Письма в ЖЭТФ, том 54, вып. 9, стр. 542 — 545 10 ноября 1991 г.

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ В БОТАНИКЕ И ФИЗИКЕ: ФИЛЛОТАКСИС

Л.С.Левитов

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау АН СССР
Massachusetts Institute of Technology

Поступила в редакцию 4 октября 1991 г.

Мы рассматриваем правильные решетки на цилиндре, состоящие из отталкивающихся объектов, и изучаем процесс анизотропной деформации таких решеток. Оказывается, этот процесс детерминированно порождает фибоначчиевы решетки, и только их. Это может служить объяснением широкой распространенности чисел Фибоначчи в живых организмах, если принять, что деформация возникает при росте зародыша.

Листья, чешуи, лепестки и семена многих видов растений упорядочены в решетки (для демонстрации наиболее пригодны шишки, подсолнухи и ананасы). Ряды ближайших соседей в решетке образуют два семейства спиралей, лево- и правовинтовых. Наблюдается числовая закономерность, именуемая *филлотаксис*: количество спиралей в обоих семействах дается числами Фибаначчи 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. ..., причем для левых и правых спиралей получаются числа Фибоначчи соседние в последовательности, например (5,8), (8,13), (13,21) и т. д. Явление это было известно еще Кеплеру, вызывало удивление, обсуждалось и изучалось многими, среди них Леонардо да Винчи, братья Браве, У.Томсон, Тэйт, Тьюринг, Г.Вейль. Слово "филлотаксис" предложено поэтом Гете, который в качестве натуралиста и естествоиспытателя интересовался этой закономерностью. Имеется обширная популярная литература [1].

Ранние работы по филлотаксису посвящены, в основном, геометрическому анализу решеток на цилиндре и конусе, а также решеток на плоскости, образованных логарифмическими спиралями [2]. В начале века происходит переключение интереса на вопрос о причине и механизме филлотаксиса. Наиболее интересные результаты были получены для модели касающихся дисков [3] (см. также [4]).

Рассмотрим произвольную решетку на поверхности цилиндра. Упорядичим узлы решетки по возрастанию высоты z. Получим

$$z_n = hn, \qquad \theta_n = \alpha n \pmod{2\pi}, \tag{1}$$

где h и α - параметры, $n \in Z$ (мы предполагаем, что решетка не имеет поворотной симметрии, т.е. что все узлы находятся на разной высоте). Теперь потребуем, чтобы узлы решетки были центрами одинаковых кругов, касающихся попарно. То есть мы выделяем решетки, в которых два кратчайших вектора имеют одинаковую длину. Смысл такой модели - в замене семян, чешуй и т.д. одинаковыми твердыми дисками, касающихся друг друга. Все такие решетки, то есть пары (α, h), выделяемые наложенным условием касания, несложно описать. Получается множество на плоскости $\alpha - h$, имеющее структуру дерева Кэли с координационным числом три (рис.1). Ветви дерева - это дуги окружностей. Точки ветвления соответствуют правильным треугольным решеткам (каждый диск касается шести соседей), а внутренние точки ветвей - ромбическим решеткам, в которых касание дисков происходит по четыре. Ветви дерева помечены парами, а вершины - тройками целых чисел, дающих количества спиралей, порожденных кратчайшими векторами (у правильной треугольной решетки три кратчайших вектора, а у ромбической - два). Это построение, впервые полученное в начале века [3], было переоткрыто недавно [5].

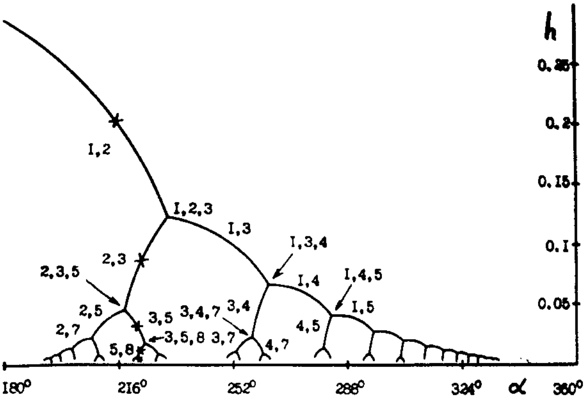

Рис. 1. Показано множество пар α, h, отвечающих решеткам на цилиндре, образованным одинаковыми касающимися дисками [3]. Целые числа - количества спиралей, образованных рядами ближайших соседей. Фибоначчиевым решеткам соответствуют дуги, помеченные крестиками. Картина симметрична относительно замены $\alpha \to 360° - \alpha$, поэтому показана только область $\alpha > 180°$ (то же относится и к рис.2,3).

Какая часть дерева соответствует фибоначчиевым решеткам, встречающимся в природе? Как видно из рис.1, пары соседних чисел Фибоначчи расположены вдоль непрерывной цепи ветвей, помеченных крестиками. Вдоль цепи числа монотонно возрастают. Это наблюдение позволяет думать о некоем процессе роста или эволюции решетки, при котором она непрерывно проходит через последовательность фибоначчиевых состояний. При попытке рассмотреть такой процесс в модели дисков возникает очевидная трудность: необходимо вводить правила, определяющие "желательные" направления поворота в точках разветвления. Конструкция становится довольно искусственной и малопривлекательной.

Эта трудность естественно снимается в энергетической модели [6,7]. Возьмем решетку на плоскости, заданную двумя параметрами x, y:

$$\vec{r}_{mn} = \left((m + nx)/\sqrt{y},\ n\sqrt{y}\right), \qquad m,\ n \in Z. \tag{2}$$

Решетка (2) получается из решетки (1) развертыванием цилиндра на плоскость и уменьшением масштаба в $2\pi\sqrt{y}$ раз (при этом $h = 2\pi y$, $\alpha = 2\pi x$). Определим энергию решетки $E(x, y)$ как сумму энергий попарного взаимодействия узлов:

$$E(x, y) = \sum_{mn} U(|r_{mn}|) \tag{3}$$

Взаимодействие $U(\lambda)$ - любое отталкивательное, для вычислений мы принимаем $U(\lambda) = \exp(-\lambda^2)$.

Теперь рассмотрим такой процесс. Будем деформировать решетку (2), уменьшая y от $+\infty$ до 0, а параметр x оставим свободным, позволяя решетке самой выбирать значение x в минимуме энергии $E(x, y)$ при данном y. Рассмотрим получившиеся траектории минимумов $x_{min}(y)$. Иными словами, возьмем все пары (x, y), отвечающие локальным минимумам E по x при $y = const$ и нарисуем их на плоскости $x - y$. Получится множество, изображенное на рис.2. Видно, что количество минимумов E по x увеличивается с уменьшением y, причем для нас существенно, что новые минимумы появляются изолированно от старых. Это значит, что, уменьшая y и отслеживая минимум по непрерывности, мы никогда на столкнемся с неоднозначностью продолжения пути, как это было в модели дисков. Причина изолированности новых минимумов от старых заключается в асимметрии потенциала $E(x)_{y=\text{const}}$. Каждый новый минимум появляется не в результате точной бифуркации, а путем "квазибифуркации", т.е. сразу на ненулевом расстоянии от старого минимума. Начиная с какого-либо достаточно большого значения y, скажем с $y = 0,2$, и уменьшая его, мы детерминированно попадаем на фибоначчиеву последовательность решеток и проходим ее всю, от начала до произвольно больших чисел Фибоначчи (ср. с рис. 1).

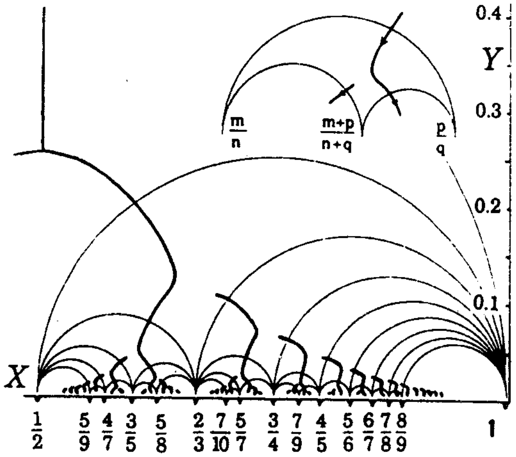

Рис. 2. Жирные линии - траектории минимумов E по x при $y = \text{const}$. Тонкие линии - полуокружности, разбивающие область $y > 0$ на криволинейные треугольники, в которых поведение траекторий единообразно. Вставка: траектории минимумов в одном треугольнике

Связь древесных структур рис. 1 и 2 друг с другом можно описать, если соотнести их обе с иерархией Фарея рациональных чисел [8]. Конструкция Фарея такова: определим сумму Фарея рациональных чисел $m/n \oplus p/q = (m+p)/(n+q)$. Теперь запишем 0 и 1 как 0/1 и 1/1 и, сложив, получим $0/1 \oplus 1/1 = 1/2$. Впишем 1/2 между 0/1 и 1/1, получим 0/1, 1/2, 1/1. Опять сложим соседей и результаты впишем между слагаемыми: 0/2, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1 и так далее. В результате таких вычислений получаются все рациональные числа между 0 и 1, организованные иерархически, причем каждое число встретится ровно один раз. Расположим числа этажами, в соответствии со стадиями процесса Фарея, на которых они появляются. Соединим каждое число с двумя "предками", суммой которых оно дается, жирной линией - с более "молодым" предком, и пунктирной - с более "старым" (рис. 3) ("старый" предок находится на более высоком этаже, чем "молодой").

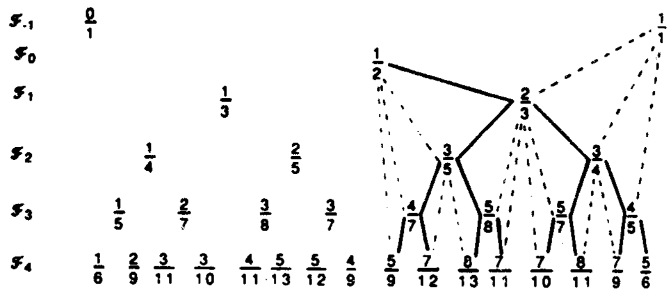

Рис. 3. Рациональные числа от 0 до 1, организованные иерархически с помощью процесса Фарея

Нетрудно заметить, что топология получившейся системы жирных линий на рис. 3 такая же, как у траекторий минимумов на рис. 2. Это утверждение можно доказать строго в следующей формулировке [7]. Проведем всевозможные дуги окружностей, построенные на отрезках $(m/n,\ p/q)$ вещественной оси как на диаметрах (m, n, p, q - целые, $mq - np = \pm 1$). Получим разбиение полуплоскости $y > 0$ на криволинейные треугольники с вершинами

$m/n, (m+p)/(n+q), p/q$, показанное на рис.2. Оказывается, что поведение траекторий минимумов во всех таких треугольниках одинаковое: одна траектория входит в треугольник сверху через большую сторону и выходит снизу через меньшую, а другая траектория появляется изолированно внутри треугольника и выходит вниз через среднюю сторону (см. вставку на рис.2). Получается, что вся картина траекторий минимумов на рис.2 состоит из стандартных блоков-треугольников с вершинами $m/n, (m+p)/(n+q), p/q$, что дает связь одновременно и с деревом Кэли (рис.1), и с иерархией Фарея (рис.3).

Описанный процесс деформации решетки (плавное уменьшение y с соответствующей подстройкой x) имеет простой биологический смысл. Представим себе, что зародыш шишки формируется как одномерная структура путем последовательного нарастания зародышей семян, от начала к концу. Получается цепочка зародышей - длинный, тонкий объект с большим отношением длины к толщине. Затем зародыш растет и превращается во взрослую шишку, при этом отношение длины к толщине уменьшается до обычного. Это значит, что рост анизотропный: быстрее - в поперечном направлении, медленнее - в продольном. С точностью до общего изменения масштаба при росте, это в точности соответствует уменьшению нашего параметра y, отношения вертикального масштаба решетки к горизонтальному. Таким образом, в силу чисто механических причин, при анизотропном росте длинного цилиндрического зародыша образуются только фибоначчиевы структуры.

Можно показать [7], что топология траекторий минимумов на рис.2 устойчива по отношению к изменению потенциала отталкивания U. Это объясняет универсальность филлотаксиса, его широкую распространенность в растительном мире. Отметим также, что наша модель (2), (3) имеет отношение и к другой задаче, о вихревых решетках в слоистых сверхпроводниках [6], где фибоначчиевы решетки тоже играют особую роль.

---

1. Вейль Г., Симметрия. М.: Наука, 1968, с. 98; Thompson D'Arcy W., On Growth and Form. Cambridge University Press, 1942; Rivier N., Mod. Phys. Lett., B, 1988, 2, 953; Prusinkievicz P., Lindenmayer A., The Algorithmic Beauty of Plants. Springer-Verlag, 1990.
2. Church A.H., On the relation of Phyllotaxis to Mechanical Laws. London: Williams & Norgate, 1904; Erickson R.O, The Geometry of Phyllotaxis. Eds. by J.E.Dale and Milthrope F.L.; The Growth and Functioning of Leaves, pp. 53-88. Cambridge University Press, 1983.
3. Van Iterson G., Mathematische und Mikroskopish-anatomische Studien über Blattstellungen. Jena: Gustav Fischer, 1907.
4. Adler I., J.Theor. Biology, 1974, 45, 1; J.Theor. Biology, 1977, 65, 29.
5. Rothen F., Koch A., J. de Phys. 1989, 50, 633, 1603.
6. Levitov L.S., Phys. Rev. Lett., 1991, 66, 224.
7. Levitov L.S., Europhys. Lett., 1991, 14, 533.
8. Hardy G.H., Wright E.V., An Introduction to the Theory of Numbers (Clarendon, Oxford, 1954).