводящих пленок различной толщины и разного состава: (а) – NbN [8]; (б) – MoC [15]; (с) – V [1]

В случае электрон-электронного взаимодействия без запаздывания существует точное соотношение [40, 45, 46], связывающее вклад упругих диаграмм в подавление  $T_c$  и поправку к туннельной плотности состояний  $\delta\nu(\varepsilon)$ , которое для наших целей удобно представить (см. дополнительный материал) по аналогии с формулой (7) в виде

$$\frac{\delta T_c^{(\text{elast})}}{T_c} = \left( \frac{\lambda_{\text{ph}}}{\lambda_{\text{BCS}}} \right)^2 T \sum_E \int d\varepsilon \frac{u^2(E)}{E^2 + \varepsilon^2} \frac{\delta\nu(\varepsilon)}{\nu_0}. \quad (15)$$

Воспользуемся известными результатами для  $\delta\nu(\varepsilon)$ , чтобы оценить поправку (15) от упругих диаграмм.

Поправка к туннельной плотности состояний 3D металла в диффузионной области ( $|\varepsilon| < 1/\tau$ ) имеет вид  $\delta\nu_{\text{diff}}(\varepsilon)/\nu_0 \sim \lambda\sqrt{|\varepsilon|\tau}/(k_F l)^2$  [71]. Элементарное вычисление показывает, что соответствующий вклад в сдвиг  $T_c$  от этой области содержит префактор  $1/(k_F l)^2$ , что параметрически меньше, чем вклад баллистической области, описанный ниже.

Поправка к туннельной плотности состояний в 3D баллистической области ( $|\varepsilon| > 1/\tau$ ) изучалась в работах [37, 38], где было показано, что она носит линейный характер и может быть несимметрична относительно энергии Ферми. В случае контактного взаимодействия и дельта-коррелированного беспорядка, а также при параболической дисперсии электронов она отлична от нуля только для энергий, лежащих ниже энергии Ферми, и имеет вид  $\delta\nu_{\text{ball}}(\varepsilon)/\nu_0 \sim \lambda|\varepsilon|\theta(-\varepsilon)/(k_F l)$  [38]. Вычисление по формуле (15) приводит к результату

$$\frac{\delta T_c^{(\text{ball, 3D, elast})}}{T_{c0}} \sim \frac{\lambda^3}{k_F l} \left( \frac{\log \omega_D/T_{c0}}{1 + \lambda \log E_F/\omega_D} \right)^2, \quad (16)$$

что параметрически меньше ведущего вклада (14) при сделанном предположении  $\lambda \ll 1$ . Отсутствие вклада упругих процессов в первом порядке по  $\lambda$  связано с тем, что в отличие от выражения (7), содержащего две логарифмические суммы по  $E$  и  $E'$ , интеграл (15) в 3D баллистической области не является

логарифмическим. Утверждение о том, что упругие диаграммы не вносят вклад в ведущую поправку к сдвигу  $T_c$ , носит, по-видимому, общий характер и связано с тем, что туннельная плотность состояний не является термодинамической величиной.

**6. Заключение.** В настоящей работе мы исследовали влияние области трехмерного баллистического движения электронов на подавление критической температуры умеренно разупорядоченных сверхпроводящих пленок ( $k_F l \gg 1$ ). Работая в модели точечного отталкивания и дельта-коррелированного беспорядка, мы вычислили пертурбативный вклад соответствующей области в подавление  $T_c$ , даваемый первым членом в уравнении (3). При сравнении с экспериментальными данными следует принимать во внимание, как то, что в реальных образцах  $\lambda \sim 1/2$  за счет кулоновского взаимодействия, так и то, что численный множитель в уравнении (4) является специфическим для выбранной модели. В общем случае, следует ожидать, что баллистическая поправка к сдвигу  $T_c$  имеет вид  $\delta T_c/T_{c0} = -\alpha/k_F l$  с числом  $\alpha \sim 1$ .

Второй член в формуле (3) описывает стандартный вклад в подавление  $T_c$ , происходящий из области двумерного диффузионного движения электронов, в котором логарифм набирается от масштабов толщины пленки  $d$  до масштабов  $\xi_0$ . Малость этого интервала для реальных пленок и относительно большое значение безразмерного кондактанса  $g \sim (k_F l)(k_F d)$  делает его практически незаметным на фоне трехмерного баллистического вклада.

На рисунке 5 показаны результаты фитирования данных ( $T_c, k_F l$ ) для сверхпроводящих пленок различной толщины из трех материалов с фермионным механизмом подавления зависимостью

$$T_c = (1 - \alpha/k_F l)T_{c0} \quad (17)$$

с подгоночными параметрами  $\alpha$  и  $T_{c0}$ . Мы видим довольно неплохое соответствие, причем зависящее от

материала значение  $\alpha$  ожидаемо оказывается порядка единицы. Важно отметить, что представленные на рис. 5а данные для NbN получены на толстых пленках [8], для которых область двумерной диффузии вообще отсутствует (см. таблицу 1).

Основываясь на (i) наблюдаемом согласии экспериментальных данных с зависимостью (17), (ii) упомянутых выше внутренних противоречиях теории, приводящей к формуле (2) со свободным параметром  $\gamma$ , а также на (iii) выводах работы [59], свидетельствующих о преимущественной зависимости  $T_c$  от трехмерной проводимости, а не от двумерного контактанса на квадрат, мы можем сделать следующий практически важный вывод:

*В значительной части не очень тонких умеренно разупорядоченных сверхпроводящих пленок, где подавление сверхпроводимости происходит по фермионному сценарию, оно обусловлено приближением к порогу трехмерной андерсоновской локализации и контролируется параметром  $k_{FL}$ . Эффекты двумерной диффузии, определяемые безразмерным контактансом  $g$ , также присутствуют, но они дают лишь малую поправку на фоне трехмерных баллистических эффектов.*

Авторы признательны И. С. Бурмистрову, М. В. Фейгельману, А. М. Финкельштейну, П. Сабо, П. Самюэли, К. С. Тихонову и П. М. Островскому за плодотворные обсуждения. Данная работа поддержана грантом Российского научного фонда # 20-12-00361.

1. A. A. Teplov, ZhETF **71**, 802 (1976) [Sov. Phys. JETP **44**, 422 (1976)].
2. Z. Wang, A. Kawakami, Y. Uzawa, and B. Komiyama, J. Appl. Phys. **79**, 7837 (1996).
3. A. Semenov, B. Günther, U. Böttger, H.-W. Hübers, H. Bartolf, A. Engel, A. Schilling, K. Ilin, M. Siegel, R. Schneider, D. Gerthsen, and N. A. Gippius, Phys. Rev. B **80**, 054510 (2009).
4. Y. Noat, V. Cherkez, C. Brun, T. Cren, C. Carbillet, F. Debontridder, K. Ilin, M. Siegel, A. Semenov, H.-W. Hübers, and D. Roditchev, Phys. Rev. B **88**, 014503 (2013).
5. K. Makise, T. Odou, S. Ezaki, T. Asano, and B. Shinozaki, Materials Research Express **2**, 106001 (2015).
6. L. Kang, B. B. Jin, X. Y. Liu, X. Q. Jia, J. Chen, Z. M. Ji, W. W. Xu, P. H. Wu, S. B. Mi, A. Pimenov, Y. J. Wu, and B. G. Wang, J. Appl. Phys. **109**, 033908 (2011).
7. S. Ezaki, K. Makise, B. Shinozaki, T. Odo, T. Asano, H. Terai, T. Yamashita, S. Miki, and Z. Wang, J. Phys.: Condens. Matter **24**, 475702 (2012).

8. M. Chand, G. Saraswat, A. Kamlapure, M. Mondal, S. Kumar, J. Jesudasan, V. Bagwe, L. Benfatto, V. Tripathi, and P. Raychaudhuri, Phys. Rev. B **85**, 014508 (2012).
9. C. Carbillet, V. Cherkez, M. A. Skvortsov, M. V. Feigel'man, F. Debontridder, L. B. Ioffe, V. S. Stolyarov, K. Ilin, M. Siegel, C. Noûs, D. Roditchev, T. Cren, and C. Brun, Phys. Rev. B **102**, 024504 (2020).
10. B. Sacépé, C. Chapelier, T. I. Baturina, V. M. Vinokur, M. R. Baklanov, and M. Sanquer, Phys. Rev. Lett. **101**, 157006 (2008).
11. J. M. Graybeal and M. R. Beasley, Phys. Rev. B **29**, 4167 (1984).
12. D. Lotnyk, O. Onufrienko, T. Samuely, O. Shylenko, V. Komanický, P. Szabó, A. Feher, and P. Samuely, Low Temp. Phys. **43**, 919 (2017).
13. N. Ya. Fogel, E. I. Buchstab, A. S. Pokhila, A. I. Erenburg, and V. Langer, Phys. Rev. B **53**, 71 (1996).
14. A. Banerjee, L. J. Baker, A. Doye, M. Nord, R. M. Heath, K. Erotokritou, D. Bosworth, Z. H. Barber, I. MacLaren, and R. H. Hadfield, Supercond. Sci. Tech. **30**, 084010 (2017).
15. P. Szabó, T. Samuely, V. Hašková, J. Kačmarčík, M. Žemlička, M. Grajcar, J. G. Rodrigo, and P. Samuely, Phys. Rev. B **93**, 014505 (2016).
16. H. Raffy, R. B. Laibowitz, P. Chaudhari, and S. Maekawa, Phys. Rev. B **28**, 6607 (1983).
17. D. Shahar and Z. Ovadyahu, Phys. Rev. B **46**, 10917 (1992).
18. M. Strongin, R. S. Thompson, O. F. Kammerer, and J. E. Crow, Phys. Rev. B **1**, 1078 (1970).
19. D. B. Haviland, Y. Liu, and A. M. Goldman, Phys. Rev. Lett. **62**, 2180 (1989).
20. M. P. A. Fisher, Phys. Rev. Lett. **65**, 923 (1990).
21. V. F. Gantmakher and V. T. Dolgoplov, Usp. Fiz. Nauk **180**, 3 (2010) [Physics-Uspekhi **53**, 1 (2010)].
22. I. S. Burmistrov, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, Phys. Rev. B **92**, 014506 (2015).
23. A. Kapitulnik, S. A. Kivelson, and B. Spivak, Rev. Mod. Phys. **91**, 011002 (2019).
24. B. Sacépé, M. Feigel'man, and T. M. Klapwijk, Nat. Phys. **16**, 734 (2020).
25. M. V. Feigel'man, A. I. Larkin, and M. A. Skvortsov, Phys. Rev. Lett. **86**, 1869 (2001).
26. M. V. Feigel'man, L. B. Ioffe, V. E. Kravtsov, and E. A. Yuzbashyan, Phys. Rev. Lett. **98**, 027001 (2007).
27. M. V. Feigel'man, L. B. Ioffe, V. E. Kravtsov, and E. Cuevas, Ann. Phys. **325**, 1390 (2010).
28. B. Sacépé, T. Dubouchet, C. Chapelier, M. Sanquer, M. Ovadia, D. Shahar, M. V. Feigel'man, and L. B. Ioffe, Nat. Phys. **7**, 239 (2011).



29. B. L. Altshuler and A. G. Aronov, *ZhETF* **50**, 968 (1979) [*Sov. Phys. JETP* **50**, 968 (1979)].
30. B. L. Altshuler and A. G. Aronov, *Electron-electron interaction in disordered systems*, ed. by A. L. Efros and M. Pollak, North-Holland, Amsterdam (1985).
31. P. W. Anderson, K. A. Muttalib, and T. V. Ramakrishnan, *Phys. Rev. B* **28**, 117 (1983).
32. H. Fukuyama, H. Ebisawa, and S. Maekawa, *J. Phys. Soc. Jpn.* **53**, 3560 (1984).
33. B. Rabatin and R. Hlubina, *Phys. Rev. B* **98**, 184519 (2018).
34. T. R. Kirkpatrick and D. Belitz, *Phys. Rev. B* **34**, 2168 (1986).
35. P. W. Adams, D. A. Browne, and M. A. Paalanen, *Phys. Rev. B* **45**, 8837 (1992).
36. A. M. Rudin, I. L. Aleiner, and L. I. Glazman, *Phys. Rev. B* **55**, 9322 (1997).
37. A. A. Koulakov, *Phys. Rev. B* **62**, 6858 (2000).
38. D. S. Antonenko and M. A. Skvortsov, *Phys. Rev. B* **101**, 064204 (2020).
39. B. Keck and A. Schmid, *J. Low Temp. Phys.* **24**, 611 (1976).
40. D. Belitz, *J. Phys. F: Metal Physics* **15**, 2315 (1985).
41. D. Belitz, *Phys. Rev. B* **35**, 1636 (1987).
42. D. Belitz, *Phys. Rev. B* **35**, 1651 (1987).
43. D. Belitz, *Phys. Rev. B* **36**, 47 (1987).
44. A. M. Finkel'stein, *Physica B: Condensed Matter* **197**, 636 (1994).
45. S. Maekawa and H. Fukuyama, *J. Phys. Soc. Jpn.* **51**, 1380 (1982).
46. S. Maekawa and H. Fukuyama, *J. Phys. Soc. Jpn.* **52**, 1352 (1983).
47. Yu. N. Ovchinnikov, *ZhETF* **64**, 719 (1973) [*Sov. Phys. JETP* **37**, 366 (1973)].
48. H. Takagi and Y. Kuroda, *Solid State Commun.* **41**, 643 (1982).
49. H. Ebisawa, H. Fukuyama, and S. Maekawa, *J. Phys. Soc. Jpn.* **54**, 2257 (1985).
50. E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673 (1979).
51. L. P. Gorkov, and A. I. Larkin, and D. E. Khmel'nitsky, *Pis'ma ZhETF* **30**, 248 (1979) [*Sov. Phys. JETP Lett.* **30**, 228 (1979)].
52. A. M. Finkel'stein, *Pis'ma ZhETF* **45**, 37 (1987) [*JETP Lett.* **45**, 46 (1987)].
53. M. V. Feigel'man and M. A. Skvortsov, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 147002 (2012).
54. H. Kim, A. Ghimire, S. Jamali, T. K. Djidjou, J. M. Gerton, and A. Rogachev, *Phys. Rev. B* **86**, 024518 (2012).
55. K. B. Efetov, *Supersymmetry in Disorder and Chaos*, Cambridge University Press, Cambridge, England (1996).
56. A. M. Finkelstein, *Electron Liquid in Disordered Conductors*, in *Soviet scientific reviews*, ed. by I. M. Khalatnikov, Harwood Academic Publishers, Glasgow (1990), v. 14.
57. I. S. Burmistrov, *ZhETF* **156**, 724 (2019) [*JETP* **129**, 669 (2019)].
58. F. Couedo, O. Crauste, L. Bergé, Y. Dolgorouky, C. Marrache-Kikuchi, and L. Dumoulin, *J. Phys.: Conf. Ser.* **400**, 022011 (2012).
59. Y. Ivry, C.-S. Kim, A. E. Dane, D. De Fazio, A. N. McCaughan, K. A. Sunter, Q. Zhao, and K. K. Berggren, *Phys. Rev. B* **90**, 214515 (2014).
60. C. Brun, T. Cren, V. Cherkez, F. Debontridder, S. Pons, D. Fokin, M. C. Tringides, S. Bozhko, L. B. Ioffe, B. L. Altshuler, and D. Roditchev, *Nat. Phys.* **10**, 444 (2014).
61. N. N. Bogoliubov, V. V. Tolmachev, and D. V. Shirkov, *A New Method in the Theory of Superconductivity*, Consultants Bureau, N.Y. (1959).
62. P. Morel and P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **125**, 1263 (1962).
63. W. L. McMillan, *Phys. Rev.* **167**, 331 (1968).
64. P. W. Anderson, *Phys. Chem. Sol.* **11**, 26 (1959).
65. A. A. Abrikosov and L. P. Gor'kov, *ZhETF* **35**, 1558 (1958) [*Sov. Phys. JETP* **8**, 1090 (1959)].
66. A. A. Abrikosov and L. P. Gor'kov, *ZhETF* **36**, 319 (1959) [*Sov. Phys. JETP* **9**, 220 (1959)].
67. S. Hikami, *Phys. Rev. B* **24**, 2671 (1981).
68. N. A. Stepanov and M. A. Skvortsov, *Phys. Rev. B* **97**, 144517 (2018).
69. B. A. van Tiggelen and S. E. Skipetrov, *Phys. Rev. E* **73**, 045601 (2006).
70. I. E. Smolyarenko and B. L. Altshuler, *Phys. Rev. B* **55**, 10451 (1997).
71. B. L. Altshuler and A. G. Aronov, *Solid State Commun.* **30**, 115 (1979).