

Электромагнитный эффект близости и ЛОФФ неустойчивость в гибридных структурах сверхпроводник–ферромагнетик (Миниобзор)

С. В. Миронов⁺, А. В. Самохвалов⁺, А. И. Буздин^{+*}, А. С. Мельников⁺¹⁾

⁺Институт физики микроструктур РАН, 603950 Н. Новгород, Россия

^{*}University Bordeaux, LOMA UMR-CNRS 5798, F-33405 Talence Cedex, France

Поступила в редакцию 17 ноября 2020 г.

После переработки 17 ноября 2020 г.

Принята к публикации 23 ноября 2020 г.

В работе представлен обзор недавних теоретических идей, посвященных механизму электромагнитного эффекта близости в гибридных сверхпроводящих структурах с ферромагнитными слоями, а также проблеме неустойчивости типа Ларкина–Овчинникова–Фульде–Феррелла (ЛОФФ) с модуляцией сверхпроводящего параметра порядка в плоскости слоев структуры. Показано, что вблизи перехода в фазу ЛОФФ электромагнитный эффект близости может быть усилен: соответствующий спонтанный ток, текущий по сверхпроводящему слою гибридной структуры сверхпроводник–ферромагнетик, резко возрастает при приближении к линии ЛОФФ перехода на фазовой диаграмме структуры. Переход в фазу ЛОФФ, таким образом, может быть обнаружен экспериментально методами, диагностирующими генерацию спонтанных токов.

DOI: 10.31857/S1234567821020051

1. Введение. Нетривиальная физика эффекта близости в гибридных структурах сверхпроводник–ферромагнетик (СФ), связанная в значительной мере с влиянием обменного поля на спины электронов в куперовских парах, приводит к ряду необычных и интересных явлений, которые принято объединять термином “сверхпроводящая спинтроника” [1, 2]. Среди работ, посвященных этим эффектам, можно упомянуть теоретические предсказания джозефсоновских π -контактов [3–5], их первую экспериментальную реализацию [6] и дальнейшие исследования в [7–9], работы по изучению немонотонной зависимости критической температуры СФ структур от толщины ферромагнитного слоя [10, 11], локального увеличения плотности электронных состояний на уровне Ферми [12–15], эффекта сверхпроводящего спинового вентиля [16–30] и др. Подробные обзоры этих вопросов можно найти в работах [31–36]. В данной небольшой статье мы не можем претендовать на полное освещение этой обширной и бурно развивающейся области физики конденсированных сред. Вместо этого мы сосредоточимся на обзоре сравнительно недавних работ, имеющих прямое отношение к исследованиям электродинамического отклика таких структур, которые являются одним из эффек-

тивных методов изучения различных фазовых переходов, вызванных взаимодействием двух конкурирующих параметров порядка в СФ системах с эффектом близости.

Электродинамика СФ структур имеет ряд важных отличий от классической электродинамики обычных сверхпроводников, в основе которой лежит лондоновская материальная связь

$$\mathbf{j}_s = -\frac{c}{4\pi\lambda^2}\mathbf{A} \quad (1)$$

между сверхпроводящим током \mathbf{j}_s и векторным потенциалом \mathbf{A} . Здесь λ – лондоновская глубина проникновения магнитного поля. Основной особенностью эффекта близости (проникновения куперовских пар из сверхпроводника в ферромагнетик) в СФ системах является конверсия синглетных сверхпроводящих корреляций в триплетные, происходящая вследствие воздействия обменного поля ферромагнетика на спины электронов в куперовской паре [31–33]. При этом в СФ структурах с неоднородным распределением обменного поля триплетные корреляции могут быть дальнедействующими, т.е. проникать вглубь ферромагнетика на масштабы, существенно превышающие масштабы проникновения обычных синглетных корреляций [37, 38]. Одним из удивительных свойств триплетных корреляций является

¹⁾e-mail: melnikov@ipmras.ru

их необычный вклад в сверхпроводящий ток, который является парамагнитным в отличие от диамагнитного вклада от синглетных куперовских пар. В результате упомянутое выше соотношение $\mathbf{j}_s(\mathbf{A})$ изменяется за счет присутствия неоднородных диамагнитных и парамагнитных вкладов в величину λ^{-2} , которая теперь становится зависящей от координат. Заметим, что в грязном пределе материальная связь $\mathbf{j}_s(\mathbf{A})$ остается локальной.

Большинство экспериментальных методов позволяет провести измерение лишь интегрального магнитного отклика структуры. Данный отклик определяется эффективной глубиной проникновения магнитного поля Λ , которая получается усреднением локального отклика по толщине слоистой структуры: $\Lambda^{-1} = \int \lambda^{-2} dx$ (x – координата поперек структуры) [39–42]. При температуре T , близкой к критической температуре T_c , эффективная глубина проникновения магнитного поля Λ определяется средней плотностью синглетных $\langle n_s \rangle$ и триплетных $\langle n_t \rangle$ пар: $\Lambda^{-1} \propto \langle n_s \rangle - \langle n_t \rangle$. Здесь угловые скобки означают усреднение по толщине слоистой СФ структуры. Поскольку поведение синглетных и триплетных сверхпроводящих корреляций в ферромагнетике существенно отличается, локальная плотность сверхтока может стать локально парамагнитной в тех местах, где триплетные корреляции преобладают ($\langle n_s \rangle < \langle n_t \rangle$) [37, 43, 44]. При этом локальная смена знака электродинамического отклика с диамагнитного на парамагнитный очевидным образом приводит к подавлению диамагнетизма в интегральном отклике. Важно отметить, что при этом потеря устойчивости сверхпроводящего состояния, однородного в плоскости слоев, не позволяет изменить знак полного интегрального отклика: вместо такой смены знака происходит образование неоднородной сверхпроводящей фазы, аналогичной состоянию Ларкина–Овчинникова–Фюльде–Феррелла (ЛОФФ) с модуляцией сверхпроводящего параметра порядка в плоскости слоев структуры [45–47]. Подобная продольная ЛОФФ неустойчивость в гибридных СФ структурах с неодносвязной геометрией (например, полый сверхпроводящий цилиндр с ферромагнитной сердцевинной) приводит к формированию в них неоднородных вихревых состояний с различным значением орбитального момента и к фазовым переходам между такими состояниями [48–51]. Также ЛОФФ неустойчивость может возникать в планарных гибридных структурах сверхпроводник–нормальный металл с неравновесным распределением квазичастиц [52, 53], которое, как известно, может приводить и к формированию π -контактов [54].

Описанные выше электромагнитные явления являются следствиями прямого эффекта близости в СФ структурах, который связан с проникновением куперовских пар из сверхпроводника в ферромагнетик. Вместе с тем эффект близости вызывает и обратное явление – проникновение магнитного момента из ферромагнетика в сверхпроводник. Существуют два основных механизма возникновения магнетизма в сверхпроводнике. Первый связан со спиновой поляризацией электронов, образующих куперовскую пару вблизи СФ границы (так называемый обратный эффект близости) [55–60]. Результирующая намагниченность индуцируется в поверхностном слое сверхпроводника шириной порядка размера куперовской пары, то есть корреляционной длины $\xi_0 \sim 1$ –10 нм. Второй механизм является чисто электромагнитным: прямой эффект близости возбуждает сверхпроводящий ток, текущий внутри ферромагнитного слоя, и, как следствие, компенсирующие мейснеровские токи внутри сверхпроводника (электромагнитный эффект близости) [61, 62]. Некоторые замечания, касающиеся возможности протекания подобных экранирующих токов вне ферромагнетика были высказаны также ранее в работах [63, 64]. Сверхпроводящие токи, индуцированные за счет электромагнитного эффекта близости, являются источником магнитного поля в сверхпроводнике, которое спадает на масштабе порядка лондоновской глубины λ . В сверхпроводниках второго рода этот масштаб существенно превышает ξ_0 , что делает электромагнитный эффект близости дальнедействующим по сравнению с обратным эффектом близости. При этом соотношение между величинами магнитного поля, возникающего на СФ границе вследствие двух описанных механизмов, существенно зависит от природы магнетизма в Φ слое. Так, если рассматривать модель, в которой магнитный момент ферромагнетика обусловлен лишь электронами проводимости, вклад от обратного эффекта близости может быть существенным [65], тогда как для типичных ферромагнетиков, в которых магнитный момент формируется преимущественно за счет взаимодействия спина электронов с локализованными моментами, электромагнитный эффект близости оказывается доминирующим [62].

Экспериментально пространственное распределение магнитного поля в СФ структурах может быть определено с помощью мюонной спиновой спектроскопии [66–70] или экспериментов по рассеянию нейтронов [71–75]. В ряде соответствующих работ было обнаружено, что магнитное поле в сверхпроводящем слое проникает на длину, существенно пре-

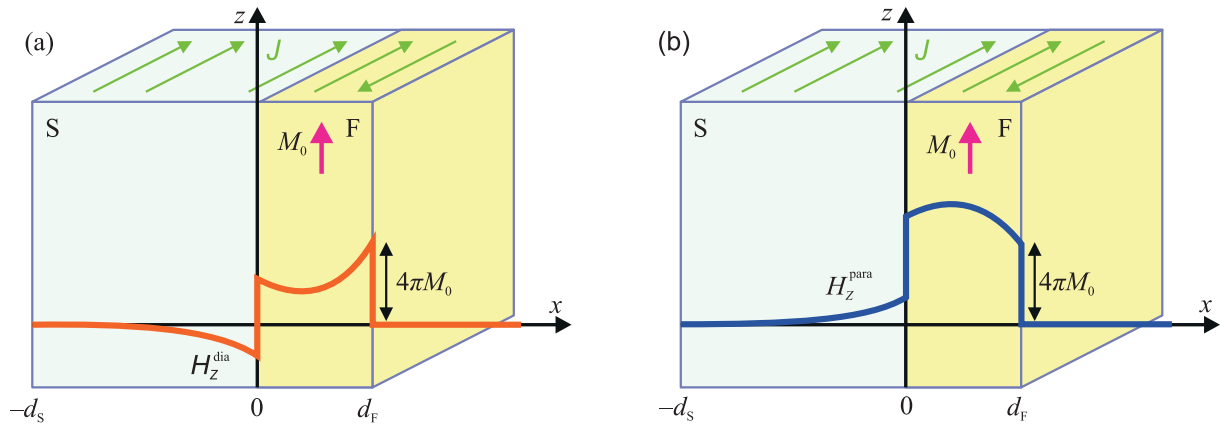


Рис. 1. (Цветной онлайн) Схематическое изображение спонтанного магнитного поля, возникающего в бислое СФ из-за электромагнитного эффекта близости, в случаях, когда интегральный сверхпроводящий ток в ферромагнетике: (а) – диамагнитный; (б) – парамагнитный

вышающую все типичные сверхпроводящие корреляционные длины, что может быть следствием электромагнитного эффекта близости. Важно отметить, что электромагнитный эффект близости возникает даже в структурах, где в силу специального выбора формы ферромагнетика при температурах выше сверхпроводящего фазового перехода отсутствуют поля рассеяния (например, в слоистых СФ структурах с однородной намагниченностью в плоскости Ф слоя). Таким образом, электромагнитный эффект близости необходимо учитывать при проектировании устройств сверхпроводящей спинтроники, в которых возникающее магнитное поле может приводить к существенной модификации рабочих режимов.

Дальнейшее описание нетривиальной электродинамики СФ структур построено следующим образом. В разделе 2 мы обсудим основные характеристики электродинамического эффекта близости. Раздел 3 посвящен обсуждению проблемы парамагнитного отклика и возникающей в результате неустойчивости типа ЛОФФ с модуляцией сверхпроводящего параметра порядка в плоскости слоев структуры. Раздел 4 является в некотором смысле объединяющим для рассмотренных типов явлений: в нем мы анализируем поведение электродинамического эффекта близости вблизи порога ЛОФФ неустойчивости.

2. Электромагнитный эффект близости в гибридных структурах сверхпроводник–ферромагнетик. Простейшей физической системой, в которой возникает электромагнитный эффект близости, является СФ бислоем (см. рис. 1). Будем предполагать, что намагниченность $\mathbf{M} = M_0 \mathbf{e}_z$ в ферромагнетике направлена вдоль межслоевой границы (вдоль оси z). При этом если эффект

близости подавлен (граница между С и Ф слоями не прозрачна для электронов), то магнитное поле вне ферромагнитного слоя отсутствует.

Рассмотрим теперь более подробно случай развитого эффекта близости (граница между С и Ф слоями прозрачна для электронов). Уравнение Максвелла для векторного потенциала внутри структуры может быть записано в следующем общем виде:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_s + \mathbf{j}_m), \quad (2)$$

где \mathbf{j}_s – сверхпроводящий мейсснеровский ток, а $\mathbf{j}_m = c \text{rot } \mathbf{M}$ – ток намагниченности, текущий по границам ферромагнетика. Будем предполагать, что толщина сверхпроводника существенно больше лондоновской длины λ , в то время как толщина ферромагнетика $d_f \ll \lambda$. Также для простоты ограничимся детальным рассмотрением лишь случая локальной связи $\mathbf{j}_s(\mathbf{A})$, характерной для систем в грязном пределе:

$$\mathbf{j}_s(x) = -\frac{c}{4\pi} \frac{1}{\lambda^2(x)} \mathbf{A}, \quad (3)$$

где лондоновская длина зависит от координаты x поперек слоев (будем считать, что граница между С и Ф слоями соответствует плоскости $x = 0$, причем Ф слой находится в области $x > 0$). Отметим, что проникновение сверхпроводящих корреляций внутрь ферромагнетика приводит к тому, что в Ф слое $\lambda^{-2}(x) \neq 0$. Кроме того, из-за эффекта близости возникает небольшое локальное изменение величины λ^{-2} вблизи границы между слоями со стороны сверхпроводника. Пространственный масштаб такого изменения имеет порядок сверхпроводящей длины когерентности ξ , при этом поправка к λ^{-2} существенно подавляется при уменьшении проводимости фер-

ромагнетика по сравнению с проводимостью сверхпроводника. Данные обстоятельства позволяют пренебречь поправкой к λ^{-2} внутри сверхпроводника и считать лондоновскую длину в С слое константой λ_0 . В этом случае уравнение Максвелла (2) имеет решение $A_y(x) = A_0 \exp(x/\lambda_0)$ внутри сверхпроводника и $A_y(x) = A_0 + 4\pi M_0 x$ внутри ферромагнетика (при записи решения внутри Ф слоя мы учли, что $d_f \ll \lambda$). Константу A_0 проще всего найти, проинтегрировав уравнение (2) по толщине ферромагнетика с учетом связи магнитного поля \mathbf{B} с векторным потенциалом: $B_z = \partial A_y / \partial x$. Предполагая, что внешнее магнитное поле отсутствует, так что $B_z(d_f) = 0$, получаем:

$$B_z(0) = -4\pi M_0 \int_0^{d_f} \frac{x' dx'}{\lambda^2(x')} - A_0 \int_0^{d_f} \frac{dx'}{\lambda^2(x')}. \quad (4)$$

При этом из решения уравнения Максвелла внутри С слоя следует, что $A_0 = B_z(0)\lambda_0$, поэтому второе слагаемое в правой части выражения (4) имеет порядок $(d_f/\lambda_0)B_z(0) \ll B_z(0)$ и им можно пренебречь. Итоговое выражение для спонтанного магнитного поля, возникающего в сверхпроводнике, приобретает вид:

$$B_z(x) = -4\pi M_0 Q \exp(x/\lambda_0), \quad (5)$$

где $Q = \int_0^{d_f} \lambda^{-2}(x')x' dx'$. Аккуратный вывод выражения для Q может быть проделан в рамках микроскопической теории (например, теории Узаделя для систем в грязном пределе) [61].

Важной особенностью электромагнитного эффекта близости является осцилляторная зависимость величины Q , определяющей возникающее в сверхпроводнике магнитное поле, от толщины ферромагнитного слоя d_f . Данный эффект связан с пространственными осцилляциями синглетной и триплетной компонент сверхпроводящих корреляций в ферромагнетике, которые приводят к знакопеременному профилю магнитного ядра λ^{-2} в соотношении $\mathbf{j}_s(\mathbf{A})$. В результате направление интегрального тока в ферромагнетике определяется отношением его толщины к корреляционной длине $\xi_f = (\hbar D/\hbar)^{1/2}$ (D – коэффициент диффузии в ферромагнетике, \hbar – обменное поле) и может быть как диамагнитным, так и парамагнитным. Соответственно, индуцированное в сверхпроводнике магнитное поле может быть направлено как антипараллельно, так и параллельно магнитному моменту ферромагнетика (см. рис. 1).

Интересно отметить, что электромагнитный эффект близости существенно усиливается, если ферромагнетик состоит из двух слоев с неколлинеарны-

ми магнитными моментами. В этом случае проникновение куперовских пар в Ф слой сопровождается генерацией дальнедействующих триплетных корреляций, которые не чувствительны к обменному полю и могут проникать вглубь ферромагнетика на расстояния, существенно превышающие длину когерентности ξ_f . Для структур с толщиной внешнего ферромагнитного слоя, существенно превышающей ξ_f , возникновение дальнедействующих триплетных корреляций приводит к значительному усилению интегрального сверхпроводящего тока, текущего по Ф слою, что, в свою очередь, вызывает увеличение амплитуды спонтанного магнитного поля в сверхпроводящем слое. В результате, спонтанное магнитное поле максимально для перпендикулярной взаимной ориентации магнитных моментов в ферромагнитных слоях и минимально для параллельных. Микроскопические расчеты, выполненные в рамках теории Узаделя для грязных сверхпроводников и теории Эйленбергера для чистых, полностью подтверждают приведенные качественные соображения [62].

Остановимся теперь более подробно на способах экспериментального обнаружения электромагнитного эффекта близости. Одними из наиболее информативных методов изучения спонтанных магнитных полей в СФ структурах являются исследования рассеяния спин-поляризованных нейтронов и мюонов. Преимуществом данных методик является возможность реконструкции зависимости магнитного поля от координаты поперек СФ структуры. К настоящему моменту известно несколько экспериментальных работ (см., например, [67–69, 71–73]), в которых наблюдалось возникновение дальнедействующих магнитных полей в широком классе СФ структур: V/Fe, Au/Nb/ферромагнетик, Cu/Nb/Co, YBaCuO/LaCaMnO и др. Масштаб спадающего магнитного поля вглубь сверхпроводника до 5 раз превышает длину когерентности в используемых материалах, что может свидетельствовать о доминирующем электромагнитном эффекте близости в данных системах. Более того, в эксперименте [67] для СФ системы с композитным ферромагнетиком, состоящим из двух слоев с различным направлением магнитных моментов, было показано, что амплитуда возникающего в сверхпроводнике магнитного поля максимальна для перпендикулярной магнитной конфигурации Ф слоя, что согласуется с описанными выше теоретическими расчетами [62]. Дальнейшие более детальные эксперименты по изучению профилей проникновения внешнего магнитного поля в структуры Cu/Nb и Cu/Nb/Co продемонстрировали существенное усиление мейсснеровских токов

при наличии слоя Co , а также качественные различия профилей магнитного поля в $\text{Cu}/\text{Co}/\text{Cu}/\text{Nb}/\text{Co}$ структурах в случаях параллельного и антипараллельного направления магнитных моментов в слоях кобальта, характерные для электромагнитного эффекта близости [69, 70].

Электромагнитный эффект близости в СФ бислоях может также проявляться в транспортных измерениях, если толщина сверхпроводника меньше или сравнима с лондоновской длиной λ . В этом случае по внешней границе сверхпроводящего слоя течет спонтанный ток, который может детектироваться различными транспортными зондами. Так, при сканировании внешней поверхности сверхпроводника нормальным (несверхпроводящим) зондом сканирующего туннельного микроскопа может обнаружиться изменение локальной плотности состояний, связанное с доплеровским сдвигом в спектре квазичастиц из-за протекающего по поверхности структуры сверхпроводящего тока. В случае же использования сверхпроводящего зонда электромагнитный эффект близости может приводить к сдвигу фраунгоферовской зависимости критического тока джозефсоновского контакта, образованного С слоем и зондом микроскопа, от внешнего магнитного поля [61, 62]. Величина сдвига равна величине спонтанного магнитного поля на внешней границе сверхпроводника. При этом последовательно прикладывая внешнее магнитное поле, направленное вдоль двух перпендикулярных направлений в плоскости СФ системы, оказывается возможным определить как модуль, так и направление спонтанного поля.

Наконец, магнитное поле, возникающее в СФ структурах из-за электромагнитного эффекта близости, может приводить к дальнедействующему взаимодействию магнитных моментов двух ферромагнитных слоев, разделенных слоем сверхпроводника толщиной порядка лондоновской длины λ . Свободная энергия такой трехслойной $\Phi_1/\text{C}/\Phi_2$ системы имеет вид

$$F = \int \left[\frac{(\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M})^2}{8\pi} + \frac{\mathbf{A}^2}{8\pi\lambda^2} \right] dx, \quad (6)$$

где $\mathbf{B}(x)$ – магнитное поле внутри структуры, а $\mathbf{M}(x)$ – зависимость намагниченности от координаты поперек структуры: $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1$ внутри слоя Φ_1 , $\mathbf{M} = \mathbf{M}_2$ внутри слоя Φ_2 и $\mathbf{M} = 0$ в сверхпроводнике). Проникновение сверхпроводящих корреляций в ферромагнетик Φ_1 приводит к возникновению магнитного поля внутри сверхпроводника, направленного параллельно или антипараллельно намагниченности \mathbf{M}_1 в зависимости от соотношения между толщи-

ной слоя Φ_1 и корреляционной длиной ξ_f . В случае, если толщина сверхпроводящего слоя меньше или порядка λ , индуцированное магнитное поле проникает внутрь ферромагнетика Φ_2 . При этом из-за наличия слагаемого $\propto \mathbf{B} \cdot \mathbf{M}$ в выражении (6) магнитная энергия системы начинает зависеть от взаимной ориентации намагниченности \mathbf{M}_2 и поля, индуцированного ферромагнетиком Φ_1 в области слоя Φ_2 . В результате минимум энергии системы соответствует либо ферромагнитному, либо антиферромагнитному упорядочению магнитных моментов в двух ферромагнитных слоях. Конкретный тип упорядочения определяется толщинами Φ слоев. Так, например, в случае диамагнитных сверхпроводящих токов, текущих внутри ферромагнитных слоев, выгодным оказывается антиферромагнитное упорядочение магнитных моментов.

Таким образом, электромагнитный эффект близости в СФ структурах приводит к широкому набору магнитных и транспортных явлений, которые существенно модифицируют электродинамические свойства таких систем. При этом нужно учитывать, что возникновение магнитного поля внутри сверхпроводника на значительных расстояниях от границы с ферромагнетиком, будучи интересным фундаментальным явлением, может оказывать негативное влияние на работу ряда элементов сверхпроводящей электроники и спинтроники. Традиционно подобные элементы проектируются таким образом, чтобы минимизировать магнитные поля рассеяния, создаваемые ферромагнетиком в области сверхпроводника (например, путем создания планарной структуры с намагниченностью в плоскости слоев). Однако, в отличие от классического орбитального механизма влияния магнитного порядка на сверхпроводимость, дальнедействующие токи и поля, индуцированные за счет электромагнитного эффекта близости, не могут быть исключены простым выбором ориентации намагниченности в ферромагнетике. Кроме того, величина и направление таких полей оказывается предельно чувствительна к толщине ферромагнитных слоев, что усложняет задачу минимизации полей в области сверхпроводника.

3. Парамагнитный вклад в электродинамический отклик и ЛОФФ неустойчивость в гибридных структурах сверхпроводник–ферромагнетик. Эффект Мейсснера – выталкивание внешнего магнитного поля из объема образца – является одной из ключевых особенностей сверхпроводников. Физически данный эффект связан с необычным лондоновским соотношением (1), в котором обратный квадрат лондоновской глубины

проникновения магнитного поля $\lambda^{-2} = 4\pi e^2 n_s / (mc^2)$ определяется плотностью сверхпроводящих электронов n_s (m и e – масса и заряд электрона). При этом положительность величин n_s и m фиксирует диамагнитный характер мейсснеровского отклика сверхпроводников. Вместе с тем в многослойных СФ структурах с эффектом близости возникающая спин-триплетная компонента сверхпроводящего конденсата, имеющая плотность n_t , вносит парамагнитный вклад в мейсснеровский отклик, и соотношение для лондоновской глубины модифицируется:

$$\lambda^{-2} = \frac{4\pi e^2 (n_s - n_t)}{mc^2}. \quad (7)$$

Для расчета величин n_s и n_t традиционно используются микроскопические подходы, основанные на теории Узаделя (Эйленбергер) для систем в грязном (чистом) пределе. Данные расчеты показывают, что при уменьшении толщины сверхпроводящего слоя полный диамагнитный отклик СФ структуры становится подавленным [37, 43, 44]. При этом в случае, когда проводимость ферромагнетика является достаточно большой, интегральный мейсснеровский ток, текущий вдоль слоев, может обратиться в нуль. Вопрос о свойствах сверхпроводящего состояния, возникающего при дальнейшем уменьшении толщины сверхпроводника, является нетривиальным. Формальный расчет показывает, что в этом случае $\langle n_t \rangle > \langle n_s \rangle$, что, на первый взгляд, должно было бы означать смену знака мейсснеровского отклика с диамагнитного на парамагнитный. Однако нетрудно убедиться, что для структур, толщина которых много меньше λ , подобная смена знака невозможна [45]. Действительно, рассмотрим планарную СФ систему площадью S (толщина структуры предполагается много меньше ее латеральных размеров). Пусть x – координата поперек слоев, а векторный потенциал направлен в плоскости слоев. Тогда, рассматривая локальную плотность сверхпроводящего тока (1) с лондоновской глубиной (7) как вариационную производную свободной энергии F_A по векторному потенциалу $\mathbf{j}_s = -c \delta F_A / \delta \mathbf{A}$, мы можем восстановить вид части функционала свободной энергии, зависящей от векторного потенциала. Вводя фазу φ сверхпроводящего параметра порядка, мы можем записать эту часть функционала в калибровочно-инвариантном виде:

$$F_A = S \int \frac{e^2 (n_s - n_t)}{2mc^2} \left(\mathbf{A} - \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \varphi \right)^2 dx, \quad (8)$$

где Φ_0 – квант магнитного потока. Для СФ структур с толщиной d_0 много меньше λ неоднородностью век-

торного потенциала в направлении поперек структуры можно пренебречь, так что соответствующий множитель в (8) может быть вынесен за знак интеграла:

$$F_A = \left(\mathbf{A} - \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \varphi \right)^2 V \frac{e^2}{2mc^2} (\langle n_s \rangle - \langle n_t \rangle), \quad (9)$$

где $V = Sd_0$ – объем системы. Из (9) видно, что в случае $\langle n_s \rangle > \langle n_t \rangle$ минимум свободной энергии соответствует состоянию, в котором $\varphi = \text{const}$ и $\mathbf{A} = 0$. В то же время, если $\langle n_s \rangle < \langle n_t \rangle$, то пространственно однородное сверхпроводящее состояние оказывается неустойчивым относительно возникновения модуляции фазы параметра порядка $\varphi = \mathbf{k} \mathbf{r}_{\parallel}$ в плоскости СФ структуры (здесь \mathbf{r}_{\parallel} – радиус-вектор в плоскости слоев СФ системы): состояние с $\mathbf{k} \neq 0$ в отсутствии магнитного поля обладает меньшей энергией по сравнению с состоянием с $\mathbf{k} = 0$. Результирующее неоднородное состояние аналогично состояниям ЛОФФ, предсказанным для тонких сверхпроводящих пленок во внешнем параллельном магнитном поле. В то время как классическое состояние ЛОФФ возникает из-за сильного зеемановского расщепления спиновых подзон в спектре электронов во внешнем магнитном поле, продольное состояние ЛОФФ в СФ бислоях формируется под действием обменного поля в ферромагнетике на спины электронов, образующих куперовскую пару и проникающих в Φ слой вследствие эффекта близости.

Следует отметить, что продольные состояния ЛОФФ в СФ системах обладают рядом свойств, не характерных для классической фазы ЛОФФ в сверхпроводящих пленках [45, 46]. Во-первых, модуляционная неустойчивость в СФ системах может возникать в грязном пределе, тогда как классическая фаза ЛОФФ разрушается беспорядком. Во-вторых, формирование неоднородных состояний в СФ системах может происходить при температурах, близких к критической температуре T_{c0} сверхпроводящего фазового перехода изолированной пленки сверхпроводника. Для реализации подобного “высокотемпературного” перехода в состояние ЛОФФ может использоваться, например, СФ система, в которой слой ферромагнетика покрыт слоем нормального металла (Н), причем проводимость ферромагнетика в нормальном состоянии много меньше проводимости сверхпроводника, а у нормального металла – много больше. В этом случае подбором толщины Φ слоя можно добиться доминирования триплетных корреляций на ФН границе, которое сохраняется также во всем объеме нормального металла, обеспечивая условие $\langle n_s \rangle < \langle n_t \rangle$ и возникновение продольной фазы

ЛОФФ. При этом из-за малой проводимости ферромагнетика подавление критической температуры сверхпроводника из-за эффекта близости оказывается незначительным.

Другой существенной особенностью состояний ЛОФФ в СФ и СФН системах является возможность фазового перехода между однородным сверхпроводящим состоянием и состоянием ЛОФФ при понижении температуры. В результате, на фазовой диаграмме системы в плоскости параметров температура–обменное поле область, соответствующая фазе ЛОФФ, может оказаться изолированной от области, соответствующей нормальному состоянию. Подобная фазовая диаграмма не характерна для ранее изучаемых систем, где возможна ЛОФФ неустойчивость. Возможность перехода в фазу ЛОФФ из однородного сверхпроводящего состояния может быть проиллюстрирована следующим образом. Для простоты ограничимся интервалом температур T , близких к критической температуре сверхпроводящего перехода T_c , где параметр экранировки $\Lambda^{-1} = \int \lambda^{-2} dx$ может быть разложен по степеням малого параметра $\tau = (T_c - T)/T_c$: $\Lambda^{-1} = \chi\tau + \nu\tau^2$, где коэффициенты χ и ν не зависят от температуры. Для изолированной сверхпроводящей пленки в модели Бардина–Купера–Шриффера $\chi > 0$ и $\nu < 0$. Однако обменное поле в СФ структурах модифицирует эти коэффициенты, и для систем с высокой проводимостью ферромагнитного слоя и малой толщиной сверхпроводника коэффициент χ оказывается сильно подавленным и может даже обратиться в нуль. В последнем случае состояние ЛОФФ возникает при $T = T_c$ на фоне нормального состояния путем фазового перехода второго рода. При этом коэффициент ν должен оставаться отрицательным, что отражает факт уменьшения числа квазичастиц с понижением температуры. В результате, если $\chi > 0$ и $|\nu| \gg \chi$, то фазовый переход в состояние ЛОФФ происходит при температуре $T_F/T_c = 1 - \chi/|\nu|$ ниже T_c . Типичный вид фазовой диаграммы системы схематично показан на рис. 2.

Неустойчивость однородного состояния в СФ системах открывает новые перспективы по обнаружению фазы ЛОФФ в твердотельных структурах. Несмотря на то, что впервые эти состояния были предсказаны больше 50 лет назад для тонких пленок сверхпроводников, помещенных в продольное магнитное поле, их экспериментальная реализация оказалась экстремально сложной задачей. Во-первых, для возникновения состояний ЛОФФ требуются пленки очень малой толщины или слоистые соединения, в которых орбитальное влияние маг-

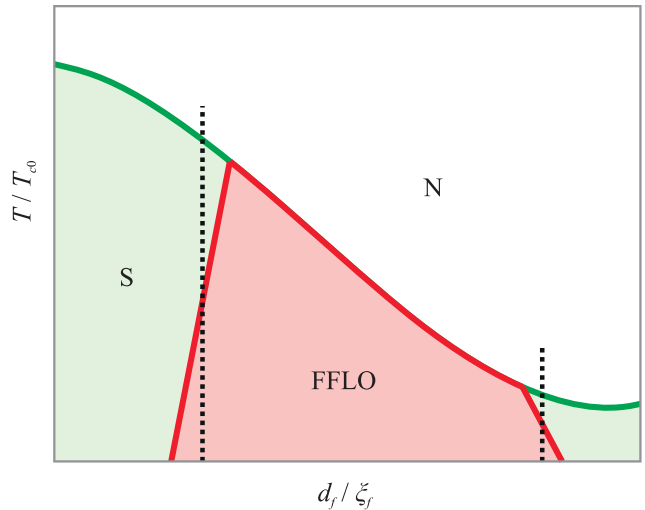


Рис. 2. (Цветной онлайн) Схематическое изображение типичной фазовой диаграммы структуры сверхпроводник-ферромагнетик в области параметров, соответствующей возникновению фазы ЛОФФ. Пунктирные линии показывают пример толщин ферромагнетика, при которых изменение температуры приводит к фазовому переходу в состояние ЛОФФ

нитного поля незначительно. Во-вторых, эти состояния очень чувствительны к беспорядку, который, как правило, довольно сильный как в пленках, так и в слоистых сверхпроводниках. В результате возникновение фазы ЛОФФ было убедительно продемонстрировано лишь недавно для узкого класса квазидвумерных органических сверхпроводников. Вместе с тем, ожидается, что трехслойные гибридные системы СФН с параметрами, характерными для экспериментов по изучению эффекта близости, позволят реализовать неустойчивость ЛОФФ при температуре порядка нескольких кельвин. Толщина ферромагнитного слоя должна быть подобрана таким образом, чтобы на ФН границе спин-триpletные корреляции доминировали над спин-синглетными. При этом нормальный металл в таких структурах должен иметь большую проводимость по сравнению с проводимостью сверхпроводника в нормальном состоянии для усиления вклада tripletных корреляций в интегральный мейсснеровский отклик. В экспериментах переключения между однородными состояниями и состоянием ЛОФФ могут управляться изменением температуры, а наиболее простым критерием перехода является обращение в нуль интегрального мейсснеровского отклика структуры на внешнее магнитное поле, направленное вдоль слоев.

4. Электромагнитный эффект близости вблизи ЛОФФ неустойчивости. Электромагнит-

ный эффект близости в слоистых СФ структурах, рассмотренный выше, может быть существенно усилен вблизи фазового перехода в продольное состояние ЛОФФ с модуляцией сверхпроводящего параметра порядка в плоскости слоев. Чтобы продемонстрировать это усиление, запишем уравнение для компоненты векторного потенциала, которая параллельна плоскости слоев и перпендикулярна намагниченности (см. рис. 1):

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}A_y = \frac{4\pi}{c}(j_s + j_M), \quad (10)$$

где $j_s = -[n_s(x) - n_t(x)]e^2A_y(x)/(mc)$ – y -компонента сверхпроводящего тока, $j_M = -c\partial M_z/\partial x$ – y -компонента тока намагниченности ($M_z = M$ внутри Φ слоя). Здесь мы выбираем материальную связь сверхтекучего тока и векторного потенциала в простейшем локальном виде, который может соответствовать, например, грязному пределу. Условие отсутствия приложенного магнитного поля дает нам граничные условия на внешних поверхностях – границах слоистой структуры: $\partial A_y/\partial x(x = d_F) = 0$ и $\partial A_y/\partial x(x = -d_s) = 0$. Выполняя замену функции $A_y = A + 4\pi Mh(x)$, где $h(x) = x$ внутри Φ слоя, $h(x) = d_F$ при $x > d_F$ и $h(x) = 0$ при $x < 0$, мы получаем уравнение, справедливое на всей оси x :

$$-\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{4\pi(n_s - n_t)e^2}{mc^2}A = -\frac{16\pi^2(n_s - n_t)e^2 Mh(x)}{mc^2}. \quad (11)$$

Полученное уравнение имеет вид неоднородного уравнения Шредингера с нулевой энергией и нулевыми граничными условиями на производную функции $A(x)$ на внешних границах структуры. В отсутствие источника в правой части (11), который по сути отвечает за электромагнитный эффект близости, ненулевое решение уравнения (11) существует лишь в том случае, если оператор Гамильтона

$$\hat{H} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{4\pi(n_s - n_t)e^2}{mc^2} \quad (12)$$

имеет нулевое собственное значение. Ясно, что такая ситуация может реализоваться лишь при достаточно большой концентрации триплетных пар n_t . Появление упомянутого нулевого собственного значения у оператора \hat{H} приведет к потере устойчивости основного состояния бислоя относительно появления спонтанных токов в плоскости слоев, то есть частному случаю развитию неустойчивости типа ЛОФФ. Наличие или отсутствие модуляции абсолютной величины параметра порядка в плоскости слоев будет определяться в этой ситуации величиной спонтанных

токов по сравнению с пороговыми токами входа вихрей в бислой. Выбор между вихревым и безвихревым решением в этом случае может быть сделан только путем рассмотрения нелинейной задачи, в рамках которой может быть установлена возможность существования безвихревых фаз Фульде–Феррелла [76–78], которые могут при смене калибровки характеризоваться лишь фазовой модуляцией параметра порядка. Наличие ненулевой правой части в уравнении (11) существенно меняет решение, поскольку делает возможным генерацию спонтанных токов и без достижения критерия ЛОФФ неустойчивости. Иными словами, наличие источника в приведенном выше уравнении Шредингера приводит к появлению ненулевого решения уравнения и без условия наличия нулевого собственного значения у гамильтониана \hat{H} . В простейшем варианте решение может быть найдено в рамках теории возмущений: $A = a_0 + a_1$, где решение нулевого приближения a_0 может быть выбрано константой, не зависящей от x , а поправка первого порядка a_1 удовлетворяет уравнению:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}a_1 + \frac{4\pi(n_s - n_t)e^2}{mc^2}a_0 = -\frac{16\pi^2(n_s - n_t)e^2 Mh(x)}{mc^2}. \quad (13)$$

Условие существования решения при упомянутых выше граничных условиях дает нам условие на a_0 , которое получается просто интегрированием приведенного выше уравнения:

$$a_0 = -4\pi M \frac{\int (n_s - n_t)h(x)dx}{\int (n_s - n_t)dx}. \quad (14)$$

Здесь интеграл в числителе взят по области Φ слоя, а в знаменателе – по всей структуре. Приближение к переходу в фазу ЛОФФ сопровождается уменьшением интеграла в знаменателе, что приводит нас к заключению о резком росте спонтанных токов вблизи этого перехода. Таким образом, наблюдение усиления электромагнитного эффекта близости может рассматриваться как еще один тест на приближение системы к состоянию ЛОФФ.

5. Заключение. В целом можно сказать, что эффект близости в гибридных структурах сверхпроводник–ферромагнетик может весьма существенно повлиять на их электродинамические свойства. Соответствующие изменения в электродинамическом отклике необходимо принимать во внимание как при интерпретации экспериментальных данных, так и при разработке различных устройств сверхпроводящей спинтроники. Хорошим примером, иллюстрирующим важную роль новых электродинамических эффектов, стали экспериментальные работы по измерению распределения магнитного поля в СФ струк-

турах мюонным методом [69, 70]. На наш взгляд, эти работы уверенно продемонстрировали роль электромагнитного эффекта близости. Что касается перспектив обнаружения состояния ЛОФФ в гибридных структурах, мы надеемся, что полученные нами теоретические результаты стимулируют новые эксперименты в этом интересном направлении.

Работы нашего коллектива были поддержаны проектом Российского научного фонда # 15-12-10020 (разделы 2 и 3), а также проектом # 20-12-00053 (раздел 4). С. В. Миронов также благодарит за финансовую поддержку Фонд развития теоретической физики и математики БАЗИС (проект 18-1-3-58-1) и программу Стипендий Президента РФ (проект СП-3938.2018.5).

1. M. Eschrig, Rep. Prog. Phys. **78**, 104501 (2015).
2. J. Linder and J. W. A. Robinson, Nat. Phys. **11**, 307 (2015).
3. L. N. Bulaevskii, V. V. Kuzii, and A. A. Sobyenin, Pis'ma v ZhETF **25**, 314 (1977) [JETP Lett. **25**, 290 (1977)].
4. A. I. Buzdin, L. N. Bulaevskii, and S. V. Panyukov, Pis'ma v ZhETF **35**, 147 (1982) [JETP Lett. **35**, 178 (1982)].
5. А. И. Буздин, М. Ю. Куприянов, Письма в ЖЭТФ **53**, 308 (1991).
6. V. V. Ryazanov, V. Oboznov, A. Rusanov, A. Veretennikov, A. Golubov, and J. Aarts, Phys. Rev. Lett. **86**, 2427 (2001).
7. V. V. Ryazanov, V. A. Oboznov, A. V. Veretennikov, and A. Yu. Rusanov, Phys. Rev. B **65**, 020501(R) (2001).
8. T. Kontos, M. Aprili, J. Lesueur, F. Genêt, B. Stephanidis, and R. Boursier, Phys. Rev. Lett. **89**, 137007 (2002).
9. V. A. Oboznov, V. V. Bol'ginov, A. K. Feofanov, V. V. Ryazanov, and A. I. Buzdin, Phys. Rev. Lett. **96**, 197003 (2006).
10. J. S. Jiang, D. Davidović, D. H. Reich, and C. L. Chien, Phys. Rev. Lett. **74**, 314 (1995).
11. V. Zdravkov, A. Sidorenko, G. Obermeier, S. Gsell, M. Schreck, C. Müller, S. Horn, R. Tidecks, and L. R. Tagirov, Phys. Rev. Lett. **97**, 057004 (2006).
12. A. Buzdin, Phys. Rev. B **62**, 11377 (2000).
13. T. Kontos, M. Aprili, J. Lesueur, and X. Grison, Phys. Rev. Lett. **86**, 304 (2001).
14. V. Braude and Y. V. Nazarov, Phys. Rev. Lett. **98**, 077003 (2007).
15. A. Cottet, Phys. Rev. Lett. **107**, 177001 (2011).
16. S. Oh, D. Youm, and M. R. Beasley, Appl. Phys. Lett. **71**, 2376 (1997).
17. L. R. Tagirov, Phys. Rev. Lett. **83**, 2058 (1999).
18. A. I. Buzdin, A. V. Vedyayev, and N. V. Ryzhanova, Europhys. Lett. **48**, 686 (1999).
19. R. J. Kinsey, G. Burnell, and M. G. Blamire, IEEE Trans. Appl. Supercond. **11**, 904 (2001).
20. J. Y. Gu, C.-Y. You, J. S. Jiang, J. Pearson, Ya. B. Bazaliy, and S. D. Bader, Phys. Rev. Lett. **89**, 267001 (2002).
21. Ya. V. Fominov, A. A. Golubov, and M. Yu. Kupriyanov, JETP Lett. **77**, 510 (2003).
22. A. Buzdin and M. Daumens, Europhys. Lett. **64**, 510 (2003).
23. A. Potenza and C. H. Marrows, Phys. Rev. B **71**, 180503 (2005).
24. K. Westerholt, D. Sprungmann, H. Zabel, R. Brucas, B. Hjörvarsson, D. A. Tikhonov, and I. A. Garifullin, Phys. Rev. Lett. **95**, 097003 (2005).
25. S. Tollis, M. Daumens, and A. Buzdin, Phys. Rev. B **71**, 024510 (2005).
26. P. V. Leksin, R. I. Salikhov, I. A. Garifullin, H. Vinzelberg, V. Kataev, R. Klingeler, L. R. Tagirov, and B. Büchner, JETP Lett. **90**, 59 (2009).
27. X. Montiel, D. Gusakova, M. Daumens, and A. Buzdin, Europhys. Lett. **86**, 67002 (2009).
28. Ya. V. Fominov, A. A. Golubov, T. Yu. Karminskaya, M. Yu. Kupriyanov, R. G. Deminov, and L. R. Tagirov, JETP Lett. **91**, 308 (2010).
29. P. V. Leksin, N. N. Garif'yanov, I. A. Garifullin, J. Schumann, V. Kataev, O. G. Schmidt, and B. Büchner, Phys. Rev. B **85**, 024502 (2012).
30. V. I. Zdravkov, J. Kehrlé, G. Obermeier, D. Lenk, H.-A. Krug von Nidda, C. Müller, M. Yu. Kupriyanov, A. S. Sidorenko, S. Horn, R. Tidecks, and L. R. Tagirov, Phys. Rev. B **87**, 144507 (2013).
31. A. I. Buzdin, Rev. Mod. Phys. **77**, 935 (2005).
32. A. A. Golubov, M. Yu. Kupriyanov, and E. Il'ichev, Rev. Mod. Phys. **76**, 411 (2004).
33. F. S. Bergeret, A. F. Volkov, and K. B. Efetov, Rev. Mod. Phys. **77**, 1321 (2005).
34. В. В. Рязанов, В. А. Обознов, В. В. Больгинов, А. С. Прокофьев, А. К. Феофанов, УФН **174**, 795 (2004).
35. Ю. А. Изюмов, Ю. Н. Прошин, М. Хусаинов, УФН **172**, 113 (2002).
36. I. A. Garifullin, Письма в ЖЭТФ **93**, 674 (2011).
37. F. S. Bergeret, A. F. Volkov, and K. B. Efetov, Phys. Rev. B **64**, 134506 (2001).
38. A. Kadigrobov, R. I. Shekhter, and M. Jonson, Europhys. Lett. **54**, 394 (2001).
39. S. J. Turneaure, E. R. Ulm, and T. R. Lemberger, J. Appl. Phys. **79**, 4221 (1996).
40. S. J. Turneaure, A. A. Pesetski, and T. R. Lemberger, J. Appl. Phys. **83**, 4334 (1998).
41. T. R. Lemberger, I. Hetel, A. J. Hauser, and F. Y. Yang, J. Appl. Phys. **103**, 07C701 (2008).
42. M. J. Hinton, S. Steers, B. Peters, F. Y. Yang, and T. R. Lemberger, Phys. Rev. B **94**, 014518 (2016).

43. Y. Asano, A. A. Golubov, Y. V. Fominov, and Y. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 087001 (2011).
44. T. Yokoyama, Y. Tanaka, and N. Nagaosa, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 246601 (2011).
45. S. Mironov, A. Mel'nikov, and A. Buzdin, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 237002 (2012).
46. S. V. Mironov, D. Yu. Vodolazov, Y. Yerin, A. V. Samokhvalov, A. S. Mel'nikov, and A. Buzdin, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 077002 (2018).
47. A. B. Самохвалов, *Физика твердого тела* **59**, 2123 (2017).
48. A. V. Samokhvalov, A. S. Mel'nikov, and A. I. Buzdin, *Phys. Rev. B* **76**, 184519 (2007).
49. A. V. Samokhvalov, A. S. Mel'nikov, J.-P. Ader, and A. I. Buzdin, *Phys. Rev. B* **79**, 174502 (2009).
50. A. B. Самохвалов, *ЖЭТФ* **152**, 350 (2017).
51. A. V. Samokhvalov, J. W. A. Robinson, and A. I. Buzdin, *Phys. Rev. B* **100**, 014509 (2019).
52. A. Moor, A. F. Volkov, and K. B. Efetov, *Phys. Rev. B* **80**, 054516 (2009).
53. I. V. Bobkova and A. M. Bobkov, *Phys. Rev. B* **88**, 174502 (2013).
54. J. J. A. Baselmans, A. F. Morpurgo, B. J. van Wees, and T. M. Klapwijk, *Nature* **397**, 43 (1999).
55. V. N. Krivoruchko and E. A. Koshina, *Phys. Rev. B* **66**, 014521 (2002).
56. F. S. Bergeret, A. F. Volkov, and K. B. Efetov, *Phys. Rev. B* **69**, 174504 (2004).
57. F. S. Bergeret, A. Levy Yeyati, and A. Martín-Rodero, *Phys. Rev. B* **72**, 064524 (2005).
58. T. Löfwander, T. Champel, J. Durst, and M. Eschrig, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 187003 (2005).
59. M. Faure, A. Buzdin, and D. Gusakova, *Physica C* **454**, 61 (2007).
60. R. I. Salikhov, I. A. Garifullin, N. N. Garif'yanov, L. R. Tagirov, K. Theis-Bröhl, K. Westerholt, and H. Zabel, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 087003 (2009).
61. S. Mironov, A. S. Mel'nikov, and A. Buzdin, *Appl. Phys. Lett.* **113**, 022601 (2018).
62. Zh. Devizorova, S. V. Mironov, A. S. Mel'nikov, and A. Buzdin, *Phys. Rev. B* **99**, 104519 (2019).
63. F. S. Bergeret, A. F. Volkov, and K. B. Efetov, *Europhys. Lett.* **66**, 111 (2004).
64. M. Krawiec, B. L. Gyorffy, and J. F. Annett, *Phys. Rev. B* **66**, 172505 (2002).
65. A. F. Volkov, F. S. Bergeret, and K. B. Efetov, *Phys. Rev. B* **99**, 144506 (2019).
66. A. Di Bernardo, Z. Salman, X. L. Wang, M. Amado, M. Egilmez, M. G. Flokstra, A. Suter, S. L. Lee, J. H. Zhao, T. Prokscha, E. Morenzoni, M. G. Blamire, J. Linder, and J. W. A. Robinson, *Phys. Rev. X* **5**, 041021 (2015).
67. M. G. Flokstra, N. Satchell, J. Kim, G. Burnell et al. (Collaboration), *Nature Phys.* **12**, 57 (2016).
68. M. G. Flokstra, R. Stewart, N. Satchell, G. Burnell, H. Luetkens, T. Prokscha, A. Suter, E. Morenzoni, S. Langridge, and S. L. Lee, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 247001 (2018).
69. M. G. Flokstra, R. Stewart, N. Satchell, G. Burnell, H. Luetkens, T. Prokscha, A. Suter, E. Morenzoni, S. Langridge, and S. L. Lee, *Appl. Phys. Lett.* **115**, 072602 (2019).
70. R. Stewart, M. G. Flokstra, M. Rogers, N. Satchell, G. Burnell, D. Miller, H. Luetkens, T. Prokscha, A. Suter, E. Morenzoni, and S. L. Lee, *Phys. Rev. B* **100**, 020505(R) (2019).
71. J. Stahn, J. Chakhalian, Ch. Niedermayer, J. Hoppler, T. Gutberlet, J. Voigt, F. Treubel, H.-U. Habermeier, G. Cristiani, B. Keimer, and C. Bernhard, *Phys. Rev. B* **71**, 140509(R) (2005).
72. Yu. N. Khaydukov, B. Nagy, J.-H. Kim, T. Keller, A. Rühm, Yu. V. Nikitenko, K. N. Zhernenkov, J. Stahn, L. F. Kiss, A. Csik, L. Bottyán, and V. L. Aksenov, *ZhETF* **98**, 107 (2013).
73. J. Hoppler, J. Stahn, Ch. Niedermayer, V. K. Malik, H. Bouyanfif, A. J. Drew, M. Rössle, A. Buzdin, G. Cristiani, H.-U. Habermeier, B. Keimer, and C. Bernhard, *Nature Mater.* **8**, 315 (2009).
74. B. Nagy, Yu. Khaydukov, D. Efremov, A. S. Vasenko, L. Mustafa, J.-H. Kim, T. Keller, K. Zhernenkov, A. Devishvili, R. Steitz, B. Keimer, and L. Bottyán, *Europhys. Lett.* **116**, 17005 (2016).
75. G. A. Ovsyannikov, V. V. Demidov, Yu. N. Khaydukov, L. Mustafa, K. Y. Constantinian, A. V. Kalabukhov, and D. Winkler, *JETP* **122**, 738 (2016).
76. K. V. Samokhin and B. P. Truong, *Phys. Rev. B* **96**, 214501 (2017).
77. P. M. Marychev and D. Yu. Vodolazov, *Phys. Rev. B* **98**, 214510 (2018).
78. V. D. Plastovets and D. Yu. Vodolazov, *Phys. Rev. B* **101**, 184513 (2020).