

# Качественное рассмотрение эффекта Шарнхорста

А. М. Ишханян<sup>+\*</sup>, В. П. Крайнов<sup>×1)</sup>

<sup>+</sup>Российско-Армянский университет, 0051 Ереван, Армения

<sup>\*</sup>Институт физических исследований НАН Армении, 0203 Аштарак, Армения

<sup>×</sup>Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 29 декабря 2021 г.

После переработки 21 января 2022 г.

Принята к публикации 17 февраля 2022 г.

Эффект Шарнхорста состоит в том, что фотон, летящий поперек щели между большими параллельными друг другу проводящими пластинами, имеет скорость, немного превышающую скорость света в вакууме вследствие поляризации системы. В статье приводится качественное рассмотрение этого эффекта.

DOI: 10.31857/S123456782206009X

**1. Введение.** Флуктуационное поле электромагнитного вакуума проявляет себя в самых различных задачах [1–5]. Так, ван-дер-ваальсово притяжение между атомами и молекулами на расстояниях  $R$ , больших по сравнению с размерами атомов и молекул, есть следствие различных электромагнитных сил между телами. Эти силы обусловлены как непосредственным взаимодействием зарядов, так и полем электромагнитного вакуума. В случае  $R \gg a_B/\alpha$ , где  $a_B$  – боровский радиус, а  $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$  – постоянная тонкой структуры, притяжение между атомами создается именно полем электромагнитного вакуума, которое производит поляризацию атомов [2, 3], а не кулоновскими силами.

Другой пример – это лэмбовский сдвиг в атоме водорода [4]. Сдвиг энергии основного состояния атома водорода в  $\alpha^3$  раз меньше его энергии из-за “дрожания” электрона [5] в поле электромагнитного вакуума (если не учитывать слабый логарифмический фактор). Квадрат напряженности электрического поля вакуума оценивается как отношение лэмбовского сдвига к объему атома водорода. Эта напряженность имеет порядок величины  $10^6$  В/см.

Третий пример – это притяжение проводящих пластин, параллельных друг другу, силами электромагнитного вакуума (сила Казимира [4]). Поляризация системы в этой задаче и рассматривается в данной статье.

**2. Флуктуационное поле в задаче Казимира.** Сначала приведем упрощенный вывод энергии Казимира электромагнитного вакуума между двумя

параллельными проводящими пластинами (расстояние между пластинами равно  $a$ ). Используем систему единиц  $c = \hbar = m = 1$ . Рассмотрим кубик с длиной грани  $L \gg a$ , ограниченный со всех сторон проводящими пластинами. Без ограничения общности можно считать  $L = 1$ . Все осцилляторы поля электромагнитного вакуума находятся в основном состоянии и энергия каждого осциллятора равна  $\omega/2$ . Обсудим возможные длины стоячих волн в этом кубике. Максимальная длина волны, например, вдоль направления  $X$ , равна 2 (т.е., на длине грани кубика укладывается полволны поперечного электрического поля осциллятора, чтобы оно обращалось в нуль на проводящих пластинах по известному условию для тангенциальных компонент поля). А произвольная длина волны в этом направлении равна  $\lambda_n = 2/n_x$ , где  $n_x$  – целое неотрицательное число. Соответствующее волновое число равно  $k_x = 2\pi/\lambda_n = \pi n_x$ ,  $n_x = 0, 1, 2, 3 \dots$ . Следовательно, частота осциллятора  $\omega = \pi \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$ . Полная энергия поля электромагнитного вакуума в кубике равна сумме энергий осцилляторов

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \pi \sum_{n_x, n_y, n_z}^{\infty} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dk_x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk_y}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk_z}{\pi} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Дополнительный фактор 2 возник из-за двух поперечных поляризаций каждого фотона.

Теперь поместим еще одну проводящую пластину перпендикулярно оси  $Z$  на малом расстоянии  $a \ll 1$

<sup>1)</sup>e-mail: vpkrainov@mail.ru

от верхней плоскости рассматриваемого кубика. Вычислим энергию  $\varepsilon(a)$  электромагнитного вакуума, заключенную в малой области между этой пластиной и верхней плоскостью кубика. Аналогично (1) имеем

$$\varepsilon(a) = \int_0^\infty \frac{dk_x}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk_y}{\pi} \sum_{n_z=1}^\infty \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{\pi n_z}{a}\right)^2} + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dk_x}{\pi} \int_0^\infty \frac{dk_y}{\pi} \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \quad (2)$$

Второе слагаемое в (2) отвечает значению  $n_z = 0$ . Фактор  $1/2$  в этом слагаемом обусловлен тем, что при движении в двумерной плоскости имеется только одна поляризация фотона. Вводя полярные координаты в плоскости  $(x, y)$  и обозначая  $\kappa = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ , перепишем выражение (2) в виде

$$\varepsilon(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \kappa d\kappa \left\{ \sum_{n_z=1}^\infty \sqrt{\kappa^2 + \left(\frac{\pi n_z}{a}\right)^2} + \frac{\kappa}{2} \right\}. \quad (3)$$

В соответствии с (3) характерная длина волны фотона в задаче Казимира порядка размера щели  $a$ . Коротковолновые фотоны устраняются при последующем вычитании энергии в отсутствие пластин.

Если проводящая пластина отсутствует, то энергия поля электромагнитного вакуума в том же малом объеме, очевидно, равна  $\varepsilon_0(a) = a\varepsilon_0$ . Подставляя (1) и заменяя  $\kappa^2 = u$ , получим

$$\varepsilon_0(a) = \frac{a}{4\pi^2} \int_0^\infty dk_z \int_0^\infty du \sqrt{u + k_z^2}. \quad (4)$$

Заменяя  $k_z = \pi n_z/a$ , перепишем (4) в виде

$$\varepsilon_0(a) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dn_z \int_0^\infty du \sqrt{u + \left(\frac{\pi n_z}{a}\right)^2}. \quad (5)$$

Вычисляя элементарный интеграл в (5), находим

$$\varepsilon_0(a) = \frac{1}{6\pi} \int_0^\infty dn_z \left\{ A^{3/2} - \left(\frac{\pi n_z}{a}\right)^3 \right\}; \quad A \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Величина  $A$  – верхний предел интегрирования по переменной  $u$ . Аналогично вычисляем интеграл (3) по  $u$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon(a) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty du \left\{ \sum_{n_z=0}^\infty \sqrt{u + \left(\frac{\pi n_z}{a}\right)^2} - \frac{\sqrt{u}}{2} \right\} = \\ &= \frac{1}{6\pi} \left\{ \sum_{n_z=0}^\infty \left[ A^{3/2} - \left(\frac{\pi n_z}{a}\right)^3 \right] - \frac{A^{3/2}}{2} \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

Для вычисления суммы в (7) используем формулу Эйлера–Маклорена

$$\sum_{n_z=0}^\infty f(n_z) \approx \int_0^\infty f(n_z) dn_z + \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{12}f'(0) + \frac{1}{720}f'''(0). \quad (8)$$

В данном случае

$$f(n_z) = A^{3/2} - \left(\frac{\pi n_z}{a}\right)^3. \quad (9)$$

Следовательно,

$$f(0) = A^{3/2}; \quad f'(0) = f''(0) = 0; \quad f'''(0) = -6\pi^3/a^3. \quad (10)$$

Изменение энергии поля при внесении в кубик проводящей пластины равно  $\Delta\varepsilon = \varepsilon(a) - \varepsilon_0(a)$ . Оно обусловлено квантованием поля вдоль оси  $Z$  и порождает силу, действующую между внесенной пластиной и пластиной на верхней плоскости кубика. Из формул (6)–(10) видно, что при вычитании происходит взаимоуничтожение слагаемых  $\int_0^\infty f(n_z) dn_z + \frac{1}{2}f(0)$  в формуле Эйлера–Маклорена. При этом исчезает произвольное большое число  $A$ . Получаем

$$\Delta\varepsilon = -\frac{\pi^2 c\hbar L^2}{720a^3}. \quad (11)$$

Плотность энергии Казимира согласно (11) равна

$$W = -\frac{\pi^2 c\hbar}{720a^4}. \quad (12)$$

Далее в качественном подходе мы опустим все численные факторы в зависимостях, сохраняя знаки равенства вместо знака “равно по порядку величины”. Плотность энергии Казимира (12) равна квадрату напряженности  $E$  флуктуационного электрического поля электромагнитного вакуума. Таким образом, получаем  $E = \sqrt{c\hbar}/a^2$ . Например, для полости с шириной  $a = 1$  мкм, восстанавливая размерности, получим  $E = 100$  В/см. Конечно, электрическое поле различно на разных длинах волн. В соответствии со сказанным выше эта оценка относится к длине волны порядка размера щели.

**3. Ненулевые температуры.** Теперь обратимся к случаю ненулевой температуры [6]. В этом случае энергия осциллятора равна

$$\varepsilon(\omega) = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\omega/T) - 1} \right) \omega. \quad (13)$$

Она получается из квантово-механической энергии осциллятора  $(n + 1/2)\omega$  подстановкой ее в распределение Гиббса и суммированием по квантовым числам  $n$ .

Мы рассматриваем идеальный газ фотонов вакуума с нулевым химическим потенциалом как совокупность независимых частиц, помещенных в термостат с температурой  $T$ . Под этими частицами мы понимаем частицы бозе-газа, находящихся в данном одночастичном квантовом состоянии, а под термостатом – остальной газ. Таким образом, малая температурная поправка к энергии при  $T \ll 1/a$  на основе (4) определяется вторым слагаемым в (13), т.е.

$$\delta\varepsilon_0(a, T) = \frac{a}{2\pi^2} \int_0^\infty dk_z \int_0^\infty d\kappa \frac{\kappa \sqrt{\kappa^2 + k_z^2}}{\exp\left\{\frac{\hbar c}{T} \sqrt{\kappa^2 + k_z^2}\right\} - 1}. \quad (14)$$

Переходим в (14) к новым полярным координатам  $\kappa = k \sin \alpha$ ;  $k_z = k \cos \alpha$ . Тогда получаем

$$\delta\varepsilon_0(a, T) = \frac{a}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^3 dk}{\exp\left\{\frac{\hbar ck}{T}\right\} - 1} \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha. \quad (15)$$

Вычисляя, находим температурную поправку к энергии:

$$\delta\varepsilon_0(a, T) = \frac{\pi^2 a T^4}{30}. \quad (16)$$

Для (безразмерной) теплоемкости электромагнитного вакуума, заключенного в области между пластинами, получаем:

$$C(T) = \frac{2\pi^2}{15} \left(\frac{T}{T_0}\right)^3 \left(\frac{L}{a}\right)^2; \quad T \ll T_0 = \frac{\hbar c}{a}. \quad (17)$$

Отметим аналогию (17) с теплоемкостью кристалла при низких температурах. Величина  $a$  в кристалле – это постоянная решетки, а  $T_0$  – дебаевская температура.

**4. Поляризация вакуума.** Под действием низкочастотного флуктуационного электрического поля электромагнитного вакуума электроны могут виртуально переходить из нижнего континуума (“моря Дирака”) в верхний континуум через щель в спектре и обратно. В результате релятивистски инвариантная плотность лагранжиана электромагнитного поля  $L = (E^2 - H^2)/8\pi$  приобретает малую добавку (так называемый эффективный лагранжиан Гейзенберга–Эйлера [4, 7]). Эта добавка квадратична по релятивистским инвариантам, т.е. содержит линейную комбинацию  $(E^2 - H^2)^2$  и  $(\mathbf{E}\mathbf{H})^2$ . Она носит общий характер и не связана с конкретными задачами.

Качественно такую малую радиационную поправку к плотности энергии Казимира (12) из-за поляризации вакуума можно записать в виде  $\delta W = -e^4 E^4$ . Остальные факторы порядка единицы в используемой системе единиц  $c = \hbar = m = 1$ . Она отрицательна из-за отрицательности поправки к энергии

во втором порядке теории возмущений для основного состояния. Определяем поляризацию (дипольный момент единицы объема)  $P = \partial(\delta W)/\partial E = -e^4 E^3$  и диэлектрическую восприимчивость  $\chi = \partial P/\partial E = -e^4 E^2$ . Показатель преломления равен корню из диэлектрической проницаемости. Поэтому полученная величина представляет собой малое отклонение показателя преломления от единицы:  $\Delta n = -e^4 E^2 = -e^4/a^4$ .

Речь идет о показателе преломления поперек щели. Вдоль щели показатель преломления строго равен единице в соответствии с лоренцевой инвариантностью к трансляции. Восстанавливая обычные единицы, получим:

$$\Delta n = -\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \left(\frac{\hbar}{mca}\right)^4. \quad (18)$$

Для ширины щели в полости  $a = 1$  мкм отсюда получим оценку  $\Delta n = -10^{-34}$ . В расчете всех поправок второго порядка теории возмущений Шарнхорстом [1] и (другим способом) Бартоном [8] численный фактор в (18) оказался равным 0.013.

Из (18) получаем, что фотон, летящий поперек щели, имеет скорость несколько больше, чем скорость света в вакууме (эффект Шарнхорста), хотя это превышение ничтожно мало. Конечно, речь идет здесь о фазовой скорости. Для фактического распространения такой волны ее длина должна быть меньше ширины щели  $a$ , но, разумеется, много больше, чем для комптоновской волны.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант # 20-52-05012), Комитета по науке Армении (грант # 20RF-171) и Армянского национального фонда науки и образования (грант # PS-5701). Работа поддержана Министерством науки и Высшего образования РФ (#FSMG-2021-0005).

1. K. Scharnhorst, Phys. Lett. В **236**, 354 (1990).
2. Ю. С. Бараш, *Силы Ван-дер-Ваальса*, Наука, М. (1988).
3. А. М. Ишханян, В. П. Крайнов, ЖЭТФ **159**, 1013 (2021).
4. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, 4-е изд., Физматлит, М. (2002).
5. А. Б. Мигдал, В. П. Крайнов, *Приближенные методы квантовой механики*, Наука, М. (1966).
6. Sh.-I. Tadaki and Sh. Takagi, Progress of Theoretical Physics **75**, 262 (1986).
7. W. Heisenberg and H. Euler, Z. Phys. **98**, 714 (1936).
8. G. Barton, Phys. Lett. В **237**, 559 (1990).