## Процессы $\tau^- \to \pi^- \pi^0 \nu_{\tau}$ и $e^+ e^- \to \pi^+ \pi^-$ в киральной модели НИЛ с учетом взаимодействия пионов в конечном состоянии

М. К. Волков<sup>1)</sup>, А. Б. Арбузов, А. А. Пивоваров

Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Россия

Поступила в редакцию 2 сентября 2020 г. После переработки 2 сентября 2020 г. Принята к публикации 13 сентября 2020 г.

Рассмотрены процессы  $\tau^- \to \pi^- \pi^0 \nu_{\tau}$  и  $e^+ e^- \to \pi^+ \pi^-$  в киральной модели Намбу–Иона-Лазинио с учетом взаимодействия пионов в конечном состоянии с выходом за рамки  $1/N_c$  приближения. Учтен вклад петлевой поправки за счет обмена пионов  $\rho$ -мезоном, которая дает основной вклад в Р-волновом канале. В результате получено удовлетворительное согласие с экспериментальными данными для обоих процессов.

DOI: 10.31857/S123456782020001X

1. Введение. Киральная модель Намбу-Иона-Лазинио (НИЛ) [1–4], а также ее расширенный вариант [5-7], учитывающий первые радиально возбужденные состояния мезонов, позволили описать многие распады т-лептонов и процессы рождения мезонов на встречных электрон-позитронных пучках при низких энергиях в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными [8-14]. Однако оказалось, что описание в рамках модели НИЛ таких важных процессов, как распад  $\tau^- \to \pi^- \pi^0 \nu_{\tau}$  и рождение пары пионов в электрон-позитронной аннигиляции при низких энергиях не удается согласовать с известными экспериментальными данными с достаточной точностью. Мы считаем, это является следствием большого влияния взаимодействия пионов в конечном состоянии в данных процессах. Описать основной вклад взаимодействия пионов в конечном состоянии в Р-волне можно за счет обмена вылетающих пионов ρ-мезоном. Данные диаграммы соответствуют более высокому порядку по  $1/N_c$ , чем тот порядок  $(1/\sqrt{N_c})$ , в котором сформулирована модель НИЛ. Целью данной работы является исследование возможности рассмотреть такие вклады дополнительно к результатам, получаемым в стандартной модели НИЛ.

Процесс  $\tau^- \to \pi^- \pi^0 \nu_{\tau}$  является наиболее вероятной модой распада  $\tau$ -лептона, и его парциальная ширина измерена с высокой точностью:  $Br(\tau \to \pi \pi \nu_{\tau}) = (25.49 \pm 0.09)\%$  [15]. В теоретических работах согласие с экспериментом достигается обычно за счет использования феноменологической параметри-

зации формфактора пиона, которая фитируется по экспериментальным данным [16-19] без анализа соответствующей физической картины. Полобная ситуация имеет место и для процесса  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ , адронный ток которого связан с тем, что присутствует в распаде au-лептона, преобразованием изоспина в рамках гипотезы сохранения векторного тока. Поэтому принципиально важно иметь согласованное теоретическое описание обоих процессов. Также в литературе обсуждается проблема согласования низкоэнергетических процессов электрон-позитронной аннигиляции в адроны и соответствующих мод распада  $\tau$ -лептонов, см. работу [20] и ссылки в ней. С другой стороны, точность экспериментальных результатов по изучению данных процессов постоянно повышается [21–23]. Важность детального понимания этих процессов обусловлена и тем, что они дают существенный вклад в определение адронной поляризации вакуума [24]. Отметим, что в процессе электрон-позитронной аннигиляции в пионы также важно адекватно описать смешивание р- и  $\omega$ мезонов, которое чувствительно к разнице токовых масс и- и *d*-кварков.

Взаимодействие пионов в конечном состоянии исследовалось теоретически в целом ряде подходов. Наиболее общим является метод дисперсионных соотношений, в рамках которого успешно описаны взаимодействия в конечном состоянии легких пар мезонов  $\pi\pi$ ,  $\pi K$  и KK с учетом фазовых сдвигов [25]. Учет таких взаимодействий особенно важен для описания  $\pi\pi$ - и KK-рассеяния при малых энергиях. Рассматриваемый нами диапазон энергий также находится в области применимости киральной пертурба-

<sup>&</sup>lt;sup>1)</sup>e-mail: volkov@theor.jinr.ru

тивной теории (ChPT – Chiral Perturbation Theory) [26, 27]. В частности, в рамках унитаризованной ChPT взаимодействия в конечном состоянии рассматривались с помощью метода инверсии амплитуд [28, 29]. Непосредственное использование названных методов в сочетании с моделью НИЛ невозможно в силу несогласованности соответствующих подходов. С другой стороны, учет мезонных петлевых поправок в рамках модели НИЛ уже применялся при описании ряда процессов [30, 31], где однако рассмотренные мезонные петли не выходили за рамки ведущего по  $1/N_c$  приближения модели.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 приводится используемый нами лагранжиан стандартной модели НИЛ. В следующих двух разделах 3 и 4 рассматриваются процессы электронпозитронной аннигиляции в два пиона и распад  $\tau$ лептона, соответственно. Раздел 5 посвящен обсуждению результатов.

2. Лагранжиан стандартной модели НИЛ. Фрагмент кварк-мезонного лагранжиана взаимодействия модели НИЛ, содержащего нужные нам вершины, имеет вид [3]:

$$\Delta \mathcal{L}_{int} = \bar{q} \left[ \frac{g_{\rho}}{2} \gamma^{\mu} \left( \tau_3 \rho_{\mu}^0 + \tau_0 \omega_{\mu} \right) + i g_{\pi} \gamma^5 \tau_3 \pi^0 + \frac{g_{\rho}}{2} \gamma^{\mu} \sum_{j=\pm} \tau_j \rho_{\mu}^j + i g_{\pi} \gamma^5 \sum_{j=\pm} \tau_j \pi^j \right] q, \qquad (1)$$

где q и  $\bar{q} - SU(2)$  дублеты u- и d-кварковых полей с составляющими массами  $m_u \approx m_d = m = 280$  МэВ;  $\tau_3$  – матрица Паули;  $\tau_{\pm}$  – линейные комбинации матриц Паули;  $\tau_0$  – единичная матрица. Константы вза-имодействия:

$$g_{\rho} = \left(\frac{2}{3}I_2\right)^{-1/2}, \quad g_{\pi} = \left(\frac{4}{Z_{\pi}}I_2\right)^{-1/2}, \quad (2)$$

где

$$Z_{\pi} = \left[1 - 6\frac{m^2}{M_{a_1}^2}\right]^{-1} \tag{3}$$

константа дополнительной перенормировки, возникающая при учете  $\pi - a_1$  переходов,  $M_{a_1} = 1230 \pm \pm 40 \text{ МэВ}$  [15] – масса аксиально векторного мезона. Интегралы, возникающие в результате перенормировки лагранжиана:

$$I_{2} = -i \frac{N_{c}}{(2\pi)^{4}} \int \frac{\Theta(\Lambda^{2} + k^{2})}{(m^{2} - k^{2})^{2}} d^{4}k =$$
$$= \frac{N_{c}}{(4\pi)^{2}} \left[ \ln\left(\frac{\Lambda^{2}}{m^{2}} + 1\right) - \left(1 + \frac{m^{2}}{\Lambda^{2}}\right)^{-1} \right], \qquad (4)$$

где  $\Lambda = 1250 \text{ МэВ}$  – параметр обрезания по импульсу кварков в петле,  $N_c = 3$  – число цветов.

3. Процесс  $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ . Диаграммы процесса  $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$  без учета взаимодействия в конечном состоянии приведены на рис. 1–3.



Рис. 1. Контактная диаграмма процесса  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ 



Рис. 2. Диаграмма процесса  $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$  с промежуточным  $\rho$ -мезоном



Рис. 3. Диаграмма процесс<br/>а $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ с промежуточным  $\omega$ -мезоном

В данном процессе играет роль только Р-волна, а контактное взаимодействие четырех пионов через кварковый четырехугольник, а также взаимодействие пионов через скалярный мезон, относящиеся к S-волне, здесь вклада не дают. Взаимодействие пионов путем аннигиляции в *ρ*-мезон учтено в ширине распада в знаменателе пропагатора Брейта–Вигнера промежуточного *ρ*-мезона. Поэтому для учета взаимодействия пионов в конечном состоянии в данном

Письма в ЖЭТФ том 112 вып. 7-8 2020

процессе достаточно учесть обмен  $\rho$ -мезоном. В результате возникает мезонный треугольник, см. рис. 4.



Рис. 4. Взаимодействие пионов во конечном состоянии в случае электрон-позитронной аннигиляции

Каждая вершина этого треугольника выражается через амплитуду распада  $\rho^0 \to \pi^+\pi^-$ , которую можно получить с помощью лагранжиана (1):

$$M(\rho^0 \to \pi^+ \pi^-) = g_\rho e_\mu(q) \left(p_+ - p_-\right)^\mu, \tag{5}$$

где q – импульс распадающегося  $\rho$ -мезона,  $p_+, p_-$  – импульсы пионов,  $e_{\mu}(q)$  – поляризационный вектор распадающегося  $\rho$ -мезона.

Из данной амплитуды можно получить вершину мезонного лагранжиана, описывающую взаимодействие *р*-мезона с пионами:

$$\mathcal{L} = -ig_{\rho}\rho^{0}_{\mu} \left(\pi^{+}\partial^{\mu}\pi^{-} - \pi^{-}\partial^{\mu}\pi^{+}\right).$$
(6)

С помощью этих вершин можно описать треугольную мезонную петлю, приводящую к интегралу:

$$g_{\rho}^{3} \int \frac{(k-2p_{-})^{\lambda}(k+2p_{+})^{\nu}(2k+p_{+}-p_{-})^{\mu}\left(g_{\nu\lambda}-\frac{k_{\nu}k_{\lambda}}{M_{\rho}^{2}}\right)}{\left[k^{2}-M_{\rho}^{2}\right]\left[(k-p_{-})^{2}-M_{\pi}^{2}\right]\left[(k+p_{+})^{2}-M_{\pi}^{2}\right]} \times \frac{d^{4}k}{(2\pi)^{4}}.$$
(7)

Если разложить этот интеграл по внешним импульсам и удержать только расходящиеся члены (по аналогии с методом, используемым в модели НИЛ), то получится выражение

$$ig_{\rho}^{3}\left[\frac{I_{1M}}{M_{\rho}^{2}} + \left(1 + \frac{4M_{\pi}^{2} - q^{2}}{2M_{\rho}^{2}}\right)I_{2M}\right]\left(p_{+} - p_{-}\right)^{\mu}, \quad (8)$$

где  $q = p_+ + p_-$ ;  $I_{1M}$  и  $I_{2M}$  — квадратично и логарифмически расходящиеся интегралы, соответственно:

Письма в ЖЭТФ том 112 вып. 7-8 2020

$$I_{2M} = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{\Theta(\Lambda_M^2 + k^2)}{(M_\rho^2 - k^2)(M_\pi^2 - k^2)} d^4k = = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{M_\rho^2 - M_\pi^2} \times \times \left[ M_\rho^2 \ln\left(\frac{\Lambda_M^2}{M_\rho^2} + 1\right) - M_\pi^2 \ln\left(\frac{\Lambda_M^2}{M_\pi^2} + 1\right) \right], I_{1M} = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int \frac{\Theta(\Lambda_M^2 + k^2)}{(M_\rho^2 - k^2)} d^4k = = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \Lambda_M^2 - M_\rho^2 \ln\left(\frac{\Lambda_M^2}{M_\rho^2} + 1\right) \right],$$
(9)

где  $\Lambda_M$  – параметр обрезания по импульсу мезонной петли.

Тогда амплитуда рассматриваемого процесса электрон-позитронной аннигиляции принимает вид:

$$M(e^{+}e^{-} \to \pi\pi) = -\frac{4\pi\alpha_{em}}{s} \left[ 1 + \frac{s}{M_{\rho}^{2} - s - i\sqrt{s}\Gamma_{\rho}} + \frac{s^{2}}{9} \frac{g_{\rho}^{2} \left[ I_{2}(u) - I_{2}(d) \right]}{\left[ M_{\rho}^{2} - s - i\sqrt{s}\Gamma_{\rho} \right] \left[ M_{\omega}^{2} - s - i\sqrt{s}\Gamma_{\omega} \right]} \right] \times \left\{ 1 + g_{\rho}^{2} \left[ \frac{I_{1M}}{M_{\rho}^{2}} + \left( 1 + \frac{4M_{\pi}^{2} - s}{2M_{\rho}^{2}} \right) I_{2M} \right] \right\} \times L_{\mu}^{em}(p_{+} - p_{-})^{\mu},$$
(10)

где  $\alpha_{em} \approx 1/137$  – постоянная тонкой структуры,  $s = (p_+ + p_-)^2$ ,  $L_{\mu}^{em} = \bar{e}^- \gamma_{\mu} e^-$  – электромагнитный лептонный ток.

Третье слагаемое в первых квадратных скобках соответствует вкладу от промежуточного  $\omega$ -мезона, переходящего в  $\rho$ -мезон через кварковую петлю. Здесь в амплитуде возникает разность  $I_2(u) - I_2(d)$ , где  $I_2(u)$  и  $I_2(d)$  – интегралы вида (4) с u- и d-кварковыми массами, соответственно. В данном случае разницей масс этих кварков пренебрегать нельзя, и при вычислениях использовалось значение  $m_d - m_u = 4$  МэВ, полученное в рамках модели НИЛ при описании распада  $\omega \to \pi\pi$  и разницы масс заряженных и нейтральных пионов [3].

По экспериментально известной зависимости сечения данного процесса от энергии сталкивающихся лептонов можно зафиксировать параметр обрезания по импульсу мезонной петли  $\Lambda_M = 860$  МэВ. Зависимость, полученная при данном значении параметра обрезания, показана на рис. 5 в сравнении с экспериментальными данными [21]. Видно, что учет взаимодействий в конечном состоянии оказался количественно очень важным именно вблизи пика, соответствующего резонансу  $\rho$ -мезона.

4. Процесс  $\tau^- \to \pi^- \pi^0 \nu_{\tau}$ . Диаграммы Фейнмана процесса  $\tau^- \to \pi^- \pi^0 \nu_{\tau}$  без учета взаимодействия в конечном состоянии приведены на рис. 6, 7.



Рис. 5. (Цветной онлайн) Сечение процесса  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  в зависимости от энергии в системе центра масс. Экспериментальные точки взяты из работы [21]. Пунктирная кривая получена без вклада взаимодействий в конечном состоянии, а сплошная с его учетом

Мезонный треугольник, необходимый для учета взаимодействия пионов в конечном состоянии, приведен на рис. 8.



Рис. 6. Контактная диаграмма процесса  $\tau^- \to \pi^- \pi^0 \nu_{\tau}$ 



Рис. 7. Диаграмма процесса  $\tau^- \to \pi^- \pi^0 \nu_\tau$  с промежуточным  $\rho$ -мезоном



Рис. 8. Взаимодействие пионов во конечном состоянии в случае распада *т*-лептона

Этот треугольник приводит к интегралу того же вида, что и в случае процесса  $e^+e^-$ -аннигиляции, рассмотренного выше. Амплитуда рассматриваемого процесса распада  $\tau$ -лептона принимает вид:

$$M(\tau \to \pi \pi \nu) = -G_F V_{ud} \left[ 1 + \frac{s}{M_\rho^2 - s - i\sqrt{s}\Gamma_\rho} \right] \times \\ \times \left\{ 1 + g_\rho^2 \left[ \frac{I_{1M}}{M_\rho^2} + \left( 1 + \frac{4M_\pi^2 - s}{2M_\rho^2} \right) I_{2M} \right] \right\} \times \\ \times L_\mu^{\text{weak}} \left( p_- - p_0 \right)^\mu, \tag{11}$$

где  $G_{F^{-}}$  константа Ферми,  $V_{ud}$  – элемент матрицы Кабиббо–Кобаяши–Маскавы,  $L_{\mu}^{\text{weak}} = \bar{\nu}_{\tau} \gamma_{\mu} \left(1 - \gamma^{5}\right) \tau^{-}$  – слабый лептонный ток. Первое

Письма в ЖЭТФ том 112 вып. 7-8 2020

слагаемое в первых квадратных скобках соответствует контактному вкладу, т.е. вкладу диаграмм без перехода W-бозона в промежуточные мезоны. Второе слагаемое — вкладу с промежуточным  $\rho$ -мезоном. Первое слагаемое в фигурных скобках соответствует диаграмме без взаимодействия пионов в конечном состоянии.

В итоге для определенного в предыдущем разделе параметра обрезания мезонной петли находим парциальную ширину данного распада:

$$Br(\tau \to \pi \pi \nu) = (25.0 \pm 1.2) \%, \tag{12}$$

где теоретическая неопределенность ~5% оценена по результатам сравнения предсказаний киральной  $U(2) \times U(2)$  модели НИЛ с экспериментальными данными по взаимодействию мезонов, состоящих только из легких кварков [3]. Теоретическая неопределенность связана с эффектами, нарушающими киральную симметрию, и ограниченностью ведущего по  $1/N_c$  приближения модели. Экспериментальное значение ширины этого распада [15]

$$Br(\tau \to \pi \pi \nu)_{exp} = (25.49 \pm 0.09) \%.$$
(13)

Без учета взаимодействия в конечном состоянии стандартная модель НИЛ предсказывала для этого распада парциальную ширину приблизительно 17 %. Видно, что как и в случае электрон-позитронной аннигиляции в два пиона, учет обмена пионов *р*мезоном позволил получить удовлетворительное согласие с экспериментальными данными и для рассматриваемого распада.

5. Заключение. Таким образом, мы показали, что в рассмотренных процессах учет взаимодействия в конечном состоянии играет очень важную роль. Последнее обусловлено тем, что в данных процессах пионы рождаются в Р-волне, что дает им возможность обменяться *р*-мезоном, константы взаимодействия с которым велики. Также большой вклад взаимодействия в конечном состоянии обусловлен относительной малостью энергии и близостью к порогу рождения пионов. Удовлетворительное согласие с экспериментальными данными для обоих случаев подтверждает применимость гипотезы сохранения векторного тока.

Адекватное описание взаимодействий мезонов в конечном состоянии невозможно в рамках стандартной модели НИЛ, так как она сформулирована в низшем порядке по  $1/N_c$ . Тогда как учет взаимодействия пионов в конечном состоянии требует выхода за рамки этого приближения, что и было сделано в настоящей работе. По известным эксперимен-

 $\mathbf{5}$ 

тальным данным для процесса  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  было получено значение параметра обрезания мезонной петли, описывающей взаимодействие пионов в конечном состоянии. В результате удалось описать распад  $\tau^- \rightarrow \pi^-\pi^0 \nu_{\tau}$  в удовлетворительном согласии с экспериментом.

В данной работе мы ограничились рассмотрением области относительно малых инвариантных масс пары пионов вблизи пика  $\rho$ -мезона, в которой вклад взаимодействий в конечном состоянии оказался существенным. Понятно, что в процессе электронпозитронной аннигиляции в два пиона при энергиях выше 1 ГэВ будет необходимо учесть и вклады возбужденных состояний мезонов, в первую очередь,  $\rho(1450)$ -мезона, что можно сделать в рамках расширенной модели НИЛ [5–7]. Однако в рассмотренной здесь области энергий мы эффективно включаем эти вклады в обсуждавшуюся выше оценку теоретической неопределенности стандартной модели НИЛ.

- Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
- 2. D. Ebert and M.K. Volkov, Z. Phys. C 16, 205 (1983).
- 3. M. K. Volkov, Sov. J. Part. Nucl. 17, 186 (1986).
- D. Ebert and H. Reinhardt, Nucl. Phys. B 271, 188 (1986).
- 5. M. K. Volkov and C. Weiss, Phys. Rev. D 56, 221 (1997).
- 6. M. K. Volkov, Phys. Atom. Nucl. 60, 1920 (1997).
- M. K. Volkov, D. Ebert, and M. Nagy, Int. J. Mod. Phys. A 13, 5443 (1998).
- M. K. Volkov and A. B. Arbuzov, Phys. Part. Nucl. 47, 489 (2016).
- M. K. Volkov and A. B. Arbuzov, Phys.-Uspekhi 60, 643 (2017).
- M. K. Volkov and A. A. Pivovarov, JETP Lett. 108, 347 (2018).
- M. K. Volkov, A. A. Pivovarov, and K. Nurlan, Eur. Phys. J. A 55, 165 (2019).
- M. K. Volkov and A. A. Pivovarov, JETP Lett. **110**, 237 (2019).
- M. K. Volkov, A. A. Pivovarov, and K. Nurlan, Nucl. Phys. A **1000**, 121810 (2020).
- M. K. Volkov, A. A. Pivovarov, and K. Nurlan, Int. J. Mod. Phys. A 35, 2050035 (2020).
- M. Tanabashi, K. Hagiwara, K. Hikasa et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D 98, 030001 (2018).
- J.H. Kuhn and A. Santamaria, Z. Phys. C 48, 445 (1990).
- E. Bartos, S. Dubnicka, A.Z. Dubnickova, and H. Hayashii, Int. J. Mod. Phys. A **32**, 1750154 (2017).
- 18. J.A. Miranda and P. Roig, JHEP 11, 038 (2018).

- L. R. Dai, R. Pavao, S. Sakai, and E. Oset, Eur. Phys. J. A 55, 20 (2019).
- 20. M. Benayoun, EPJ Web Conf. 118, 01001 (2016).
- M. N. Achasov, K. I. Beloborodov, A. V. Berdyugin et al. (Collaboration), JETP 101(6), 1053 (2005).
- S. Schael, R. Barate, R. Bruneliere et al. (ALEPH), Phys. Rep. 421, 191 (2005).
- M. Fujikawa, H. Hayashii, S. Eidelman et al. (Belle), Phys. Rev. D 78, 072006 (2008).
- S. Actis, A. Arbuzov, G. Balossini et al. (Working Group on Radiative Corrections and Monte Carlo Generators for Low Energies), Eur. Phys. J. C 66, 585 (2010).

- M. Dax, T. Isken, and B. Kubis, Eur. Phys. J. C 78, 859 (2018).
- 26. S. Weinberg, Physica A 96, 327 (1979).
- J. Gasser and H. Leutwyler, Annals Phys. 158, 142 (1984).
- 28. T.N. Truong, Phys. Rev. Lett. 67, 2260 (1991).
- A.G. Nicola, J.R. Pelaez, and G. Rios, Phys. Rev. D 77, 056006 (2008).
- D. Ebert, T. Feldmann, and M. K. Volkov, Int. J. Mod. Phys. A 12, 4399 (1997).
- M. K. Volkov, E. A. Kuraev, and Y. M. Bystritskiy, Central Eur. J. Phys. 8, 580 (2010).