

## Корреляционные свойства оптико-терагерцового бифотонного поля

П. А. Прудковский<sup>1)</sup>

Физический факультет, МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 13 июля 2021 г.

После переработки 13 июля 2021 г.

Принята к публикации 13 июля 2021 г.

Работа посвящена теоретическому исследованию влияния структуры угловых мод оптико-терагерцового бифотонного поля, возникающего при сильно-невырожденном параметрическом рассеянии, на возможность измерения неклассических корреляционных свойств этого поля. В работе показано, что если частота холостого излучения лежит в терагерцовом диапазоне, оператор нелинейного взаимодействия, описывающий параметрическое рассеяние, может быть диагонализирован в пространстве азимутальных углов. Это позволяет найти собственные азимутальные моды и определить матрицу рассеяния при произвольных коэффициентах параметрического взаимодействия. Полученная матрица рассеяния используется для того, чтобы найти зависимости величин нормированной корреляционной функции и фактора подавления шума оптико-терагерцового бифотонного поля от значений угловых апертур детекторов, регистрирующих сигнальное и холостое излучение.

DOI: 10.31857/S1234567821160023

Свойства бифотонного излучения, возникающего при параметрическом рассеянии света (ПР), уже давно используются в квантовых технологиях [1], спектроскопии [2] и безэталонной фотометрии [3, 4]. Частоты сопряженных фотонов, рождающихся при ПР, могут существенно различаться. Это позволило развить методы нелинейной интерферометрии, в которых для исследования свойств вещества в одном диапазоне частот достаточно измерять интенсивность сигнального излучения, лежащего совсем в другом спектральном диапазоне [5–8], а также методы построения фантомных изображений (*ghost imaging*) в ИК-диапазоне [9] и в рентгеновском излучении [10, 11].

По мере освоения терагерцового диапазона некоторые из применений бифотонных полей удастся перенести и в эту частотную область. Так, за последнее десятилетие удалось использовать сильно-невырожденное ПР для спектроскопии нелинейных кристаллов в терагерцовом диапазоне частот [12–14], реализовать схему нелинейной интерференции для измерения показателя преломления в этом же частотном диапазоне [15, 16] и методику безэталонного измерения яркости терагерцового излучения [17, 18].

Однако методы, требующие регистрации одиночных фотонов в различных пространственных модах, активно применяемые в оптическом и ближнем ИК-диапазоне, не так просто перенести в терагерцовый диапазон. Это связано с тем, что пока что практиче-

ски не существует детекторов, способных регистрировать отдельные фотоны на терагерцовых частотах, а также с тем, что из-за больших длин волн структура пространственных мод оптико-терагерцового бифотонного излучения оказывается сильно перепутанной. В результате квантовые корреляции, необходимые для реализации квантовооптических приложений, таких как безэталонная калибровка фотодетекторов, построение фантомных изображений и пр., между оптическими и терагерцовыми фотонами пока что не зарегистрированы. Даже в среднем ИК-диапазоне это пока что представляет непростую задачу [19, 20], а в области терагерцовых частот сложностей еще больше. Тем не менее, слабое терагерцовое излучение, возникающее в процессе ПР, удастся зарегистрировать при помощи сверхпроводящего болометра [21, 22], и до одновременной регистрации сигнальных оптических и холостых терагерцовых фотонов осталось, по-видимому, не так уж и много времени.

Однако на сегодняшний день существуют лишь теоретические работы, описывающие квантовые корреляционные параметры оптико-терагерцовых бифотонных состояний. Влияние тепловых флуктуаций и поглощения нелинейного кристалла в случае спонтанного ПР на величину корреляционной функции сигнального оптического и холостого терагерцового излучения исследуется в работах [23, 24] при помощи обобщенного закона Клышко–Киргофа. Тепловыми флуктуациями поля можно пренебречь, если нелинейный кристалл охлажден до единиц граду-

<sup>1)</sup>e-mail: vysogota@gmail.com

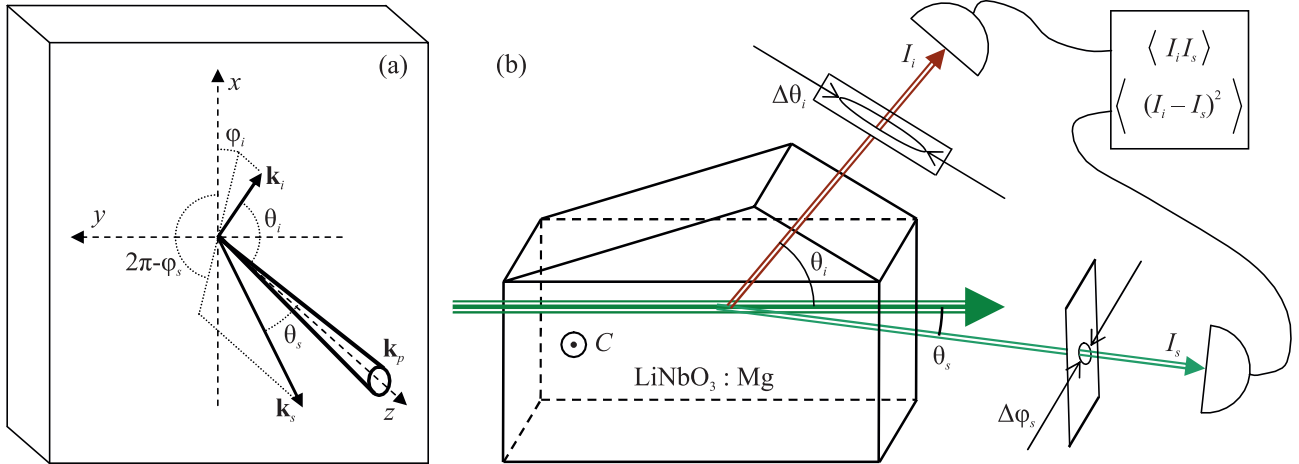


Рис. 1. (Цветной онлайн) (а) – Геометрия рассеяния: пучок накачки с волновым вектором  $\mathbf{k}_p$  направлен вдоль оси  $z$ , направления волновых векторов сигнальной  $\mathbf{k}_s$  и холостой  $\mathbf{k}_i$  мод рассеянного излучения определяются полярными  $\theta_{s,i}$  и азимутальными  $\varphi_{s,i}$  углами; (б) – условная схема измерения корреляционных свойств интенсивностей сигнального  $I_s$  и холостого  $I_i$  излучения, прошедшего через диафрагмы с угловыми апертурами  $\Delta\theta_{s,i}$  и  $\Delta\varphi_{s,i}$

сов Кельвина, а поглощение становится несущественным, если частота холостого излучения существенно меньше нижней фоновой ветви. В этих условиях оказалось возможным получить матрицу рассеяния, описывающую бифотонное оптико-терагерцовое поле при произвольных коэффициентах параметрического усиления [25].

В данной работе на основе метода, развитого в [25], будет исследовано, как модовая структура оптико-терагерцового излучения влияет на величины нормированной корреляционной функции интенсивностей и дисперсии разности фотонов в сопряженных модах, измеряемых в конкретных экспериментальных условиях.

**Азимутальные собственные моды и матрица рассеяния.** Рассмотрим бифотонное поле на частотах сигнального  $\omega_s$  и холостого  $\omega_i$  излучения, рождающееся при ПР в нелинейном кристалле под действием гауссова пучка накачки с частотой  $\omega_p = \omega_s + \omega_i$ . Геометрия рассеяния изображена на рис. 1а. В рамках подхода, описанного в [26], его можно описывать с помощью оператора нелинейного взаимодействия

$$\hat{G}_{nl} = \hbar\gamma \iint \frac{\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\theta_s, \varphi_s, \theta_i, \varphi_i)}{\sqrt{\cos\theta_s \cos\theta_i}} \times e^{i\Delta k_z z - \frac{d^2(\mathbf{k}_{s\perp} + \mathbf{k}_{i\perp})^2}{4}} \hat{a}_s^+(z) \hat{a}_i^+(z) d\Omega_s d\Omega_i + \text{h.c.} \quad (1)$$

Здесь  $\hat{a}_{s,i}^+$  – операторы рождения фотонов в различных сигнальных и холостых модах плоских волн рассеянного излучения с волновыми векторами  $\mathbf{k}_{s,i}$ , направление которых определяется полярными  $\theta_{s,i}$  и

азимутальными  $\varphi_{s,i}$  углами,  $d\Omega_{s,i}$  – элементы телесных углов,  $\chi_{\text{eff}}^{(2)}$  – результат свертки тензора квадратичной восприимчивости с векторами поляризации накачки и рассеянных полей, косинусы в знаменателе связаны с тем, что длина пути излучения в кристалле зависит от полярного угла,  $d$  – ширина пучка накачки,  $\Delta k_z = k_{pz} - k_{sz} - k_{iz}$  – продольная расстройка фазового синхронизма, для поперечных компонент волновых векторов выполняется строгое условие  $\mathbf{k}_{s\perp} + \mathbf{k}_{i\perp} = \mathbf{k}_{p\perp}$ , а коэффициент  $\gamma$  определяет эффективность параметрического взаимодействия и пропорционален амплитуде поля накачки. В этом случае эволюция операторов рождения фотонов в кристалле описывается уравнениями

$$\frac{\partial \hat{a}_{s,i}^+}{\partial z} = \frac{i}{\hbar} \left[ \hat{a}_{s,i}^+, \hat{G}_{nl} \right]. \quad (2)$$

В работе [25] было показано, что в случае сильно невырожденного ПР, когда частота холостого излучения не превышает нескольких терагерцев, оператор нелинейного взаимодействия можно диагонализировать в общем виде в пространстве азимутальных углов. Показатель экспоненты в (1) можно переписать в виде

$$i\Delta k_z - \frac{d^2(\mathbf{k}_{s\perp} + \mathbf{k}_{i\perp})^2}{4} \approx i \left( \Delta k_{z0} - \frac{\Delta k_{\perp}^2}{2k_p} \right) z - \frac{d^2 \Delta k_{\perp}^2}{4} - 2\tau \left( 1 + \frac{2iz}{d^2 k_p} \right) \cos^2 \left( \frac{\varphi_i - \varphi_s}{2} \right), \quad (3)$$

где  $\Delta k_{\perp} = k_i \sin\theta_i - k_s \sin\theta_s$ ,  $\Delta k_{z0} = k_p - (k_i \cos\theta_i + k_s \cos\theta_s)$ , а параметр  $\tau = d^2 k_i k_s \sin\theta_i \sin\theta_s / 2$ . Мак-

симум рассеяния наблюдается в направлениях, определяемых условием полного фазового синхронизма, при котором все три слагаемых в этом выражении обращаются в ноль. Обычно величина  $2z/d^2k_p \ll 1$ , а параметр  $\tau$  по мере уменьшения частоты холостого терагерцового излучения быстро уменьшается, поэтому при достаточно низких частотах  $\omega_i$  мнимой частью последнего слагаемого, зависящего от азимутальных углов, можно пренебречь. В этом случае оператор нелинейного взаимодействия принимает вид:

$$\begin{aligned} \hat{G}_{nl} \approx \hbar\gamma \int \left\{ e^{i(\Delta k_{z0} - \Delta k_{\perp}^2/2k_p)z - d^2\Delta k_{\perp}^2/4} \times \right. \\ \times \frac{\sin\theta_s \sin\theta_i}{\sqrt{\cos\theta_s \cos\theta_i}} d\theta_s d\theta_i \times \\ \times \left[ \int \chi_{\text{eff}}^{(2)}(\theta_s, \varphi_s, \theta_i, \varphi_i) e^{-\tau\{1+\cos(\varphi_i - \varphi_s)\}} \times \right. \\ \left. \left. \times \hat{a}_i^+(z) \hat{a}_s^+(z) d\varphi_s d\varphi_i \right] + \text{h.c.} \right\}. \quad (4) \end{aligned}$$

Часть выражения в квадратных скобках содержит все зависимости от углов  $\varphi_{s,i}$  и при этом не зависит от  $z$ , поэтому его можно диагонализировать по азимутальным углам в общем виде.

В расчетах мы будем рассматривать, как и в работах [24, 25], ПР в еее-геометрии в кристалле ниобата лития толщиной  $L = 1$  мм под действием пучка накачки шириной  $d = 300$  мкм на длине волны  $\lambda_p = 523.3$  нм. Если частота холостого излучения находится в диапазоне от 0.01 до 2 ТГц, то полярный угол синхронизма  $\theta_i \approx 60^\circ$ . При этом в [24] было показано, что параметр Федорова [27], дающий оценку числа мод Шмидта, для полярных углов практически равен единице. Это значит, что в пространстве полярных углов практически все рассеяние сосредоточено в единственной паре сопряженных мод, сконцентрированных вблизи направлений, соответствующих условию точного фазового синхронизма. При этом эффективная квадратичная восприимчивость имеет вид

$$\begin{aligned} \chi_{\text{eff}}^{(2)}(\theta_s, \varphi_s, \theta_i, \varphi_i) = \chi_0^{(2)} \cos\theta_s \cos\theta_i \times \\ \times \sqrt{(1 + \text{tg}^2\theta_s \cos^2\varphi_s)(1 + \text{tg}^2\theta_i \cos^2\varphi_i)} \approx \\ \approx \frac{1}{2} \chi_0^{(2)} \sqrt{1 + 3 \cos^2\varphi_i}. \quad (5) \end{aligned}$$

Для удобства дальнейших расчетов ее можно приближенно аппроксимировать более простым выражением

$$\chi_{\text{eff}}^{(2)}(\varphi_i) \approx \frac{1}{2} \chi_0^{(2)} (1 + \cos^2\varphi_i). \quad (6)$$

В результате, для исследования структуры азимутальных мод достаточно анализировать оператор нелинейного взаимодействия в виде

$$\begin{aligned} \hat{G}_{nl} \sim \int \chi_{\text{eff}}^{(2)}(\varphi_i) e^{-\tau\{1+\cos(\varphi_i - \varphi_s)\}} \times \\ \times \hat{a}_i^+(\varphi_i, z) \hat{a}_s^+(\varphi_s, z) d\varphi_s d\varphi_i + \text{h.c.} \quad (7) \end{aligned}$$

В работе [25] было показано, что диагонализация этого выражения может быть проведена в два этапа. На первом мы переходим в базис мод Фурье  $\hat{a}_{s,i}^+(\varphi_{s,i}) = (2\pi)^{-1/2} \sum_n \hat{a}_n^{+(s,i)} e^{in\varphi_{s,i}}$ . При этом оператор (7) принимает вид

$$\hat{G}_{nl} = \hbar\tilde{\gamma} \sum_{n,m} H_{n,m} \hat{a}_n^{+(i)} \hat{a}_{-m}^{+(s)} + \text{h.c.}, \quad (8)$$

где  $\tilde{\gamma}$  – коэффициент параметрического взаимодействия, включающий в себя коэффициент  $\gamma$ , величину квадратичной восприимчивости  $\chi_0^{(2)}$  и коэффициенты, связанные с полярными углами, а элементы матрицы  $H_{nm}$  зависят от угловой зависимости эффективной квадратичной восприимчивости и в нашем случае имеют вид

$$H_{nm} = (-1)^n e^{-\tau} I_m(\tau) \left\{ \delta_{n,m} + \frac{1}{6} \delta_{n+2,m} + \frac{1}{6} \delta_{n-2,m} \right\}. \quad (9)$$

Здесь  $I_m(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\tau \cos x} \cos(mx) dx$  – функции Инфельда. При любом значении  $\tau$  величина  $e^{-\tau} I_m(\tau)$  уменьшается с ростом  $m$ , что дает возможность на втором этапе ограничиться матрицей конечных размеров  $|n|, |m| \leq n_{\text{max}}$  и диагонализировать ее численно, представив в виде

$$H_{nm} = \sum_j W_{nj}^{-1} R_j V_{jm}, \quad (10)$$

где  $V$  и  $W$  – ортогональные матрицы, а  $\{R_j\}$  – собственные значения матрицы  $H_{nm}$ . В результате оператор нелинейного взаимодействия принимает диагональный вид

$$\hat{G}_{nl} = \hbar\tilde{\gamma} \sum_j R_j \hat{b}_j^+(z) \hat{c}_j^+(z) + \text{h.c.}, \quad (11)$$

где  $\hat{b}_j^+(z) = \int_{-\pi}^\pi U(\varphi_i) \hat{a}_i^+(z, \varphi_i) d\varphi_i$  и  $\hat{c}_j^+(z) = \int_{-\pi}^\pi \tilde{U}(\varphi_s) \hat{a}_s^+(z, \varphi_s) d\varphi_s$  – операторы рождения фотонов в собственных азимутальных модах, связанных с исходными модами плоских волн унитарными преобразованиями  $U_j(\varphi_j) = (2\pi)^{-1/2} \sum_n e^{in\varphi_j} W_{jn}$ ,

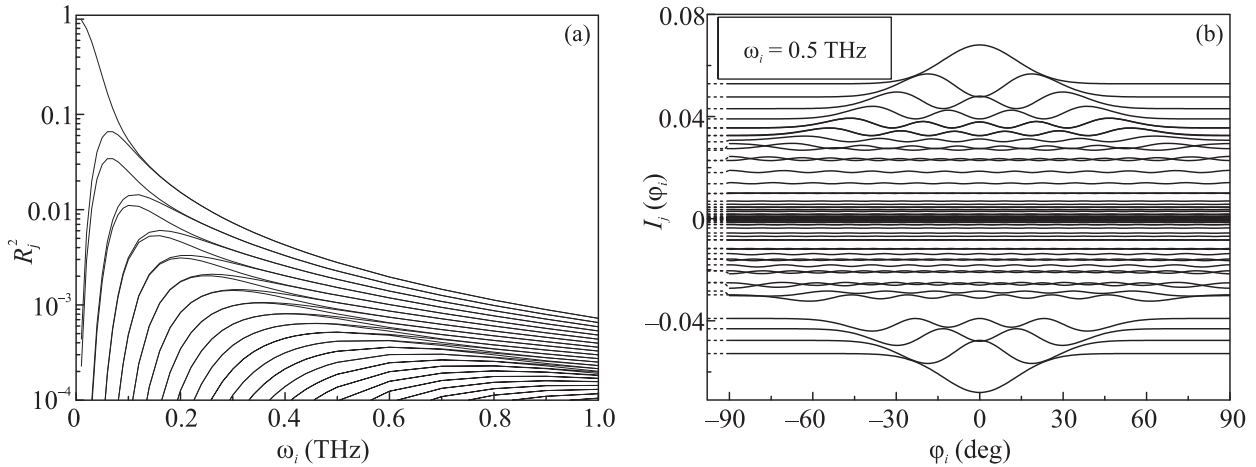


Рис. 2. (а) – Зависимость квадратов собственных значений  $R_j^2$  от частоты терагерцового излучения  $\omega_i$ ; (б) – угловая структура азимутальных собственных мод холостого излучения при частоте  $\omega_i = 0.5$  ТГц (для наглядности каждая мода показана относительно уровня ее собственного значения  $R_j$ :  $I_j(\varphi_i) = R_j(1 + 2\pi|R_j||U_j(\varphi_i)|^2)$ , сам уровень показан пунктиром слева)

$\tilde{U}_j(\varphi_s) = (2\pi)^{-1/2} \sum_m e^{im\varphi_s} V_{jm}$ . Решение уравнений эволюции для операторов  $\hat{b}_j^+$  и  $\hat{c}_j^+$  имеет вид преобразований Боголюбова

$$\begin{aligned} \hat{b}_j^+(L) &= \hat{b}_j^+(0) \cosh g_j - i\hat{c}_j(0) \sinh g_j, \\ \hat{c}_j^+(L) &= \hat{c}_j^+(0) \cosh g_j - i\hat{b}_j(0) \sinh g_j, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $g_j = \tilde{\gamma}LR_j$ . Это позволяет записать матрицу рассеяния в исходных модах, которая описывает квантовые корреляционные свойства оптико-терагерцового бифотонного излучения при произвольных значениях коэффициента параметрического усиления:

$$\begin{aligned} \hat{a}_i^+(\varphi_i, L) &= \sum_j U_j(\varphi_i) \{ \hat{b}_i^+(0) \cosh g_j - i\hat{c}_j(0) \sinh g_j \}, \\ \hat{a}_s^+(\varphi_s, L) &= \sum_j \tilde{U}_j^*(\varphi_s) \{ \hat{c}_i^+(0) \cosh g_j - i\hat{b}_j(0) \sinh g_j \}. \end{aligned} \quad (13)$$

**Корреляционная функция и фактор подавления шума.** Рассмотрим возможность измерения корреляционных свойств оптико-терагерцового поля в схеме, изображенной на рис. 1б. Интенсивности холостого и сигнального излучения, прошедшего через диафрагму с угловыми апертурами  $\Delta\theta_{s,i}$  и  $\Delta\varphi_{s,i}$ , регистрируются соответствующими детекторами, фототоки которых далее сводятся на обрабатывающей аппаратуре. Предполагается, что апертуры полярных углов выбраны в соответствии с шириной фазового синхронизма. Например, на частоте  $\omega_i = 1$  ТГц, согласно [24],  $\Delta\theta_s \sim 0.04^\circ$  и  $\Delta\theta_i \sim 4^\circ$ . Для простоты будем везде использовать величины углов внут-

ри кристалла (при необходимости их можно пересчитать в углы после выхода из кристалла).

Используя матрицу рассеяния (13), можно получить зависимость интенсивности рассеянного излучения от азимутального угла:

$$\begin{aligned} I_i(\varphi_i) \sim \langle N_i(\varphi_i) \rangle &= \langle \text{vac} | \hat{a}_i^+(\varphi_i, L) \hat{a}_i(\varphi_i, L) | \text{vac} \rangle = \\ &= \sum_j |U_j(\varphi_i)|^2 \sinh^2 g_j, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\langle N_i(\varphi_i) \rangle$  – среднее число фотонов холостого излучения, рассеянного в данном направлении. Для сигнального излучения можно записать аналогичное выражение. Видно, что интенсивность состоит из суммы интенсивностей азимутальных собственных мод  $|U_j(\varphi_i)|^2$  с весами  $\sinh^2 g_j$ . В случае спонтанного ПР  $\tilde{\gamma}L \ll 1$  веса определяются квадратами собственных значений  $R_j^2$ . На рисунке 2а показана зависимость величин  $R_j^2$  от частоты холостого излучения. При малых частотах практически все излучение сосредоточено в единственной азимутальной моде, однако с ростом частоты терагерцового излучения различие между собственными значениями уменьшается, и излучение оказывается распределено между большим количеством мод. На рисунке 2б показана структура азимутальных собственных мод холостого излучения при частоте терагерцового излучения  $\omega_i = 0.5$  ТГц. Структура азимутальных собственных мод сигнального излучения, несмотря на различие между унитарными операторами  $U_j(\varphi_i)$  и  $\tilde{U}_j(\varphi_s)$ , выглядит практически так же. Видно, что азимутальные собственные моды оказываются перемешаны, и детекторы неизбежно будут регистриро-

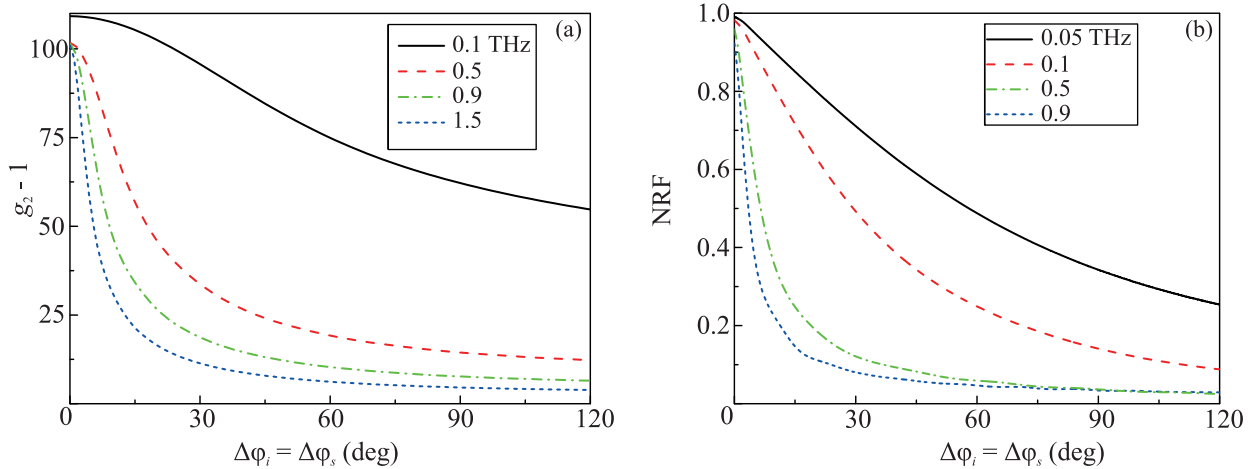


Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимость от величины апертур детекторов  $\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_s$  в случае спонтанного ПР: (а) – превышения  $g_2$  над единицей и (б) – величины NRF при различных значениях частоты холостого терагерцового излучения

вать многомодовое излучение, что усложняет возможность регистрации корреляционных свойств.

Существует два основных способа измерения неклассических корреляций в бифотонном поле [28]: нормированная корреляционная функция интенсивностей холостого и сигнального излучения и дисперсия разности чисел фотонов в сопряженных модах (NRF, фактор подавления шума). Нормированная корреляционная функция

$$g_2 = \frac{\langle I_i I_s \rangle}{\langle I_i \rangle \langle I_s \rangle}, \quad (15)$$

которая в случае независимых полей равна единице, может достигать больших значений для спонтанного ПР, но падает обратно пропорционально числу регистрируемых мод, а в случае вынужденного ПР даже в одномодовом случае спадает до уровня теплового излучения  $g_2 = 2$ . В то же время фактор подавления шума, также равный единице в случае независимых полей, в случае идеальной регистрации сопряженных мод бифотонного поля стремится к нулю и практически не зависит от числа мод и коэффициента параметрического усиления, однако весьма чувствителен к потерям части излучения, принадлежащего детектируемым модам. Как видно из рис. 2b, вклад различных мод в детектируемое излучение будет зависеть от апертур диафрагм  $\Delta\varphi_{s,i}$ , поэтому и  $g_2$ , и NRF также будут зависеть от них.

Пусть детекторы регистрируют интенсивности холостого и сигнального излучения

$$\langle I_i \rangle = \int_{-\Delta\varphi_i/2}^{\Delta\varphi_i/2} I_i(\varphi_i) d\varphi_i \sim \langle N_i \rangle =$$

$$= \int_{-\Delta\varphi_i/2}^{\Delta\varphi_i/2} \sum_j |U_j(\varphi_i)|^2 \sinh^2 g_j d\varphi_i, \quad (16)$$

$$\langle I_s \rangle = \int_{\pi-\Delta\varphi_s/2}^{\pi+\Delta\varphi_s/2} I_s(\varphi_s) d\varphi_s \sim \langle N_s \rangle =$$

$$= \int_{\pi-\Delta\varphi_s/2}^{\pi+\Delta\varphi_s/2} \sum_j |\tilde{U}_j(\varphi_s)|^2 \sinh^2 g_j d\varphi_s,$$

Их корреляционную функцию можно найти также с помощью матрицы рассеяния (13):

$$\begin{aligned} \langle I_i I_s \rangle \sim \langle N_i N_s \rangle &= \iint_{\Delta\varphi_{i,s}} \langle \text{vac} | \hat{a}_i^+(\varphi_i, L) \hat{a}_i(\varphi_i, L) \times \\ &\times \hat{a}_s^+(\varphi_s, L) \hat{a}_s(\varphi_s, L) | \text{vac} \rangle d\varphi_i d\varphi_s = \langle N_i \rangle \langle N_s \rangle + \\ &+ \iint_{\Delta\varphi_{i,s}} \left| \sum_j U_j(\varphi_i) \tilde{U}_j^*(\varphi_s) \sinh g_j \cosh g_j \right|^2 d\varphi_i d\varphi_s. \end{aligned} \quad (17)$$

Второй член в этом выражении отвечает за отличие  $g_2$  от единицы. На рисунке 3а показана рассчитанная по этой формуле зависимость превышения  $g_2$  над единицей от величины апертур детекторов  $\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_s$  для случая спонтанного ПР. Известно [28], что в этом случае величина корреляционной функции определяется выражением  $g_2 = 1 + \frac{1}{mN}$ , где  $N \ll 1$  – среднее число фотонов в моде, которое в нашем случае порядка  $N \sim (\tilde{\gamma}LR_j)^2$ , а  $m$  – число регистрируемых мод. Вообще говоря, значение  $g_2$  в

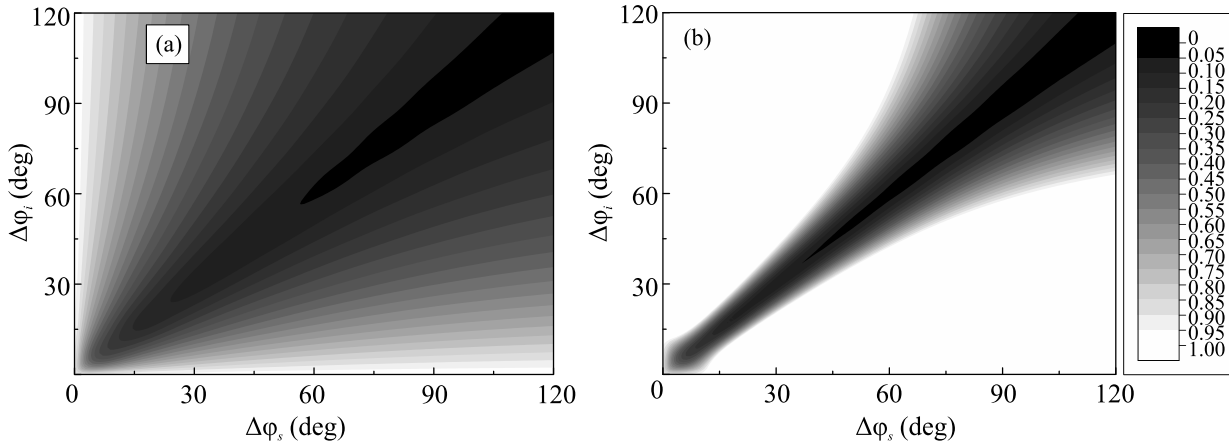


Рис. 4. Двумерные зависимости величины NRF от угловых апертур детекторов при значении частоты холостого излучения  $\omega_i = 0.9$  ТГц в случае: (а) – спонтанного ПР  $\tilde{\gamma}L \ll 1$  и (б) – вынужденного ПР при  $\tilde{\gamma}LR_{\max} = 2$

максимуме может зависеть от частоты терагерцового излучения, так как параметр  $\gamma \sim \sqrt{\omega_i}$ , а значения  $R_j$  с ростом частоты уменьшаются. Для наглядности на рис. За значения  $\tilde{\gamma}$  выбирались такими, чтоб в максимуме величина  $g_2$  была порядка сотни. Видно, что чем выше частота терагерцового излучения, тем быстрее корреляционная функция спадает с ростом апертур детекторов. Это связано с тем, что число эффективных мод растет с ростом частоты, а чем больше апертуры детекторов – тем больше мод дают вклад в зарегистрированное излучение. Таким образом, для регистрации высоких значений  $g_2$  следует по возможности использовать детекторы с малыми апертурами по азимутальным углам.

Как и следовало ожидать, значение  $g_2$  в максимуме при больших значениях коэффициента параметрического взаимодействия  $\tilde{\gamma}L > 1$  спадает до двух. В этом случае более показательным является фактор подавления шума, определяемый как

$$\text{NRF} = \frac{\langle \Delta(N_i - N_s)^2 \rangle}{\langle N_i \rangle + \langle N_s \rangle}. \quad (18)$$

Так как в бифотонном поле в сопряженных модах одинаковое число фотонов, то в случае идеальной их регистрации он равен нулю. Однако если при детектировании происходит потеря части фотонов – как из-за неполной регистрации мод, так и из-за неидеальности детекторов, дисперсия разности фотонов увеличивается. Особенно быстро она возрастает, если детекторы регистрируют разное среднее число фотонов  $\langle N_i \rangle \neq \langle N_s \rangle$ . В этом случае в работах, посвященных использованию NRF для определения квантовой эффективности детекторов [29, 30], предлагалось в выражении для фактора подавления шума модифицировать интенсивность одного из каналов ко-

эффициентом  $\alpha = \langle N_i \rangle / \langle N_s \rangle$ . В наших расчетах мы будем использовать более симметричное выражение для модифицированного фактора подавления шума

$$\begin{aligned} \text{NRF} &= \frac{\langle (\beta^{-1}N_i - \beta N_s)^2 \rangle}{\langle N_i \rangle + \langle N_s \rangle} = \\ &= 1 + \frac{\beta^{-2} \langle : \delta N_i^2 : \rangle + \beta^2 \langle : \delta N_s^2 : \rangle - 2 \langle \delta N_i \delta N_s \rangle}{\langle N_i \rangle + \langle N_s \rangle}, \quad (19) \end{aligned}$$

где  $\beta = \sqrt{\langle N_i \rangle / \langle N_s \rangle}$ ,  $\delta N_{i,s} = N_{i,s} - \langle N_{i,s} \rangle$ , среднее  $\langle \delta N_i \delta N_s \rangle$  уже найдено в (17), а нормально упорядоченные средние, найденные с помощью матрицы рассеяния (13), имеют вид:

$$\begin{aligned} \langle : \delta N_i^2 : \rangle &= \langle N_i^2 \rangle - \langle N_i \rangle^2 - \langle N_i \rangle = \\ &= \iint_{\Delta \varphi_i} \left| \sum_j U_j(\varphi_1) U_j^*(\varphi_2) \text{sh}^2 g_j \right|^2 d\varphi_1 d\varphi_2, \\ \langle : \delta N_s^2 : \rangle &= \langle N_s^2 \rangle - \langle N_s \rangle^2 - \langle N_s \rangle = \\ &= \iint_{\Delta \varphi_s} \left| \sum_j \tilde{U}_j(\varphi_1) \tilde{U}_j^*(\varphi_2) \text{sh}^2 g_j \right|^2 d\varphi_1 d\varphi_2. \quad (20) \end{aligned}$$

На рисунке 3б показана зависимость NRF, рассчитанного по формуле (19), от величины апертур детекторов  $\Delta \varphi_i = \Delta \varphi_s$ . По мере роста апертур детектируется все большая часть азимутальных собственных мод, что объясняет спадание величины NRF. При низких частотах терагерцового холостого излучения угловая ширина отдельных мод больше, что объясняет более медленное спадание фактора подавления шума. Эти зависимости практически не зависят от величины коэффициента параметрического усиления  $\tilde{\gamma}L$ . Отличие спонтанного и вынужденного

ПР проявляется, если апертуры сигнального и холостого детекторов различны. На рисунке 4 показаны двумерные графики зависимости величины NRF от угловых апертур детекторов для случая спонтанного ПР  $\tilde{\gamma} \ll 1$  и вынужденного ПР при  $\tilde{\gamma}LR_{\max} = 2$  для частоты терагерцового излучения  $\omega_i = 0.9$  ТГц. Видно, что в вынужденном режиме NRF намного более чувствителен к дисбалансу регистрируемых сопряженных мод.

Таким образом, в случае сильно-невырожденного ПР, когда частота холостого излучения лежит в терагерцовом диапазоне, а его длина волны сравнима с размерами рассеивающего объема, азимутальные моды рассеянного излучения имеют большие угловые ширины и накладываются друг на друга (рис. 2b). Это усложняет детектирование фотонов сигнального и холостого излучения в сопряженных модах и измерение их неклассических корреляционных свойств. С другой стороны, в этом случае можно приближенно диагонализировать оператор нелинейного взаимодействия в пространстве азимутальных углов, что позволило получить матрицу рассеяния (13) при произвольных коэффициентах параметрического взаимодействия. С помощью полученной матрицы рассеяния в работе были рассчитаны зависимости нормированной корреляционной функции  $g_2$  и фактора подавления шума в зависимости от угловых апертур детекторов сигнального и холостого излучения. Полученные зависимости говорят о том, что для регистрации высоких значений  $g_2$  желательно уменьшать апертуры обоих детекторов по азимутальным углам, насколько это возможно. В то же время, для наблюдения низких значений NRF апертуры обоих детекторов по азимутальным углам должны быть по возможности большими, и при этом одинаковыми.

Работа выполнена при поддержке гранта Российский фонд фундаментальных исследований # 20-02-00621А.

1. D. Bouwmeester, A. Ekert, and A. Zeilinger, *Quantum Teleportation, and Quantum Computation*, Springer, N.Y. (2000).
2. K. A. Kuznetsov, H. C. Guo, G. K. Kitaeva, A. A. Ezhov, D. A. Muzychenko, A. N. Penin, and S. H. Tang, *Appl. Phys. B* **83**, 273 (2006).
3. Д. Н. Клышко, А. Н. Пенин, *УФН* **152**, 653 (1987).
4. L. Qi, F. Just, G. Leuchs, and M. V. Chekhova, *Opt. Express* **24**, 26444 (2016).
5. D. A. Kalashnikov, A. V. Paterova, S. P. Kulik, and L. A. Krivitsky, *Nat. Photonics* **10**, 98 (2016).
6. S. K. Lee, T. H. Yoon, and M. Cho, *Sci. Rep.* **7**, 6558 (2017).
7. A. Paterova, S. Lung, D. A. Kalashnikov, and L. A. Krivitsky, *Sci. Rep.* **7**, 42608 (2017).
8. I. Kviatkovsky, H. M. Chrzanowski, E. G. Avery, H. Bartolomaeus, and S. Ramelow, *Sci. Adv.* **6**, eabd0264 (2020).
9. P.-A. Moreau, E. Toninelli, T. Gregory, and M. J. Padgett, *Laser Photonics Rev.* **12**, 1700143 (2018).
10. A.-X. Zhang, Y.-H. He, L.-A. Wu, L.-M. Chen, and B.-B. Wang, *Optica* **5**, 374 (2018).
11. A. Schori, D. Borodin, K. Tamasaku, and S. Shwartz, *Phys. Rev. A* **97**, 063804 (2018).
12. K. A. Kuznetsov, S. P. Kovalev, G. K. Kitaeva, T. D. Wang, Y. Y. Lin, Y. C. Huang, I. I. Naumova, and A. N. Penin, *Appl. Phys. B* **101**, 811 (2010).
13. K. A. Kuznetsov, G. Kh. Kitaeva, S. P. Kovalev, S. A. Germansky, A. M. Buryakov, A. N. Tuchak, and A. N. Penin, *Appl. Phys. B* **122**, 223 (2016).
14. B. Haase, M. Kutas, F. Riexinger, P. Bickert, A. Keil, D. Molter, M. Bortz, and G. von Freymann, *Opt. Express* **27**, 7458 (2019).
15. M. Kutas, B. Haase, P. Bickert, F. Riexinger, D. Molter, and G. von Freymann, *Sci. Adv.* **6**, eaaz8065 (2020).
16. K. A. Kuznetsov, E. I. Malkova, R. V. Zakharov, O. V. Tikhonova, and G. K. Kitaeva, *Phys. Rev. A* **101**, 053843 (2020).
17. G. K. Kitaeva, S. P. Kovalev, A. N. Penin, A. N. Tuchak, and P. V. Yakunin, *J. Infrared Millim., Terahertz Waves* **32**, 1144 (2011).
18. G. K. Kitaeva, P. V. Yakunin, V. V. Kornienko, and A. N. Penin, *Appl. Phys. B* **116**, 929 (2014).
19. M. Mancinelli, A. Trenti, S. Piccione, G. Fontana, J. S. Dam, P. Tidemand-Lichtenberg, C. Pedersen, and L. Pavesi, *Nat. Commun.* **8**, 15184 (2017).
20. S. Prabhakar, T. Shields, A. C. Dada, M. Ebrahim, G. G. Taylor, D. Morozov, K. Erotokritou, S. Miki, M. Yabuno, H. Terai, C. Gawith, M. Kues, L. Caspani, R. H. Hadfield, and M. Clerici, *Sci. Adv.* **6**, eaay5195 (2020).
21. G. K. Kitaeva, V. V. Kornienko, K. A. Kuznetsov, I. V. Pentin, K. V. Smirnov, and Yu. B. Vakhtominet, *Opt. Lett.* **44**, 1198 (2019).
22. В. Д. Султанов, К. А. Кузнецов, А. А. Леонтьев, Г. Х. Китаева, *Письма в ЖЭТФ* **112**, 297 (2020).
23. G. K. Kitaeva, V. V. Kornienko, A. A. Leontyev, and A. V. Shepelev, *Phys. Rev. A* **98**, 063844 (2018).
24. G. K. Kitaeva, A. A. Leontyev, and P. A. Prudkovskii, *Phys. Rev. A* **101**, 053810 (2020).
25. L. S. Dvernik and P. A. Prudkovskii, *Appl. Phys. B* **127**, 85 (2021).
26. B. Huttner, S. Serulnik, and Y. Ben-Aryeh, *Phys. Rev. A* **42**, 5594 (1990).

27. Yu. M. Mikhailova, P. A. Volkov, and M. V. Fedorov, *Phys. Rev. A* **78**, 062327 (2008).
28. Т. Ш. Исхаков, Е. Д. Лопаева, А. Н. Пенин, Г. О. Рытиков, М. В. Чехова, *Письма в ЖЭТФ* **88**, 757 (2008).
29. A. Meda, I. Ruo-Berchera, I. P. Degiovanni, G. Brida, M. L. Rastello, and M. Genoves, *Appl. Phys. Lett.* **105**, 101113 (2014).
30. A. Avella, I. Ruo-Berchera, I. P. Degiovanni, G. Brida, and M. Genoves, *Opt. Lett.* **41**, 1841 (2016).