

Теоретическое исследование реакций в трехчастичной $e^-e^+\bar{p}$ системе и сечения образования антиводорода

В. А. Градусов¹⁾, В. А. Руднев¹⁾, Е. А. Яревский¹⁾, С. Л. Яковлев¹⁾

Кафедра вычислительной физики, Санкт-Петербургский государственный университет,
199034 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 25 апреля 2021 г.

После переработки 10 июня 2021 г.

Принята к публикации 10 июня 2021 г.

Мы применяем новый высокоэффективный метод решения уравнений Фаддеева–Меркурьева для многоканальных расчетов сечения образования антиводорода при рассеянии антипротонов на основном и возбужденных состояниях позитрония. Наши результаты демонстрируют хорошее согласие с известными данными по полным и парциальным сечениям для всех каналов реакции. Используя умеренные вычислительные ресурсы, мы достигли очень высокого энергетического разрешения.

DOI: 10.31857/S1234567821130036

В ЦЕРН планируются и проводятся несколько экспериментов с антивеществом, использующих установку замедления антипротонов. Два из них, нацеленные на гравитационное поведение антивещества – AEGIS [1] и GBAR [2] – используют, среди прочего, трехтелную реакцию



образования антиводорода $\bar{\text{H}}$ в процессе рассеяния антипротона \bar{p} на газе ридберговского позитрония (Ps) для получения частиц антивещества. Несмотря на то, что реакции перезарядки имеют долгую историю экспериментального и теоретического изучения, лишь некоторые подходы продемонстрировали определенный успех в изучении $e^-e^+\bar{p}$ рассеяния в многоканальном глубоководном режиме [3–8]. В частности, авторы [7, 8] обсуждали рост сечений образования антиводорода, происходящий прямо над порогами высоковозбужденных состояний позитрония, что представляет особый интерес как механизм увеличения скорости реакции образования антиводорода при производстве атомов антивещества.

Однако, теоретическое и вычислительное исследование этой реакции осложняется наличием множества околопороговых резонансов, дальнедействующих поляризационных взаимодействий во многих каналах, сложных вкладов множественных виртуальных возбуждений различной геометрии. В качестве примера чувствительной природы системы можно упомянуть осцилляции Гайлитиса–Дамбурга [9, 10],

которые возникают из-за дальнедействующего дипольного взаимодействия между возбужденным нейтральным атомом (либо $\bar{\text{H}}$, либо Ps) и заряженной частицей (e^- или \bar{p}). Все эти особенности системы делают снижение размерности проблематичным и требуют подхода, который учитывал бы динамику системы в полной размерности.

Из-за такой сложной природы системы количество надежных теоретических результатов остается ограниченным: известные результаты имеют недостаточное разрешение либо по энергии, либо по сечению, либо по обоим характеристикам. Имеется определенный недостаток данных о сечениях низкоэнергетического рассеяния $e^-e^+\bar{p}$, полученных независимыми подходами.

Мы предложили и реализовали подход к решению квантовой задачи трех тел, который сочетает в себе как теоретически обоснованную технику, так и вычислительно эффективный алгоритм [11]. Он основан на решении уравнений Фаддеева–Меркурьева (ФМ) [12], которые в представлении полного орбитального момента [13] сводятся к конечной системе трехмерных уравнений в частных производных. Это выгодно отличает наш подход от подхода работ [3–5], где разложение по биполярным гармоникам приводит к бесконечной системе двумерных интегродифференциальных уравнений. Наши более ранние расчеты [11] показали, что такой подход позволяет с высокой точностью вычислять энергии связи для состояний с высоким полным орбитальным моментом. Здесь мы применяем его к задачам рассеяния и выполняем серию расчетов сечений образования антиводорода для реакции (1). Мы сравниваем наши

¹⁾e-mail: v.gradusov@spbu.ru; v.rudnev@spbu.ru;
e.yarevsky@spbu.ru; s.yakovlev@spbu.ru

результаты для сечений, обладающие высоким разрешением, с доступными данными для сечений образования антиводорода из работ [3–5, 14–16] для рассеяния антипротонов на основном и первом возбужденном состояниях позитрония как для полных, так и для парциальных сечений. В обоих случаях наши данные расширяют и подтверждают более ранние результаты.

Рассматривается система трех бесспиновых нерелятивистских заряженных частиц с массами m_α и зарядами Z_α , $\alpha = 1, 2, 3$. В дальнейшем, множество индексов $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ пробегает множество $\{1, 2, 3\}$, нумерующее частицы. Парой α называется пара частиц $\beta\gamma$, дополнительная к частице α . Положение частиц описывается набором координат. В системе координат центра масс стандартным выбором является набор координат Якоби. Для разбиения $\alpha(\beta\gamma)$ они определены как векторы относительного положения между частицами пары α и между их центром масс и частицей α . Удобно использовать приведенные координаты Якоби $(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha)$, которые являются векторами Якоби, масштабируемыми множителями $\sqrt{2\mu_\alpha}$ и $\sqrt{2\mu_{\alpha(\beta\gamma)}}$ соответственно. Здесь приведенные массы равны

$$\mu_\alpha = \frac{m_\beta m_\gamma}{m_\beta + m_\gamma}, \quad \mu_{\alpha(\beta\gamma)} = \frac{m_\alpha(m_\beta + m_\gamma)}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma}. \quad (2)$$

Для разных значений α приведенные векторы Якоби связаны ортогональным преобразованием $\mathbf{x}_\beta = c_{\beta\alpha}\mathbf{x}_\alpha + s_{\beta\alpha}\mathbf{y}_\alpha$, $\mathbf{y}_\beta = -s_{\beta\alpha}\mathbf{x}_\alpha + c_{\beta\alpha}\mathbf{y}_\alpha$ [12]. В дальнейшем, где необходимо, предполагается, что векторы Якоби β представлены через α .

В приведенных координатах Якоби уравнения ФМ для трех заряженных частиц [12, 17] могут быть записаны как (полужирный шрифт используется для векторов):

$$\{T_\alpha + V_\alpha(x_\alpha) + V_\beta^{(1)}(x_\beta, y_\beta) + V_3(x_3, y_3) - E\} \times \\ \times \psi_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha) = -V_\alpha^{(s)}(x_\alpha, y_\alpha)\psi_\beta(\mathbf{x}_\beta, \mathbf{y}_\beta), \\ \alpha \neq \beta = 1, 2. \quad (3)$$

Здесь $T_\alpha \equiv -\Delta_{\mathbf{x}_\alpha} - \Delta_{\mathbf{y}_\alpha}$ – операторы кинетической энергии. Потенциалы V_α представляют собой парное кулоновское взаимодействие $V_\alpha(x_\alpha) = \sqrt{2\mu_\alpha}Z_\beta Z_\gamma/x_\alpha$ ($\beta, \gamma \neq \alpha$). Предполагается, что потенциал V_3 – отталкивающий. Потенциалы V_α расщепляются на внутреннюю (короткодействующую) $V_\alpha^{(s)}$ и хвостовую (дальнодействующую) части $V_\alpha^{(l)}$

$$V_\alpha(x_\alpha) = V_\alpha^{(s)}(x_\alpha, y_\alpha) + V_\alpha^{(l)}(x_\alpha, y_\alpha). \quad (4)$$

Уравнения (3) можно просуммировать, что приводит к уравнению Шредингера для волновой функции

$\Psi = \sum_\alpha \psi_\alpha$, где ψ_α – компоненты волновой функции, заданные решением уравнений (3).

Расщепление (4) выполняется согласно $V_\alpha^{(s)}(x_\alpha, y_\alpha) = \chi_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)V_\alpha(x_\alpha)$, где функция срезки Меркурьева χ_α ограничивает короткодействующую часть потенциала областями в трехчастичном конфигурационном пространстве, соответствующими точке трехчастичного столкновения и парной конфигурации ($x_\alpha \ll y_\alpha$, когда $y_\alpha \rightarrow \infty$) [12]. Следуя [18, 19], мы используем функцию срезки в двухчастичном конфигурационном пространстве пары α :

$$\chi_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) = \chi_\alpha(x_\alpha) = 2/\{1 + \exp[(x_\alpha/x_{0\alpha})^{2.01}]\}. \quad (5)$$

Параметр $x_{0\alpha}$ в принципе может быть выбран произвольно, но его выбор изменяет свойства компонент ψ_α , которые важны как с теоретической, так и с вычислительной точек зрения [20]. Его можно эффективно выбрать с помощью простого практического алгоритма, представленного в [19].

Процедура расщепления делает свойства уравнений ФМ для кулоновских потенциалов так же подходящими для задач рассеяния, как стандартные уравнения Фаддеева в случае короткодействующих потенциалов [21]. Ключевым свойством уравнений ФМ (3) является то, что правая часть каждого уравнения ограничена окрестностью точки тройного столкновения [20]. Это приводит к асимптотическому расщеплению системы уравнений ФМ и, следовательно, асимптота каждой компоненты ψ_α для энергий ниже порога развала содержит только члены, соответствующие бинарным конфигурациям в паре α [20, 21]. Для полной энергии системы E ниже порога трехчастичной ионизации асимптота имеет вид

$$\psi_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha) = \chi_{\mathbb{A}_0}(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha)\delta_{\mathbb{A}\mathbb{A}_0} + \Xi_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha), \quad (6)$$

где рассеянная волна имеет вид

$$\Xi_\alpha(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha) = \sum_{n\ell m} \frac{\phi_A(x_\alpha)}{x_\alpha} Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{x}}_\alpha) \sqrt{\frac{p_{n0}}{p_n}} \times \\ \times \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{A}, \mathbb{A}_0}(\hat{\mathbf{y}}_\alpha, \mathbf{p}_{n0}) \frac{e^{i(p_n y_\alpha - \eta_n \log(2p_n y_\alpha))}}{y_\alpha}. \quad (7)$$

Здесь $Y_{\ell m}$ обозначает стандартную сферическую гармонику. Мультииндекс $\mathbb{A} = \{A_m\} = \{\alpha n \ell m\}$ задает каналы рассеяния, т.е. различные связанные кулоновские состояния двух тел в паре α с волновой функцией $\phi_A(x_\alpha)Y_{\ell m}(\hat{\mathbf{x}}_\alpha)/x_\alpha$ и энергией ε_n . Импульс p_n улетающей частицы определяется условием сохранения энергии $E = p_n^2 + \varepsilon_n$, а параметр Зоммерфельда определяется как $\eta_n \equiv Z_\alpha(Z_\beta +$

+ Z_γ) $\sqrt{2m_\alpha(\beta\gamma)/(2p_n)}$. Начальный канал задается падающей волной

$$\chi_{\mathbb{A}_0}(\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha) = \frac{\phi_{\mathbb{A}_0}(x_\alpha)}{x_\alpha} Y_{\ell_0 m_0}(\hat{\mathbf{x}}_\alpha) e^{i(\mathbf{p}_{n_0}, \mathbf{y}_\alpha)} e^{-\pi\eta_{n_0}/2} \times \Gamma(1 + i\eta_{n_0}) {}_1F_1(-i\eta_{n_0}, 1, i(p_{n_0} y_\alpha - (\mathbf{p}_{n_0}, \mathbf{y}_\alpha))), \quad (8)$$

где ${}_1F_1$ – конфлюэнтная гипергеометрическая функция [22]. Амплитуда бинарного рассеяния

$$\mathcal{A}_{\mathbb{A}\mathbb{A}_0}(\hat{\mathbf{y}}_\alpha, \mathbf{p}_{n_0}) = \mathcal{A}_C(\hat{\mathbf{y}}_\alpha, \mathbf{p}_{n_0}) + \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{A}, \mathbb{A}_0}(\hat{\mathbf{y}}_\alpha, \mathbf{p}_{n_0}) \quad (9)$$

соответствует переходу от начального бинарного канала \mathbb{A}_0 к бинарному каналу \mathbb{A} . Здесь \mathcal{A}_C – стандартная двухчастичная кулоновская амплитуда рассеяния [23]. Сечение рассеяния определяется выражением

$$\sigma_{\mathbb{A}\mathbb{A}_0} = \frac{1}{2m_{\alpha_0}(\beta\gamma)(2\ell_0 + 1)} \times \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{m_0=-\ell_0}^{\ell_0} \int d\hat{\mathbf{y}}_\alpha |\mathcal{A}_{\mathbb{A}\mathbb{A}_0}(\hat{\mathbf{y}}_\alpha, \mathbf{p}_{\mathbb{A}_0})|^2. \quad (10)$$

Добавляя граничные условия (6)–(8) к уравнению ФМ (3), получаем краевую задачу, которую можно решить численно. Однако каждое уравнение (3) является шестимерным уравнением в частных производных. Чтобы сделать вычисления возможными, уравнения упрощаются путем проецирования (3) на подпространство с заданным полным орбитальным моментом [13], который является интегралом движения для рассматриваемых здесь процессов. Для этого вводятся более подходящие кинематические координаты $(X_\alpha, \Omega_\alpha)$ в шестимерном конфигурационном пространстве задачи. Координаты $X_\alpha = \{x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha = \cos\theta_\alpha \equiv (\mathbf{x}_\alpha, \mathbf{y}_\alpha)/(x_\alpha y_\alpha)\}$ определяют положение частиц в содержащей их плоскости. Три остальные координаты $\Omega_\alpha = \{\phi_\alpha, \vartheta_\alpha, \varphi_\alpha\}$ определяют положение плоскости в пространстве. Это стандартные углы Эйлера поворота некоторой лабораторной системы координат в связанную с частицами систему координат [24], в которой вектор \mathbf{x}_α расположен вдоль оси z , а вектор \mathbf{y}_α лежит в правой половине плоскости xz . Компоненты ФМ в новых координатах раскладываются как

$$\psi_\alpha(X_\alpha, \Omega_\alpha) = \sum_{L=0}^{+\infty} \sum_{\tau=\pm 1} \sum_{M=-L}^L \sum_{M'=M_0}^L (1 - z_\alpha^2)^{M'/2} \frac{\psi_{\alpha MM'}^{L\tau}(X_\alpha)}{x_\alpha y_\alpha} F_{MM'}^{L\tau}(\Omega_\alpha). \quad (11)$$

Здесь $M_0 = (1 - \tau)/2$, а функции

$$F_{MM'}^{L\tau}(\Omega_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2 + 2\delta_{M'0}}} \times \left(D_{MM'}^L(\Omega_\alpha) + \tau(-1)^{M'} D_{M, -M'}^L(\Omega_\alpha) \right) \quad (12)$$

являются линейными комбинациями D -функций Вигнера $D_{MM'}^L$ [24, 25]. Функция $F_{MM'}^{L\tau}$ является общей собственной функцией квадрата полного орбитального момента, его проекции и операторов пространственной инверсии [13, 25] с собственными значениями $L(L + 1)$, M и τ . Множитель $(1 - z_\alpha^2)^{M'/2}$ в (11) вводится, чтобы сделать парциальные компоненты $\psi_{\alpha MM'}^{L\tau}$ и их производные неособыми в $z_\alpha = \pm 1$ [11, 26]. Теперь, подставляя ряд (11) в уравнения ФМ (3), записанные в новых координатах $(X_\alpha, \Omega_\alpha)$, и проецируя полученные уравнения на функции $F_{MM'}^{L\tau}$, получаем конечный набор трехмерных уравнений для парциальных компонент $\psi_{\alpha MM'}^{L\tau}(X_\alpha)$

$$\begin{aligned} & [T_{\alpha MM'}^{L\tau} + V_\alpha(x_\alpha) + V_\beta^{(1)}(x_\beta, y_\beta) + \\ & + V_3(x_3, y_3) - E] \psi_{\alpha MM'}^{L\tau}(X_\alpha) + \\ & + T_{\alpha M, M'-1}^{L\tau-} \psi_{\alpha M, M'-1}^{L\tau}(X_\alpha) + \\ & + T_{\alpha M, M'+1}^{L\tau+} \psi_{\alpha M, M'+1}^{L\tau}(X_\alpha) = \\ & = -\frac{V_\alpha^{(s)}(x_\alpha, y_\alpha)}{(1 - z_\alpha^2)^{\frac{M'}{2}}} \frac{x_\alpha y_\alpha}{x_\beta y_\beta} \sum_{M''=M_0}^L \frac{(-1)^{M''-M'} 2}{\sqrt{2 + 2\delta_{M''0}}} \times \\ & \times F_{M'' M'}^{L\tau}(0, w_{\beta\alpha}, 0) (1 - z_\beta^2)^{\frac{M''}{2}} \psi_{\beta M M''}^{L\tau}(X_\beta). \quad (13) \end{aligned}$$

Операторы кинетической энергии имеют вид

$$\begin{aligned} T_{\alpha MM'}^{L\tau} & = -\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha^2} + \frac{1}{y_\alpha^2} (L(L + 1) - 2M'^2) - \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} - \\ & - \left(\frac{1}{y_\alpha^2} + \frac{1}{x_\alpha^2} \right) \left((1 - z_\alpha^2) \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha^2} - 2(M' + 1) z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} - \right. \\ & \left. - M'(M' + 1) \right), \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\alpha M, M'+1}^{L\tau+} & = \frac{1}{y_\alpha^2} \lambda^{L, M'} \sqrt{1 + \delta_{M'0}} \times \\ & \times \left[-(1 - z_\alpha^2) \frac{\partial}{\partial z_\alpha} + 2(M' + 1) z_\alpha \right], \\ T_{\alpha M, M'-1}^{L\tau-} & = \frac{1}{y_\alpha^2} \lambda^{L, -M'} \sqrt{1 + \delta_{M'1}} \frac{\partial}{\partial z_\alpha}. \quad (15) \end{aligned}$$

Здесь $\lambda^{LM'} = \sqrt{L(L + 1) - M'(M' + 1)}$. Кинематический угол $w_{\beta\alpha}$ связан с преобразованием координат $(X_\alpha, \Omega_\alpha)$ с разными α . Он дается выражением

$$w_{\beta\alpha} = \begin{cases} \arccos \frac{-s_{\beta\alpha} y_\alpha z_\alpha + c_{\beta\alpha} x_\alpha}{x_\beta}, \\ \text{если } (\beta - \alpha) \bmod 3 = 2, \\ 2\pi - \arccos \frac{-s_{\beta\alpha} y_\alpha z_\alpha + c_{\beta\alpha} x_\alpha}{x_\beta}, \text{ иначе,} \end{cases} \quad (16)$$

в котором подразумевается, что областью значений аггсос является интервал $[0, \pi]$. Полученные уравнения называются (3D) уравнениями ФМ в представлении полного орбитального момента. Важнейшим свойством системы (13) является тот факт, что уравнения на парциальные компоненты $\psi_{\alpha MM'}^{L\tau}$ с различающимися индексами L , M и τ образуют независимые системы уравнений. Это непосредственное следствие того, что для рассматриваемых нами трехчастичных систем полный орбитальный момент, его проекция и пространственная четность сохраняются. При данных L , M и τ система (13) состоит из $3(L - M_0 + 1)$ трехмерных уравнений в частных производных. Парциальные компоненты $\psi_{\alpha MM'}^{L\tau}$ должны удовлетворять нулевым граничным условиям типа Дирихле на прямых $x_\alpha = 0$, $y_\alpha = 0$.

Асимптотические граничные условия на парциальные компоненты $\psi_{\alpha MM'}^{L\tau}$ принимают вид суммы

$$\psi_{\alpha MM'}^{L\tau}(X_\alpha) = \chi_{\mathbb{A}_0 MM'}^{L\tau}(X_\alpha)\delta_{\mathbb{A}\mathbb{A}_0} + \Xi_{\alpha MM'}^{L\tau}(X_\alpha) \quad (17)$$

парциальных компонент падающей и рассеянной волн, определенных равенствами (6)–(8). Они могут быть получены проецированием (7) и (8) на функции $F_{MM'}^{L\tau}$. Если лабораторная система координат выбрана таким образом, что вектор \mathbf{p}_{n_0} расположен в ней вдоль оси z , парциальная компонента падающей волны дается выражением

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{A}_0 MM'}^L(X_\alpha) &= \delta_{-M, m_0} \frac{(-1)^M \sqrt{(2\ell_0 + 1)}}{p_{n_0} \sqrt{2 + 2\delta_{M'0}}} \phi_{A_0}(x_\alpha) \times \\ &\times \sum_{\lambda=|L-\ell_0}^{L+\ell_0} \sqrt{2\lambda + 1} i^\lambda e^{i\sigma_\lambda(\eta_{n_0})} F_\lambda(\eta_{n_0}, p_{n_0} y_\alpha) \times \\ &\times \frac{Y_{\lambda M'}(\theta_\alpha, 0)}{(1 - z_\alpha^2)^{\frac{M'}{2}}} C_{\lambda, 0, \ell_0, M}^{L, M} C_{\lambda, M', \ell_0, 0}^{L, M'} (1 + \tau(-1)^{\lambda + \ell_0 - L}), \end{aligned} \quad (18)$$

где кулоновский фазовый сдвиг $\sigma_\lambda(\eta_{n_0}) = \arg \Gamma(1 + \lambda + i\eta_{n_0})$, F_λ – регулярная кулоновская функция [23], а $C_{j_1, m_1, j_2, m_2}^{j, m}$ обозначают коэффициенты Клебша–Гордана. Парциальная компонента рассеянной волны имеет вид

$$\begin{aligned} \Xi_{\alpha MM'}^{L\tau}(X_\alpha) &= \delta_{M, -m_0} \frac{(-1)^M}{\sqrt{4\pi(2 + 2\delta_{M'0})}} \sum_{n\ell} \sqrt{2\ell + 1} \times \\ &\times \phi_A(x_\alpha) e^{i(p_n y_\alpha - \eta_n \log(2p_n y_\alpha))} \sum_{\lambda=|L-\ell|}^{L+\ell} \frac{Y_{\lambda M'}(\theta_\alpha, 0)}{(1 - z_\alpha^2)^{\frac{M'}{2}}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{p_{n_0}}{p_n}} \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{A}\mathbb{A}_0}^{L\lambda} C_{\lambda, M', \ell, 0}^{L, M'} (1 + \tau(-1)^{\lambda + \ell - L}). \end{aligned} \quad (19)$$

Парциальная амплитуда $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{A}\mathbb{A}_0}^{L\lambda}$ связана с коэффициентами разложения амплитуды $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{A}\mathbb{A}_0}(\hat{\mathbf{y}}_\alpha)$ в ряд по сферическим гармоникам. Можно показать, что сечение рассеяния σ_{AA_0} , определенное равенством (10), может быть выражено формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{AA_0} &= \sum_{L=0}^{+\infty} \sigma_{AA_0}^L, \\ \sigma_{AA_0}^L &= \frac{1}{2m_{\alpha_0(\beta\gamma)}} \frac{1}{2\ell_0 + 1} \sum_{m_0=-\ell_0}^{\ell_0} \sum_{\lambda=|L-\ell|}^{L+\ell} |\mathcal{A}_{\mathbb{A}\mathbb{A}_0}^{L\lambda}|^2, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\sigma_{AA_0}^L$ – парциальные сечения рассеяния, через парциальные компоненты полной амплитуды

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathbb{A}\mathbb{A}_0}^{L\lambda} &= \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbb{A}\mathbb{A}_0}^{L\lambda} + \delta_{AA_0} \times \\ &\times \frac{\sqrt{\pi(2\lambda + 1)}}{ip_{n_0}} \left(e^{i2\sigma_\lambda(\eta_{n_0})} - 1 \right) C_{\lambda, 0, \ell_0, -m_0}^{L, -m_0}. \end{aligned} \quad (21)$$

Вычитая падающую волну из компонент ФМ, получаем неоднородные уравнения (13). Их решение должно удовлетворять нулевым граничным условиям типа Дирихле на прямых $x_\alpha = 0$, $y_\alpha = 0$ и быть асимптотически равным расходящейся волне (19). Полученная таким образом граничная задача решается численно методом сплайн-коллокации. Численная схема описана в работе [11], где заинтересованный читатель может найти ее детальное описание. Для постановки граничного условия в виде расходящихся волн мы используем гибридный базис, который получается добавлением расходящихся волн в набор базисных сплайнов по переменной y_α . Каждая дополнительная базисная функция имеет вид нерегулярной кулоновской функции [23] $u_\ell^+(\eta_n, p_n y_\alpha)$ в асимптотической области, а в остальной части интервала решения является полиномом, подобранным таким образом, что он удовлетворяет нулевым граничным условиям типа Дирихле в начале координат и обеспечивает требуемую непрерывность базисной функции. Использование гибридного базиса, с одной стороны, обеспечивает выполнение граничного условия в виде расходящихся волн. С другой стороны, это уменьшает требуемое для получения решения с заданной точностью количество базисных функций, поскольку дополнительные функции достаточно хорошо описывают поведение решения при больших y_α .

Для получения представленных в статье результатов мы вычисляли сечения рассеяния с точностью не хуже 1%. Бинарные процессы рассеяния обозначаются начальным и конечным состояниями атома. Например, $\text{Ps}(1) \rightarrow \bar{\text{H}}(2)$ означает процесс образования возбужденного антиводорода с $n = 2$ (s и p

состояния) при рассеянии антипротона на основном ($n = 1$) состоянии позитрония. В энергетической области интервала $\text{Ps}(1)$ – $\bar{\text{H}}(2)$, в которой возможны прямой процесс и перестройка с атомами антиводорода и позитрония в начальном и конечном состояниях, мы рассчитали парциальные сечения рассеяния с $L = 0-9$. Парциальные и суммарное сечения рассеяния представлены в табл. 1, на рис. 1 и 2. Значения сравниваются с результатами, полученными другими авторами.

Таблица 1. Полные сечения рассеяния (в единицах πa_0^2), полученные суммированием парциальных сечений до указанного значения полного момента L в энергетической области $\text{Ps}(1)$ – $\bar{\text{H}}(2)$ в сравнении с результатами других авторов

E , а.е.	-0.22947	-0.21832	-0.17955	-0.13828
$\sigma_{\text{Ps}(1) \rightarrow \text{Ps}(1)}^{L \leq 4}$	22.1	20.6	18.8	17.4
[14]	21.95	20.64	18.88	17.23
[15]	22.00	20.57	19.16	18.20
$\sigma_{\text{Ps}(1) \rightarrow \bar{\text{H}}(1)}^{L \leq 4}$		3.31	3.81	4.02
[16]		3.2943	3.7858	4.0551
[15]		3.250	3.779	4.076
$\sigma_{\text{Ps}(1) \rightarrow \bar{\text{H}}(1)}^{L \leq 9}$		3.31	3.82	4.07
[16]		3.2949	3.9795	4.1043

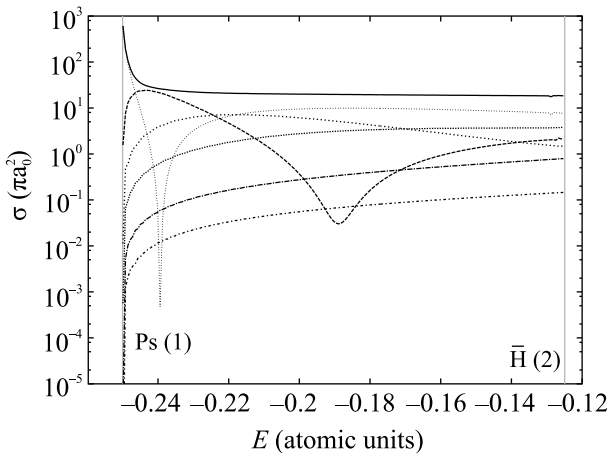


Рис. 1. Парциальные и полное упругие сечения рассеяния (в единицах πa_0^2) антипротона на позитронии в области энергий $\text{Ps}(1)$ – $\bar{\text{H}}(2)$. Полное сечение рассеяния получено суммированием парциальных сечений с $L = 0-9$. Типы линий и парциальные/полные сечения рассеяния: тонкая пунктирная – $L = 0$; штриховая – $L = 1$; разреженная штриховая – $L = 2$; пунктирная – $L = 3$; штрихпунктирная – $L = 5$; разреженная штрихпунктирная – $L = 7$; сплошная – полное

Сравнение наших результатов с результатами других авторов в области энергий выше порога возбужденного состояния антиводорода $\bar{\text{H}}(2)$ приводит-

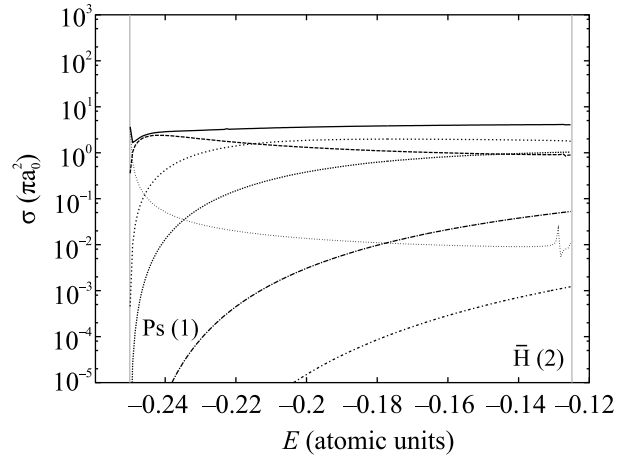


Рис. 2. Парциальные и полное сечения (в единицах πa_0^2) образования антиводорода в энергетической области $\text{Ps}(1)$ – $\bar{\text{H}}(2)$. Полное сечение рассеяния получено суммированием парциальных сечений с $L = 0-9$. Типы линий и парциальные/полные сечения рассеяния: тонкая пунктирная – $L = 0$; штриховая – $L = 1$; разреженная штриховая – $L = 2$; пунктирная – $L = 3$; штрихпунктирная – $L = 5$; разреженная штрихпунктирная – $L = 7$; сплошная – полное

ся в табл. 2 и 3. Хотя в целом совпадение результатов

Таблица 2. Парциальные сечения рассеяния (в единицах πa_0^2) в области энергий $\bar{\text{H}}(2)$ – $\text{Ps}(2)$ в сравнении с результатами других авторов

E , а.е.	-0.11473	-0.09973	-0.08473	-0.07973
$\sigma_{\text{Ps}(1) \rightarrow \text{Ps}(1)}^0$	7.10	6.44	5.82	5.63
[14]	7.09	6.44	5.83	5.63
[27]		6.45		
$\sigma_{\text{Ps}(1) \rightarrow \text{Ps}(1)}^1$	2.26	2.53	2.79	2.87
[14]	2.28	2.54	2.64	2.87
[27]		2.51		
$\sigma_{\text{Ps}(1) \rightarrow \text{Ps}(1)}^2$	1.24	1.03	0.862	0.817
[14]	1.16	1.01	0.929	0.790
[27]		1.02		
$\sigma_{\text{Ps}(1) \rightarrow \bar{\text{H}}(1)}^0$	0.00801	0.00758	0.00719	0.00704
[14]	0.00815	0.00780	0.00729	0.00715
$\sigma_{\text{Ps}(1) \rightarrow \bar{\text{H}}(1)}^1$	0.860	0.807	0.757	0.741
[14]	0.858	0.805	0.742	0.739
$\sigma_{\text{Ps}(1) \rightarrow \bar{\text{H}}(1)}^2$	1.76	1.67	1.59	1.56
[14]	1.77	1.69	1.57	1.58
$\sigma_{\text{Ps}(1) \rightarrow \bar{\text{H}}(2)}^0$	0.0844	0.0952	0.107	0.113
[14]	0.0884	0.0927	0.105	0.114
$\sigma_{\text{Ps}(1) \rightarrow \bar{\text{H}}(2)}^1$	0.273	0.630	0.854	0.908
[14]	0.268	0.632	1.05	0.910

хорошее, наблюдаются некоторые достаточно значительные расхождения значений сечений, связанных

Таблица 3. Парциальные сечения рассеяния (в единицах πa_0^2) в области энергий Ps(2)- \bar{H} (3) в сравнении с результатами других авторов

E , а.е.	-0.06228	-0.06198	-0.06123	-0.05978
$\sigma_{\text{Ps}(1,2) \rightarrow \bar{H}(1)}^0$ [3]	0.169 0.282	0.078 0.097	0.037 0.047	0.022 0.030
$\sigma_{\text{Ps}(1,2) \rightarrow \bar{H}(1)}^1$ [3]	3.67 3.373	1.98 1.783	1.20 1.130	0.944 0.886
$\sigma_{\text{Ps}(1) \rightarrow \bar{H}(2)}^0$ [3]	0.106 0.125	0.105 0.116	0.104 0.112	0.103 0.107
$\sigma_{\text{Ps}(1) \rightarrow \bar{H}(2)}^1$ [3]	0.999 1.041	0.995 1.042	0.993 1.015	0.992 1.040
$\sigma_{\text{Ps}(2) \rightarrow \bar{H}(2)}^0$ [16]	184 218.84	79.9 76.701	34.0 32.481	16.9 17.201
$\sigma_{\text{Ps}(2) \rightarrow \bar{H}(2)}^1$ [16]	479 482.65	229 226.62	102 101.91	50.1 50.73

с возбужденным позитронием, особенно при энергиях чуть выше порога Ps(2). Можно сделать вывод, что получение с хорошей точностью сечений рассеяния с возбужденным позитронием в начальном или конечном состояниях является достаточно сложной задачей как с теоретической, так и вычислительной точек зрения. Сложность связана с тем обстоятельством, что область взаимодействия позитрония и антипротона в этом случае увеличена как за счет медленно убывающей волновой функции возбужденного позитрония, так и за счет дальнего дипольного взаимодействия между позитронием и антипротоном [14].

На рисунках 3 и 4 представлены некоторые парциальные сечения образования антиводорода. На них в сечении $\sigma_{\text{Ps}(1) \rightarrow \bar{H}(2)}^1$ можно обнаружить несколько резонансов Фешбаха.

Резюмируя, мы рассчитали сечения рассеяния процесса образования антиводорода посредством реакции (1) в области энергий как ниже, так и выше порога первого возбужденного состояния позитрония. В будущем мы планируем распространить наши вычисления на области энергии, в которых возможны более высокие возбужденные состояния позитрония.

Работа В. А. Градусова поддержана Российским научным фондом (проект номер 19-72-00076).

Исследования были проведены с использованием вычислительных ресурсов Ресурсного Центра "Вычислительный центр СПбГУ" (<http://cc.spbu.ru>).

1. G. Testera, S. Aghion, C. Amsler, et al. (AEgIS Collaboration), *Hyperfine Interactions* **233**, 13 (2015).

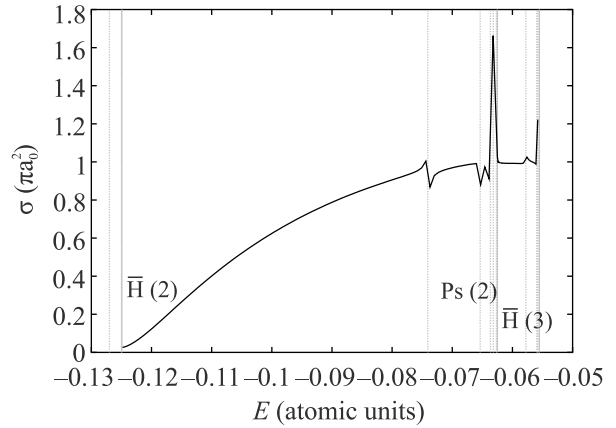


Рис. 3. Сечение образования антиводорода $\sigma_{\text{Ps}(1) \rightarrow \bar{H}(2)}^1$. Вертикальными штриховыми линиями показаны положения резонансов [28–31]

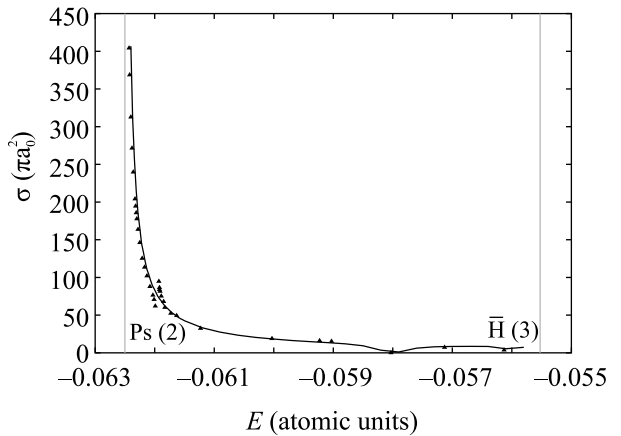


Рис. 4. Сечение образования антиводорода $\sigma_{\text{Ps}(2) \rightarrow \bar{H}(1,2)}^0$. Черными треугольниками отмечены точки, соответствующие работе [5] (получены в частном порядке от доктора Р. Лазаускаса)

2. P. Pérez, D. Banerjee, F. Biraben et al. (Collaboration), *Hyperfine Interactions* **233**, 21 (2015).
 3. C.-Y. Hu and D. Caballero, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **35**, 3879 (2002).
 4. C.-Y. Hu, D. Caballero, and Z. Papp, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 063401 (2002).
 5. M. Valdes, M. Dufour, R. Lazauskas, and P.-A. Hervieux, *Phys. Rev. A* **97**, 012709 (2018).
 6. C. M. Rawlins, A. S. Kadyrov, A. T. Stelbovics, I. Bray, and M. Charlton, *Phys. Rev. A* **93**, 012709 (2016).
 7. A. S. Kadyrov, I. Bray, M. Charlton, and I. I. Fabrikant, *Nat. Commun.* **8**, 1544 (2017).
 8. D. Krasnicky, G. Testera, and N. Zurlo, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **52**, 115202 (2019).
 9. М. Гайлитис, Р. Дамбург, *ЖЭТФ* **44**, 1644 (1963).
 10. M. Gailitis and R. Damburg, *Proc. Phys. Soc.* **82**, 192 (1963).

11. V. A. Gradusov, V. A. Roudnev, E. A. Yarevsky, and S. L. Yakovlev, *Commun. Comput. Phys.* **30**, 255 (2021).
12. С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, М. (1985).
13. V. V. Kostykin, A. A. Kvitsinsky, and S. P. Merkuriev, *Few Body Syst.* **6**, 97 (1989).
14. С.-Y. Hu, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **32**, 3077 (1999).
15. T. T. Gien, *Phys. Rev. A* **56**, 1332 (1997).
16. С.-Y. Hu, D. Caballero, and Z. Hlousek, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **34**, 331 (2001).
17. S. P. Merkuriev, *Ann. Phys.* **130**, 395 (1980).
18. V. A. Gradusov, V. A. Roudnev, and S. L. Yakovlev, *Atoms* **4**, 9 (2016).
19. V. A. Gradusov, V. A. Roudnev, E. A. Yarevsky, and S. L. Yakovlev, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **52**, 055202 (2019).
20. С. Л. Яковлев, Э. Папш, *ТМФ* **163**, 314 (2010).
21. Z. Papp, С.-Y. Hu, Z. T. Hlousek, B. Kónya, and S. L. Yakovlev, *Phys. Rev. A* **63**, 062721 (2001).
22. NIST Digital Library of Mathematical Functions (<http://dlmf.nist.gov/>, 2019).
23. А. Мессиа, *Квантовая механика*, Наука, М. (1978), т. 1.
24. Д. А. Варшалович, В. К. Херсонский, Е. В. Орленко, А. Н. Москалев, *Квантовая теория углового момента и ее приложения*, Физматлит, М. (2017), т. 1.
25. Л. Биденхарн, Дж. Лаук, *Угловой момент в квантовой физике*, Мир, М. (1984), т. 1.
26. A. Scrinzi, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **29**, 6055 (1996).
27. J. Mitroy and K. Ratnavelu, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **28**, 287 (1995).
28. Y. K. Ho and Z.-C. Yan, *Phys. Rev. A* **70**, 032716 (2004).
29. K. Varga, J. Mitroy, J. Zs. Mezei, and A. T. Kruppa, *Phys. Rev. A* **77**, 044502 (2008).
30. R.-M. Yu, Y.-J. Cheng, L.-G. Jiao, and Y.-J. Zhou, *Chin. Phys. Lett.* **29**, 053401 (2012).
31. M. Umair and S. Jonsell, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **47**, 225001 (2014).