

Эффект бабочки в системе квантовых точек в модели Сачдева–Йе–Китаева

А. В. Лункин¹⁾

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 119334 Москва, Россия

Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия

Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, 101000 Москва, Россия

Поступила в редакцию 3 февраля 2022 г.

После переработки 3 февраля 2022 г.

Принята к публикации 3 февраля 2022 г.

В работе предложен способ вычисления аномально упорядоченного во времени коррелятора в обобщении модели Сачдева–Йе–Китаева с ненулевой пространственной размерностью. Наш результат применим не только на малых временах, когда хаотичные свойства системы развиты слабо, но и на больших – порядка времени Эренфеста. Мы показали, что информация о приложенном возмущении, которую описывает данный коррелятор, распространяется баллистически в виде фронта. Нами впервые была вычислена скорость фронта для моделей данного типа.

DOI: 10.31857/S123456782205010X

1. Введение. Чувствительность системы к начальным условиям была отмечена А. Пуанкаре при изучении неустойчивости в задаче трех тел. Позднее эта задача изучалась А. Ляпуновым. Термин “Эффект бабочки” был предложен Э. Лоренцом, который обнаружил подобную неустойчивость при моделировании атмосферных явлений. Эффект выражен в том, что расстояние между изначально очень близкими траекториями системы со временем растет экспоненциально, т.е.

$$\{q(t), p(0)\} = \frac{\partial q(t)}{\partial q(0)} \sim e^{\lambda_L t}. \quad (1)$$

Выше $\{\dots, \dots\}$ – скобка Пуассона для данной системы, p и q – канонически сопряженные импульс и координата соответственно. Показатель λ_L называют экспонентой Ляпунова. Эта формула также может быть обобщена на случай квантовых систем. В таком случае экспонента Ляпунова может быть получена, по аналогии, из коррелятора следующего вида:

$$\langle [q(t), p(0)]^2 \rangle \sim e^{\lambda_L t}. \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что для вычисления экспоненты Ляпунова нам необходимо вычислять корреляторы, аномально упорядоченные во времени. В английской литературе их называют *out-of-time ordered*

correlator (ОТОС). Связь подобных корреляторов с хаотичным поведением системы была впервые отмечена в работе [1]. В общем случае мы можем рассматривать не только сопряженные пары операторов, но и корреляторы вида

$$F(t_1, t_2, t_3, t_4) = \langle X_1(t_1)X_2(t_2)X_3(t_3)X_4(t_4) \rangle, \quad (3)$$

где X_i – произвольные операторы. Мы будем полагать, что $t_1 \approx t_3 > t_2 \approx t_4$. Изучение таких корреляторов позволяет характеризовать хаотичные свойства системы, а также понять распространение информации в квантовой системе [2–4].

Для экспериментального изучения ОТОС нам нужно “переместиться” в прошлое, создать возмущение и посмотреть, к чему оно приведет по сравнению с тем, что мы видели до этого. Подобный опыт, для классической системы, был описан в рассказе Р. Брэдбери “И грянул гром”, главные герои которого, отправившись в далекое прошлое и убив там бабочку, увидели разительное отличие в их мире по возвращению назад. Современные управляемые квантовые системы, имеющие большое число степеней свободы, позволяют изучать подобные корреляторы. Полностью контролируя систему, мы можем изменить знак гамильтониана, определяющего эволюцию. После такой замены система эффективно начнет двигаться назад во времени. Подобный эксперимент был поставлен группой Google Quantum Ai [5].

¹⁾e-mail: alunkin@itp.ac.ru

Для достаточно большого класса систем указанный коррелятор (3) обладает универсальным поведением. А именно:

$$\frac{F(t_1, t_2, t_3, t_4)}{\langle X_1(t_1)X_3(t_3) \rangle \langle X_2(t_2)X_4(t_4) \rangle} \approx 1 - \frac{1}{C} e^{\lambda_L(t_1-t_2)}, \quad (4)$$

где, как и раньше, параметр λ_L – экспонента Ляпунова данной квантовой системы. При этом $C \gg 1$. Для таких систем можно получить общую оценку на экспоненту Ляпунова (далее $\hbar = 1$):

$$\lambda_L \leq 2\pi T. \quad (5)$$

Это оценка была получена в работе [6]. Одним из примеров, для которой эта оценка насыщается, является модель Сачдева–Йе–Китаева (SYK), [7], гамильтониан которой будет введен далее.

Следующий вопрос, который естественно задать: как ведет себя этот коррелятор в случае $t_1 - t_2 \sim \sim \lambda_L^{-1} \ln C$? Время $t_E = \lambda_L^{-1} \ln C$ называют временем Эренфеста. В случае модели SYK ответ на этот вопрос был получен в работе [8], в которой было показано, что при $t - t_E \gg \lambda_L^{-1}$ коррелятор F стремится к 0. В работе [9] было рассмотрено поведение ОТОС для нульмерных фермионных систем на временах, больших чем время Эренфеста. В работе было показано, что такой коррелятор может быть вычислен универсальным способом, исходя из поведения коррелятора на малых временах (4) и парных корреляционных функций.

В общем случае для нульмерных систем мы можем отметить, что на временах $t \ll t_E$ коррелятор изменяется экспоненциально, но этот рост подавлен фактором C^{-1} , таким образом система слабо демонстрирует хаотичное поведение. На временах $t - t_E \gg \lambda_L^{-1}$ хаотичные свойства проявляются полностью.

Что следует ожидать для системы с ненулевой пространственной размерностью? Предположим, что операторы X_2 и X_4 приложены в точке \mathbf{r}_2 . Точку \mathbf{r}_1 и время приложения операторов X_1 и X_3 мы будем менять, вычисляя при этом ОТОС. В результате при фиксированной разнице времени $t_1 - t_2$ мы можем разделить систему на две области: 1) область неразвитого хаоса с $F = \text{const}$; 2) область развитого хаоса с $F \rightarrow 0$. В частности, точки на достаточно большом удалении относятся к области 1. Область 2 появляется только при $t_1 - t_2 \geq t_E$. Эти области разделяет граница (фронт), которая со временем движется, что приводит к увеличению области 2. Скорость этого движения, вообще говоря, зависит от направления, так как информация о возмущении в системе распространяется баллистически. Подобный сценарий распространения информации для систем с локальным

гамильтонианом был описан в [2], при этом наличие подобного фронта встречалось и в других моделях, например, [10, 11].

В данной работе мы исследуем поведение системы, состоящей из гранул, динамика в каждой из них описывается гамильтонианом модели SYK; при этом существует туннелирование между гранулами. Мы покажем, что сценарий, упомянутый выше, применим для описания поведения ОТОС в нашей системе. Нами также впервые вычислена скорость распространения фронта в обобщении модели SYK. Предложенный способ вычисления может быть также применен и к другим моделям, основанным на модели SYK.

Отметим, что поведение ОТОС в обобщении модели SYK обсуждалось в работе [12]. Однако в указанной работе не исследовано поведение коррелятора на больших временах, соответственно понятие фронта было не определено. Также в работе [12] исследовался лишь случай длинноволновых возбуждений, при этом, в ситуации общего положения, распространение фронта – баллистическое, т.е. результаты работы применимы лишь в ограниченной области параметров. Методы, предложенные авторами этой работы, существенно опираются на форму взаимодействия между фермионами из разных гранул, которое так же, как и гамильтониан, описывающий динамику внутри гранул – четвертого порядка по фермионным операторам.

Структура нашей работы следующая. В разделе 2 будет введена изучаемая модель и получено действие для ее описания. В разделе 3 будут описаны основные свойства модели SYK. В разделе 4 будет вычислен ОТОС, а также описаны основные его свойства.

2. Модель и основные свойства. Гамильтониан нашей модели имеет следующий вид:

$$H = \sum_{\mathbf{r}} \left\{ H_{\mathbf{r}} + i \sum_{\delta \mathbf{r}} \sum_{i,j} w_{\mathbf{r},i;\mathbf{r}+\delta \mathbf{r},j} \chi_{\mathbf{r},i} \chi_{\mathbf{r}+\delta \mathbf{r},j} \right\},$$

$$H_{\mathbf{r}} = \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l}^N J_{i,j,k,l;\mathbf{r}} \chi_{\mathbf{r},i} \chi_{\mathbf{r},j} \chi_{\mathbf{r},k} \chi_{\mathbf{r},l}. \quad (6)$$

Здесь $\chi_{\mathbf{r}}$ – майорановские фермионы, коммутационные соотношения которых имеют вид: $\{\chi_{\mathbf{r},i}, \chi_{\mathbf{r}',i'}\} = \delta_{i,i'} \delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$. Индекс i принимает значения от 1 до $N \gg 1$. Гамильтониан (6) описывает решетку из квантовых точек, имеющих радиус вектор \mathbf{r} , $\delta \mathbf{r}$ – вектор между произвольной точкой и одним из ее соседей. Член $H_{\mathbf{r}}$ описывает динамику внутри точки, второй член в первой строчке описывает туннелирование частиц между соседними точками.

Гамильтониан $H_{\mathbf{r}}$ является гамильтонианом мо-

дели SYK [7]. Качественно мы можем сказать, что этот гамильтониан описывает систему, в которой есть N вырожденных уровней, в таком случае эффекты взаимодействия становятся сильными и приводят к неферми-жидкостному поведению, которое было описано, например, в работах [13, 14].

Тензоры w и J антисимметричны по индексам и являются случайными гауссовыми независимыми величинами с нулевым средним и дисперсией, определяемой выражением:

$$\langle J_{i,j,k,l;\mathbf{r}}^2 \rangle = \frac{3!J^2}{N^3}, \quad \langle w_{\mathbf{r},i;\mathbf{r}+\delta\mathbf{r},j}^2 \rangle = \frac{w^2}{N}. \quad (7)$$

Мы предполагаем, что характерный масштаб взаимодействия внутри гранул много больше, чем характерная амплитуда туннелирования, т.е. $J \gg w$.

Для вычисления ОТОС нам придется воспользоваться двойным контуром Келдыша (рис. 1). Технические детали вычисления описаны в работах [2, 8, 15].

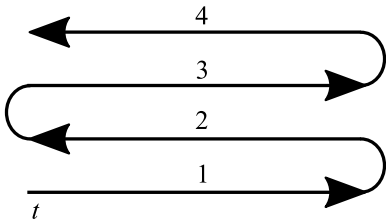


Рис. 1. Контур интегрирования для действия состоит из четырех частей, две из которых идут вперед во времени, а две назад

Нам также понадобится различать поля, определенные на разных частях контура, для этого мы введем индекс $\sigma \in \{1, 2, 3, 4\}$. Например, фермионное поле, определенное на части контура с номером σ , мы обозначим как $\chi_{\mathbf{r},i}^{(\sigma)}$. Тогда коррелятор, который нас интересует будет иметь вид:

$$F(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,i'} \langle T_C \chi_{\mathbf{r}_1,i}^{(1)}(t_1) \chi_{\mathbf{r}_2,i'}^{(2)}(t_2) \chi_{\mathbf{r}_1,i}^{(3)}(t_3) \chi_{\mathbf{r}_2,i'}^{(4)}(t_4) \rangle. \quad (8)$$

Здесь символ T_C обозначает упорядочение операторов вдоль контура. Действие на контуре имеет вид:

$$S = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \int dt \left\{ \sum_{\mathbf{r},i} \frac{1}{2} \chi_{\mathbf{r},i}^{(\sigma)}(t) \partial_t \chi_{\mathbf{r},i}^{(\sigma)}(t) - H^{(\sigma)}(t) \right\}. \quad (9)$$

Здесь $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1 = -\varepsilon_2 = -\varepsilon_4$ – знак “направления времени” соответствующей части двойного контура. После усреднения по беспорядку действие примет вид:

$$S = \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \int dt_1 dt_0 \delta'(t_1 - t_0) \times \left\{ \sum_{\mathbf{r},i} \frac{1}{2} \chi_{\mathbf{r},i}^{(\sigma)}(t_1) \chi_{\mathbf{r},i}^{(\sigma)}(t_0) \right\} + \frac{i}{2} \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma_1} \varepsilon_{\sigma_0} \int dt_1 dt_0 \times \left\{ \frac{J^2}{4N^3} \left[\sum_i \chi_{\mathbf{r},i}^{(\sigma_1)}(t_1) \chi_{\mathbf{r},i}^{(\sigma_0)}(t_0) \right]^4 + \sum_{\delta\mathbf{r}} \sum_{i,j} \frac{w^2}{2N} \chi_{\mathbf{r},i}^{(\sigma_1)}(t_1) \chi_{\mathbf{r},i}^{(\sigma_0)}(t_0) \times \chi_{\mathbf{r}+\delta\mathbf{r},j}^{(\sigma_1)}(t_1) \chi_{\mathbf{r}+\delta\mathbf{r},j}^{(\sigma_0)}(t_0) \right\}.$$

Определим поле G следующим образом:

$$G_{\sigma_1\sigma_0}(t_1, t_0|\mathbf{r}) = -i \frac{1}{N} \sum_k \chi_{\mathbf{r},k}^{(\sigma_1)}(t_1) \chi_{\mathbf{r},k}^{(\sigma_0)}(t_0). \quad (10)$$

Нам также потребуется ввести поле Σ , определенное как множитель Лагранжа для поля G , тем самым сделав последнее поле не обремененным никаким соотношением, кроме симметрий, связанных с перестановкой $t_1 \leftrightarrow t_0$.

Поскольку амплитуда туннелирования между гранулами много меньше энергетического масштаба взаимодействия внутри гранул, мы можем рассмотреть член с туннелированием как возмущение. А значит, мы можем ограничиться полями G , которые зависят только от одной координаты, так как в невозмущенной задаче гранулы никак друг с другом не связаны. Также введем следующее обозначение для удобства:

$$\Sigma_{\sigma_1\sigma_0}^{(\text{free})}(t_1, t_0) = -\varepsilon_{\sigma_1} \delta_{\sigma_1, \sigma_0} \delta'(t_1 - t_0). \quad (11)$$

Используя новые поля и обозначение, запишем действие в виде:

$$S = - \sum_{\mathbf{r}, \sigma_1, \sigma_0} \frac{iN}{2} \int dt_1 dt_0 \Sigma_{\sigma_1\sigma_0}^{(\text{free})}(t_1, t_0) G_{\sigma_1\sigma_0}(t_1, t_0|\mathbf{r}) + \frac{iN}{2} \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma_1} \varepsilon_{\sigma_0} \int dt_1 dt_0 \left\{ \frac{J^2}{4} G_{\sigma_1\sigma_0}^4(t_1, t_0|\mathbf{r}) - \sum_{\delta\mathbf{r}} \frac{w^2}{2} G_{\sigma_1\sigma_0}(t_1, t_0|\mathbf{r}) G_{\sigma_1\sigma_0}(t_1, t_0|\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \right\} + \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\sigma_1, \sigma_0} \int dt_1 dt_0 \Sigma_{\sigma_1\sigma_0}(t_1, t_0|\mathbf{r}) \times \left[iN G_{\sigma_1\sigma_0}(t_1, t_0|\mathbf{r}) - \sum_k \chi_{\mathbf{r},k}^{(\sigma_1)}(t_1) \chi_{\mathbf{r},k}^{(\sigma_0)}(t_0) \right] \right\}. \quad (12)$$

Используя эти переменные, мы можем также переписать наш коррелятор (8), который нужно перенормировать, в результате он примет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t_1, t_2, t_3, t_4) &= \\ &= \frac{\langle T_C G_{13}(t_1, t_3 | \mathbf{r}_1) G_{24}(t_2, t_4 | \mathbf{r}_2) \rangle}{\langle T_C G_{13}(t_1, t_3 | \mathbf{r}_1) \rangle \langle G_{24}(t_2, t_4 | \mathbf{r}_2) \rangle}. \end{aligned} \quad (13)$$

Именно в таком виде коррелятор вычислен в работах [8, 9].

Как мы видим, действие стало квадратичным относительно фермионных операторов, а значит, мы можем взять по ним интеграл и перейти к действию, записанному в терминах полей G и Σ . Однако перед этим нам удобнее перейти к безразмерной переменной $u \equiv 2\pi T t$, где T – температура системы, а также мы перемасштабируем поля следующим образом:

$$\begin{aligned} \Sigma(t_1, t_0) &\equiv J^2 \left(\frac{2\pi T}{J} \right)^{3/2} \Sigma(u_1, u_0), \\ G(t_1, t_0) &\equiv \left(\frac{2\pi T}{J} \right)^{1/2} G(u_1, u_0). \end{aligned} \quad (14)$$

В новых переменных действие будет иметь вид:

$$\begin{aligned} &\frac{2S}{iN} = \\ &= - \sum_{\mathbf{r}} \sum_{\sigma_1, \sigma_0} \int du_1 du_0 \left\{ - \frac{\varepsilon_{\sigma_1} \varepsilon_{\sigma_0}}{4} G_{\sigma_1 \sigma_0}^4(u_1, u_0 | \mathbf{r}) \times \right. \\ &\times \left[\Sigma_{\sigma_1 \sigma_0}^{(\text{free})}(u_1, u_0) + \Sigma_{\sigma_1 \sigma_0}(u_1, u_0 | \mathbf{r}) \right] G_{\sigma_1 \sigma_0}(u_1, u_0 | \mathbf{r}) + \\ &+ \sum_{\delta \mathbf{r}} \frac{\varepsilon_{\sigma_1} \varepsilon_{\sigma_0}}{2} \left(\frac{w^2}{2\pi T J} \right) \times \\ &\times \left. G_{\sigma_1 \sigma_0}(u_1, u_0 | \mathbf{r}) G_{\sigma_1 \sigma_0}(u_1, u_0 | \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \right\} - \\ &- \text{Tr} \ln(\Sigma). \end{aligned} \quad (15)$$

При достаточно низкой температуре $T \ll T_{FL} \sim \frac{w^2}{J}$ последний член действия (15) становится доминирующим и поведение системы описывается обычной теорией ферми-жидкости. Мы будем работать при $T \gg T_{FL}$. В таком предположении, член с туннелированием можно рассматривать по теории возмущений. Пренебрегая им, мы приходим к действию модели SYK, ниже мы остановимся на его свойствах.

3. Основные свойства модели SYK. Вместо вычисления функционального интеграла по полям G и Σ мы можем воспользоваться седловым приближением, так как $S \propto N$, при этом $N \gg 1$. Как было отмечено выше, членом с w мы можем пренебречь при $T \gg T_{FL}$ при выводе седловых уравнений. Член с $\Sigma^{(\text{free})}$ важен при температурах порядка J и на малых временах. Полагая $J \gg T \gg T_{FL}$, мы можем

использовать седловые уравнения для полей G и Σ в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} \int du \Sigma_{\sigma_1 \sigma}(u_1, u | \mathbf{r}) G_{\sigma \sigma_0}(u, u_0 | \mathbf{r}) &= \\ &= \delta_{\sigma_1, \sigma_0} \delta(u_1 - u_0), \\ \Sigma_{\sigma_1 \sigma_0}(u_1, u_0 | \mathbf{r}) &= \varepsilon_{\sigma_1} \varepsilon_{\sigma_0} G_{\sigma_1 \sigma_0}^{q-1}(u_1, u_0 | \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (16)$$

Тут мы ввели параметр $q = 4$, в конкретных вычислениях бывает полезным рассматривать этот параметр произвольным для размерной регуляризации. Поэтому мы выпишем решения седловых уравнений в общем виде.

Уравнения выше имеют огромную группу симметрий. Чтобы это увидеть, рассмотрим произвольный набор монотонных функций $f_{\sigma, \mathbf{r}}(u)$, тогда мы можем сделать преобразование по правилу:

$$\begin{aligned} G_{\sigma_1 \sigma_0}(u_1, u_0 | \mathbf{r}) &\mapsto [f'_{\sigma_1, \mathbf{r}}(u_1) f'_{\sigma_0, \mathbf{r}}(u_0)]^{\Delta} \times \\ &\times G_{\sigma_1 \sigma_0}(f_{\sigma_1, \mathbf{r}}(u_1), f_{\sigma_0, \mathbf{r}}(u_0) | \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\Delta = \frac{1}{q}$. После подстановки новой функции G мы получим тождество. Однако мы знаем, что исходный гамильтониан не зависит от времени, а значит, функция Грина, которую мы ищем, должна зависеть только от разности времен. При этом матричные элементы поля G не являются независимыми, так как связаны некоторыми соотношениями, одно из которых – флуктуационно-диссипационная теорема (связывающая келдшевскую функцию Грина с запаздывающей и опережающей). Поскольку мы работаем с системой, которая находится в равновесии, мы можем указать значение матричных элементов поля G лишь на первой части нашего двойного контура (соответственно в формуле ниже $\sigma \in \{1, 2\}$). С учетом этого комментария, трансляционно-инвариантное решение седловых уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} G_{\sigma_1 \sigma_0}^{(0)}(u_1, u_0 | \mathbf{r}) &= b^{\Delta} g_{\sigma_1 \sigma_0}(u_1 - u_0), \\ g_{\sigma_1 \sigma_0}(u > 0) &\equiv i \left[\frac{s'_{(0)}(u_1) s'_{(0)}(u_0)}{(s_{(0)}(u_1) - s_{(0)}(u_0))^2} \right]^{\Delta} \times \\ &\times \left(\frac{-e^{-i\pi\Delta} e^{i\pi\Delta}}{-e^{-i\pi\Delta} e^{i\pi\Delta}} \right)_{\sigma_1 \sigma_0}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $b = \frac{(1-2\Delta)\tan(2\pi\Delta)}{2\pi}$. Тут функция $s_0(u) = e^u$, такая форма записи обусловлена дальнейшими выкладками. Решение при $u < 0$ может быть восстановлено, используя свойства симметрии функции Грина: $g_{\sigma_1 \sigma_0}(u) = -g_{\sigma_0 \sigma_1}(-u)$. Группа симметрий уравнений превосходит группу симметрий данного решения, которая задана преобразованиями вида:

$$s_0(u) \mapsto s(u) = \frac{as_0(u) + b}{cs_0(u) + d}. \quad (19)$$

Обычно такое поведение свидетельствует о наличии мягкой (Голдстоуновской) моды. Однако наши уравнения являются приближенными, даже при $w = 0$ мы пренебрегли членом $\Sigma^{(\text{free})}$, а значит, симметрия, которую мы обнаружили, является асимптотической, подобное встречается при работе с σ -моделями [16]. В нашем случае это означает, что вместо взятия всего функционального интеграла по полям G и Σ нам требуется проинтегрировать только по полям, которые являются решением седловых уравнений. Многообразие таких полей можно задать следующим образом: все такие поля получены с помощью преобразования симметрии (17), которое применили к седловому решению (18). Переход от интегрирования по всем полям к интегрированию по полям, лежащим на определенном многообразии не точен, он верен в силу того, что флуктуации в направлении, перпендикулярном многообразию подавлены в βJ раз [7].

Это многообразие параметризовано функциями $f_{\sigma,r}(u)$. Действие [7] на этом многообразии имеет вид

$$S = -C_J \sum_{\mathbf{r},\sigma} \varepsilon_\sigma \int du \text{Sch}\{e^{f_{\sigma,r}}, u\} - C_w \sum_{\delta\mathbf{r},\mathbf{r},\sigma_1,\sigma_0} \int du_1 du_0 \varepsilon_{\sigma_1} \varepsilon_{\sigma_0} \times g_{\sigma_1\sigma_0}^{(f)}(u_1, u_0|\mathbf{r}) g_{\sigma_1\sigma_0}^{(f)}(u_1, u_0|\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}), \quad (20)$$

где $C_J = \alpha_S N \frac{2\pi T}{J}$ и $C_w = \frac{Nw^2}{4\pi JT}$ – теплоемкость модели SYK и вклада в теплоемкость от возмущения соответственно, $\alpha_S \approx 0.05$. Поле $g^{(f)}$ (при $u_1 - u_2 > 0$) определено как:

$$g_{\sigma_1,\sigma_2}^{(f)}(u_1, u_0|\mathbf{r}) = [f'_{\sigma_1,\mathbf{r}}(u_1) f'_{\sigma_2,\mathbf{r}}(u_0)]^\Delta \times g_{\sigma_1\sigma_2}(f_{\sigma_1,\mathbf{r}}(u_1) - f_{\sigma_2,\mathbf{r}}(u_0)). \quad (21)$$

Символ $\text{Sch}\{s(u), u\}$ обозначает производную Шварца, которая определена как:

$$\text{Sch}\{s(u), u\} \equiv \left(\frac{s''}{s'}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{s''}{s'}\right)^2. \quad (22)$$

Одно из важных свойств производной Шварца следующее: при замене s на дробно-линейное преобразование от s величина производной не изменится. Коррелятор, который мы планируем вычислять, имеет следующий вид, с учетом введенных обозначений:

$$\tilde{F}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \frac{\langle T_C g_{1,3}^{(f)}(u_1, u_3|\mathbf{r}_1) g_{2,4}^{(f)}(u_2, u_4|\mathbf{r}_2) \rangle}{\langle g_{1,3}^{(f)}(u_1, u_3|\mathbf{r}_1) \rangle \langle g_{2,4}^{(f)}(u_2, u_4|\mathbf{r}_2) \rangle}. \quad (23)$$

Мы будем работать с квадратичным действием, которое применимо при $w \gg \frac{N}{J}$ [17, 18]. В против-

ном случае наше рассмотрение ограничено временами $t \ll \frac{N}{J}$ [19]. Далее мы займемся вычислением ОТОС.

4. Поведение ОТОС на больших временах.

Основная идея статьи состоит в рассмотрении следующего анзаца для поля $f(u)$:

$$e^{f(u)} = \frac{e^u + a(u)}{b(u)e^u + 1}, \quad (24)$$

где $a(u)$ и $b(u)$ – медленные функции. Используя такую подстановку, мы можем написать выражение для поля g , которое следует из выражения ниже (мы пренебрегаем производными полей a и b в силу предположения об их медленности):

$$4 \sinh^2 \left(\frac{u_1 - u_0}{2} \right) \frac{f'_{\sigma_1,\mathbf{r}}(u_1) f'_{\sigma_0,\mathbf{r}}(u_0)}{4 \sinh^2 \left(\frac{f_{\sigma_1,\mathbf{r}}(u_1) - f_{\sigma_0,\mathbf{r}}(u_0)}{2} \right)} \approx \left[1 + 2 \frac{a_{\sigma_1,\mathbf{r}}(u_1) - a_{\sigma_0,\mathbf{r}}(u_0)}{e^{u_1} - e^{u_0}} + 2 \frac{b_{\sigma_1,\mathbf{r}}(u_1) - b_{\sigma_0,\mathbf{r}}(u_0)}{e^{-u_1} - e^{-u_0}} \right]^{-1}. \quad (25)$$

В выражении выше мы оставили только линейные члены по a или b с экспоненциально растущими коэффициентами, так как эти поля малы ($a, b \propto \propto N^{-1/2}$). Однако, умножив их на экспоненциально большие множители, мы получим комбинацию, которая не мала. Для дальнейшей работы нам понадобится вспомогательный интеграл:

$$a^{-\gamma} = \int_0^\infty s^{\gamma-1} e^{-sa} \frac{ds}{\Gamma(\gamma)}. \quad (26)$$

Используя (26) дважды, мы можем записать интересный нас коррелятор в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(u_1, u_2, u_3, u_4) &= \\ &= \int_0^\infty \frac{ds_o ds_e}{\Gamma(2\Delta)^2} (s_o s_e)^{(2\Delta)-1} e^{-s_e - s_o} \langle e^{iS_J} \rangle, \\ S_J &= \sum_{\mathbf{r}} \int du \left(\hat{j}_{a,\mathbf{r}}^T(u) \hat{a}_{\mathbf{r}}(u) + \hat{j}_{b,\mathbf{r}}^T(u) \hat{b}_{\mathbf{r}}(u) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Выше мы ввели столбцы \hat{a} и \hat{b} , состоящие из полей a и b соответственно. Эти столбцы имеют по 4 компоненты в соответствии с ветвями контура. Столбец \hat{j}_a имеет следующий вид:

$$\hat{j}_a = -i \begin{pmatrix} \frac{-2s_o \delta(u - u_1) \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_1}}{e^{u_1} - e^{u_3}} \\ -2s_e \delta(u - u_2) \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_2} \\ \frac{e^{u_2} - e^{u_4}}{2s_o \delta(u - u_3) \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_1}} \\ \frac{e^{u_1} - e^{u_3}}{2s_e \delta(u - u_4) \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_2}} \\ e^{u_2} - e^{u_4} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Вектор \hat{j}_b определен аналогично.

Теперь мы можем рассмотреть действие для полей a и b . Поскольку выбранное нами поле f (24) локально близко к седловому, то мы можем воспользоваться квадратичным действием для вывода действия для полей a и b . Квадратичное действие удобно записать, введя поле δf , определенное как $f = u + \delta f(u)$. Подобное квадратичное действие было получено в работах [14, 20] и имеет вид:

$$S_2 = \frac{1}{2} \int \frac{d\Omega d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^{d+1}} \delta f_{\mathbf{p}}^\dagger(\Omega) \left[\hat{\mathcal{G}}(\Omega, \mathbf{p}) \right]^{-1} \delta f_{\mathbf{p}}(\Omega), \quad (29)$$

$$\left[\hat{\mathcal{G}}(\Omega, \mathbf{p}) \right]^{-1} = \left[\hat{\mathcal{G}}^0(\Omega) \right]^{-1} - \hat{\Sigma}(\Omega, \mathbf{p}),$$

где \mathcal{G} – функция Грина мягких мод для нашего действия, \mathcal{G}^0 – функция Грина мягких мод в модели SYK, Σ – собственная энергетическая часть, пропорциональная w^2 . Мы снова использовали матричное обозначение, объединив 4 поля δf с разных частей контура в один вектор, мы также используем частотно-импульсное представление. Все матрицы выше имеют размер 4×4 , однако они вычисляются для равновесной системы, с учетом соотношения между запаздывающей и опережающей функциями Грина: $\mathcal{G}_R(\Omega) = \mathcal{G}_A(-\Omega)$ и флуктуационно-диссипационной теоремы, мы можем записать только запаздывающую функцию Грина (все остальные по ней восстанавливаются):

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{G}_R(\Omega, \mathbf{p}) \right]^{-1} &= \left[\mathcal{G}_R^0(\Omega) \right]^{-1} - \hat{\Sigma}_R(\Omega, \mathbf{p}), \\ \Sigma_R(\Omega, \mathbf{p}) &= \frac{C_w}{2} \sum_{\delta \mathbf{r}} \left\{ \Omega^2 \psi(\Omega) + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\mathbf{p} \delta \mathbf{r}}{2} \right) \left. (2(1 + \Omega^2) + (1 + 2\Omega^2) \psi(\Omega)) \right\}, \\ \psi(\Omega) &= \Psi \left(\frac{1}{2} - i\Omega \right) - \Psi \left(-\frac{1}{2} \right), \\ \Psi(z) &= \partial_z \ln \Gamma(z), \quad \mathcal{G}_R^0(\Omega) = \frac{1}{C_J \Omega^2 (\Omega^2 + 1)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Действие для полей $a(\Omega)$ и $b(\Omega)$ определено для $\Omega \ll 1$ в силу их медленности и имеет вид:

$$S_{2,ab} = \int \frac{d\Omega d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^{d+1}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^\dagger(\Omega) \left[\hat{\mathcal{G}}(i + \Omega, \mathbf{p}) \right]^{-1} \hat{b}_{\mathbf{p}}(\Omega). \quad (31)$$

Имея квадратичное действие для полей a и b , мы можем выполнить усреднение:

$$\langle e^{iS_j} \rangle \approx \exp\{-s_e s_o z\}, \quad (32)$$

$$z \equiv \frac{i}{4} \frac{f_\alpha(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{C_J + \sum_{\delta \mathbf{r}} C_w \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right)} \times \frac{\sinh \left(\frac{u_4 + u_2 - u_1 - u_3}{2} \right)}{\sinh \left(\frac{u_4 - u_2}{2} \right) \sinh \left(\frac{u_3 - u_1}{2} \right)}, \quad (33)$$

$$f_\alpha(\mathbf{r}) \equiv \int_{BZ} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{r}\mathbf{p}}}{1 + \alpha \sum_{\delta \mathbf{r}} \sin^2 \left(\frac{\mathbf{p} \delta \mathbf{r}}{2} \right)}, \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \frac{\sum_{\delta \mathbf{r}} C_w \frac{\pi^2}{8}}{C_J + \sum_{\delta \mathbf{r}} C_w \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right)} = \\ &= \left[\frac{8\alpha_S}{d\pi^2} \left(\frac{2\pi T}{w} \right)^2 + \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (35)$$

Знак \approx в (32) означает, что мы выкинули члены, пропорциональные s_e^2 и s_o^2 , так как они “локальны”, т.е. зависят от пары времен u_1, u_3 или u_2, u_4 , в них нет экспоненциального роста, и поэтому они малы. Как и ранее, d – размерность решетки. Функция z , с одной стороны, экспоненциально растет при увеличении $u_1 - u_2$, с другой стороны, функция f экспоненциально убывает при больших $|\mathbf{r}|$. Наконец, мы можем записать явную формулу для коррелятора:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(u_1, u_2, u_3, u_4) &= \\ &= \int_0^\infty \frac{ds_o ds_e}{\Gamma(2\Delta)^2} (s_o s_e)^{(2\Delta)} e^{-s_e - s_o} e^{-s_e s_o z} = \\ &= \int_0^\infty \frac{s^{2\Delta-1}}{\Gamma(2\Delta)} \frac{e^{-s}}{(1 + sz)^{2\Delta}} ds = \frac{U(2\Delta, 1, \frac{1}{z})}{z^{2\Delta}} = \\ &= \begin{cases} 1 - 4z\Delta^2 & z \ll 1, \\ \frac{\ln(z)}{z^{2\Delta} \Gamma(2\Delta)} & z \gg 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь U – вырожденная гипергеометрическая функция, однозначно определенная своими асимптотиками.

Вместе с выражением для z (33) это выражение является главным результатом этой статьи. Отметим далее важные свойства полученного результата.

Во-первых, при $C_w = 0$ мы получаем ответ для ОТОС в модели SYK, это выражение совпадает с

формулой (6.10) работы [8] и совпадает с результатом применения метода из статьи [9] к модели SYK. Отметим, что предложенный нами метод вычисления отличается от методов в упомянутых работах, совпадение результатов – указание на возможность применения нашего (24) анзаца для задачи с $w \neq 0$.

Во-вторых, интеграл $f_\alpha(\mathbf{r})$ определяет зависимость от расстояния между операторами в корреляторе. Этот интеграл экспоненциально затухает с расстоянием, но вид затухания зависит не только от модуля \mathbf{r} , но и направления, при не очень больших α (при больших α интеграл набирается на малых p и эта зависимость пропадает). Таким образом, мы делаем вывод, что информация о возмущении в системе распространяется баллистически, что качественно совпадает с поведением других систем [2, 10, 11].

В-третьих, из формулы (36) следует, что в области с $z \gg 1$ коррелятор – мал, $\tilde{F} \approx 0$, мы будем говорить, что точки из этой области “знают” о приложенном возмущении; область с $z \ll 1$ “не знает” о возмущении и в ней $\tilde{F} \approx 1$. Остановимся подробнее на области с $z \sim 1$. Зафиксировав направление, мы можем отметить, что $z \propto e^{\lambda_L(|t_{12}| - \frac{r_{12}}{v}) - \ln(N)}$, тут $r_{12} = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gg 1$ и $t_{12} = t_1 - t_2 \approx t_3 - t_4$, v – некоторый параметр с размерностью скорости. Из этого вида мы можем сказать, что со временем область $z \sim 1$ распространяется со скоростью v , вдоль зафиксированного ранее направления.

В качестве примера приведем скорости для разных случаев.

В общем случае (произвольной размерности) универсальное поведение функции f из формулы (34) наблюдается только при $\frac{v^2}{a^2} \gg \alpha \gg 1$, тут a – длина ребра решетки. В таком случае $f \sim \exp\left\{-\sqrt{\frac{2}{\alpha}} \frac{r}{a}\right\}$, что соответствует скорости распространения фронта:

$$v = 2\pi T \sqrt{\frac{\alpha}{2}} a, \quad (37)$$

которая не зависит от направления.

В случае одномерной системы ($\mathbf{r} = (na)$) асимптотическое поведение функции f следующее:

$$f_\alpha^{(1D)}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{|n|} & \alpha \ll 1, \\ \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right)^{|n|} & \alpha \gg 1. \end{cases} \quad (38)$$

В двумерном случае $\alpha \ll 1$:

$$f_{\alpha \ll 1}^{(2D)}(\mathbf{r}) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{|n|+|m|} C_{|n|+|m|}^{|m|}. \quad (39)$$

Тут вектор $\mathbf{r} = (na, ma)$, как мы видим, эта функция сильно зависит от направления. При $\alpha \gg 1$ функция f имеет вид:

$$f_{\alpha \gg 1}^{(2D)}(\mathbf{r}) = \frac{K_0 \left(\sqrt{\frac{2}{\alpha}} \frac{r}{a}\right)}{\pi \alpha}. \quad (40)$$

Разберем зависимость параметра α от температуры. Используя формулу (35), мы можем отметить, что α не зависит от J и определяется только параметром $\frac{T}{w}$. При достаточно высоких температурах $T \gg w$, $\alpha \sim \left(\frac{w}{T}\right)^2$ – зависит от температуры. В противоположном случае $w \gg T$ параметр $\alpha \approx \alpha_0 = \frac{\pi^2}{\pi^2 - 8}$ принимает универсальное значение, которое не зависит ни от параметров системы, ни от температуры. Стоит отметить, что $\alpha_0 \approx 5.27$, и мы можем считать, что $\alpha_0 \gg 1$.

Заключение. В представленной работе исследовалось поведение ОТОС для системы, состоящей из квантовых точек. Динамика внутри точек описывается моделью SYK с характерным энергетическим масштабом J . Между точками существует туннелирование с характерной амплитудой w . Мы показали, что в такой системе ляпуновская экспонента имеет свое максимальное значение $\lambda_L = 2\pi T$, аналогично модели SYK. Из-за наличия ненулевой размерности изучаемый коррелятор имеет пространственную структуру: пространство можно разделить на две области: 1) область, “знающая” о приложенном возмущении с $\tilde{F} \approx 0$; 2) область, “не знающая” о возмущении с $\tilde{F} \approx 1$. Эти области разделяет граница, которая распространяется во времени. Детали распространения, в общем случае, зависят от параметров системы и деталей решетки. Однако при $w \gg T$ границу можно считать сферической, а ее скорость распространения $v_f = 2\pi T \sqrt{\frac{\alpha_0}{2}} a$ – зависит только от температуры и длины ребра решетки. Также отметим, что несмотря на то, что вклад w в седловое уравнение не существенен при $T \gg T_{FL} \sim \frac{w^2}{J}$, свойства системы сильно меняются при $T \sim w$. Подобный эффект был также обнаружен в работах [14, 20].

Автор благодарен М. В. Фейгельману и А. Ю. Китаеву за обсуждение работы на всех ее этапах. Также автор благодарен К. С. Тихонову за обсуждение свойств ОТОС.

Данное исследование было частично спонсировано Фондом развития теоретической физики и математики “БАЗИС”, программой фундаментальных исследований ВШЭ и грантом Российского фонда фундаментальных исследований # 20-32-90057.

1. A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, Sov. Phys. JETP **28**(6), 1200 (1969).
2. I. L. Aleiner, L. Faoro, and L. V. Ioffe, Ann. Phys. **375**, 378 (2016).

3. Y. Sekino and L. Susskind, J. High Energy Phys. **2008**, 10 (2008).
4. A. Kitaev and B. Yoshida, preprint arXiv:1710.03363.
5. X. Mi, P. Roushan, C. Quintana et al. (Collaboration), preprint arXiv:2101.08870.
6. J. Maldacena, S.H. Shenker, and D. Stanford, J. High Energy Phys. **2016**, 8 (2016).
7. A. Kitaev and S. J. Suh, J. High Energy Phys. **2018**, 5 (2018).
8. J. Maldacena, D. Stanford, and Z. Yang, Prog. Theor. Exp. Phys. **2016**, 12 (2016).
9. Y. Gu, A. Kitaev, and P. Zhang, preprint arXiv:2111.12007.
10. A. Nahum, S. Vijay, and J. Haah, Phys. Rev. **8**, 021014 (2018).
11. C. W. von Keyserlingk, T. Rakovszky, F. Pollmann, and S. L. Sondhi, Phys. Rev. X **8**, 021013 (2018).
12. Y. Gu, X. L. Qi, and D. Stanford, J. High Energy Phys. **2017**, 5 (2017).
13. S. Banerjee and E. Altman, Phys. Rev. **95**, 13 (2017).
14. A. V. Lunkin and M. V. Feigel'man, preprint arXiv:2112.11500.
15. L. V. Keldysh, Sov. Phys. JETP **20**, 4 (1965).
16. K. Efetov, *Supersymmetry in Disorder and Chaos*, Cambridge university press, Cambridge (1999).
17. A. V. Lunkin, K. S. Tikhonov, and M. V. Feigel'man, Phys. Rev. Lett. **121**, 23 (2018).
18. A. V. Lunkin, A. Yu. Kitaev, and M. V. Feigel'man, Phys. Rev. Lett. **125**, 19 (2020).
19. D. Bagrets, A. Altland, and A. Kamenev, Nuclear Physics B **911**, 191 (2016).
20. A. V. Lunkin and M. V. Feigel'man, SciPost Phys. **12**, 031 (2022).