

КОНТУРНАЯ ДИНАМИКА УРАВНЕНИЯ ХАСЕГАВЫ-МИМА

А.В.Грузинов

*Институт атомной энергии им. И.В.Курчатова
123182, Москва*

Поступила в редакцию 20 ноября 1991 г.

Показано, что Контурная Динамика уравнения Хасегавы-Мима (ХМ) является полностью интегрируемой, если размеры контура велики по сравнению с радиусом Россби.

1. Контурная Динамика широко используется в двумерной гидродинамике ¹⁻³. Этот метод был введен в ¹, и в общем случае может быть сформулирован так. Пусть двумерное или квазидвумерное движение жидкости управляется уравнением

$$(\partial_t + [\nabla\psi, \nabla])\Gamma = 0, \quad (1)$$

где ψ - функция тока, Γ - обобщенная завихренность, $[\cdot, \cdot]$ - обозначает z -компоненту векторного произведения. При этом Γ как-то выражена через ψ . Например, для двумерного уравнения Эйлера $\Gamma = \Delta\psi$; для уравнения Хасегавы-Мима ¹⁴

$$\Gamma = \Delta\psi - \psi/a^2, \quad (2)$$

где a - радиус Россби. Возможны и более сложные соотношения (в ¹⁵ мы имели дело с $\Gamma = -\psi/a^2 - (1 - \exp(\rho^2\Delta))I_0(-\rho^2\Delta)\psi/\rho^2$, где I_0 - модифицированная функция Бесселя).

Пусть в начальный момент времени завихренность Γ равнялась Γ_0 в некоторой области Ω и нулю вне Ω . Тогда с течением времени область Ω будет как-то искажаться, но вся завихренность по-прежнему сосредоточена в Ω и равна Γ_0 . Следовательно, (1 + 2)-мерное уравнение (1) при таких начальных условиях становится (1 + 1)-мерным уравнением описывающим движение границы $\gamma = \partial\Omega$. Нормальная компонента скорости (а только она нам и нужна) равна

$$v_n = \psi_s, \quad (3)$$

где s - расстояние вдоль γ . Таким образом, Контурная Динамика определена если мы выразили ψ на γ как некоторый функционал γ (зависящий от Γ_0 и от положения на γ). Обычно, Контурная Динамика оказывается нелокальной.

Мы увидим, что для уравнения Хасегавы-Мима в случае больших контуров (с характерной длиной много больше a) Контурная Динамика становится локальной (что вполне естественно следует из выражения (2)) и полностью интегрируемой (что является приятной неожиданностью).

2. Для Хасегавы-Мима ψ выражается через Γ с помощью модифицированной функции Бесселя K_0

$$\psi(R) = -(\Gamma_0/2\pi) \int_{\Omega} d^2r K_0(|\vec{r} - \vec{R}|/a). \quad (4)$$

Подставляя $K_0 = a^2\Delta K_0$ (для \vec{R} вне Ω), после очевидных преобразований найдем

$$\psi(s) = (\Gamma_0 a/2\pi) \int ds' K_1(|\vec{r}(s') - \vec{r}(s)|/a) |\vec{r}(s') - \vec{r}(s)|^{-1} \times$$

$$\times \{(x(s') - x(s))y_s(s') - (y(s') - y(s))x_s(s')\}, \quad (5)$$

где $\vec{r}(s) = \{x(s), y(s)\}$ - вектор пробегающий γ . В случае больших контура γ ($a \ll r_{char}$) (5) сводится к локальному соотношению

$$\psi = (\Gamma_0 a^3 / 4) K, \quad (6)$$

где $K = x_s y_{ss} - x_{ss} y_s$ - кривизна. В безразмерном виде изучаемая Контурная Динамика определена скоростью

$$v_n = K_s. \quad (7)$$

Отметим, что соотношение (7) сохраняет длину контура (площадь сохраняется в любой Контурной Динамике).

3. Эволюционное уравнение для γ определяемое (7) будет

$$\begin{aligned} x_t &= -K_s y_s + E x_s, \\ y_t &= K_s x_s + E y_s, \end{aligned} \quad (8)$$

где E определено требованием $x_s^2 + y_s^2 = 1$. Простые преобразования дают $E = K^2 / 2$, и после некоторых преобразований найдем эволюционное уравнение для кривизны

$$K_t = K_{sss} + (3/2) K^2 K_s. \quad (9)$$

(9) - это хорошо известное полностью интегрируемое уравнение - мКдВ^{16,17}. Его солитон имеет вид

$$K = 2\kappa \operatorname{ch}^{-1}(\kappa(s - \kappa^2 t)). \quad (10)$$

Угол наклона касательного вектора \vec{r}_s получается интегрированием K ; для $t = 0$

$$\alpha = 2\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}(\kappa s)) + \pi \operatorname{sign}(\kappa). \quad (11)$$

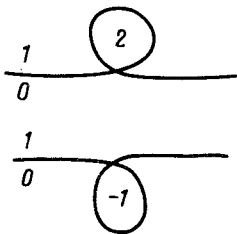


Рис. 1. Солитоны (10) с разными знаками κ

Солитоны с противоположными знаками изображены на рис.1.

4. В заключение, приведем список вопросов и предложений требующих изучения.

1. Солитон рис.1 оказался петлей и, следовательно, требует трех разных значений завихренности, а не двух как предполагалось. Более того, процесс изображенный на рис.2 допустим для (9) и, очевидно, невозможен для (1). Дело в том, что (6) эквивалентно (5) лишь до тех пор пока γ не коснется сам себя. Если мы хотим включить подобные случаи в рамки нашей схемы, необходима процедура перезамыкания типа Контурной Хирургии¹⁰.

2. Если самопересекающийся контур γ оказывается стационарным в силу (9), то можно предположить, что и при достаточно больших a уравнения Хасегавы-Мима имеет близкие стационарные состояния - V -состояния^{2,4,6}. При этом стационарное мКдВ (9) с периодическими граничными условиями можно использовать для поиска V -состояний. Ясно, что в той или иной форме

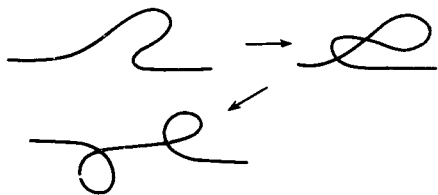


Рис. 2.

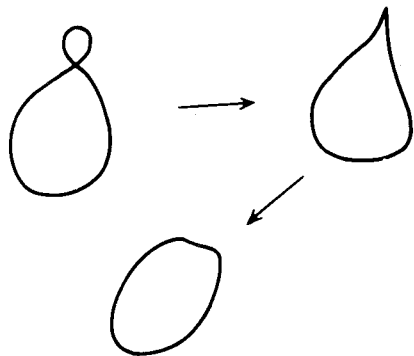


Рис. 3.

Рис. 2. Разбегание солитонов с разными знаками

Рис. 3. Превращение контура с нулевым числом обходов (восьмерка) в контур с одним обходом невозможно без особенности на одной из стадий ¹⁹

выживет и солитон рис.1. Заметим, что весьма экзотические вихревые образования типа триполей наблюдаются в экспериментах ¹⁸ (правда, физические условия в ¹⁸ были другие).

3. Контурная Динамика (7) может быть полезна и для теории полностью интегрируемых систем. Например: 1. Все солитоны имеют одинаковое значение первого инварианта (равное $\pm 2\pi$ в нормировке (9)) потому, что они - просто петли. 2. Первый инвариант (9) - интеграл кривизны - является единственным инвариантом гладких преобразований замкнутых кривых на плоскости ¹⁹. Можно сказать, что процесс показанный на рис. 3 невозможен в Контурной Динамике (7) потому, что (7) сохраняет гладкость контуров. 3. Рис. 2 можно рассматривать как иллюстрацию разделения солитонов разных знаков.

4. Если γ задан в виде $y = f(x)$, то эволюционное уравнение для f отвечающее (7) можно представить в виде

$$u_t = (1 - u^2)^{3/2} u_{xxx}, \quad (12)$$

где обозначено $u = f_x(1 + f_x^2)^{-1/2}$. Уравнение (12) не имеет солитонов. Если, однако, допустить многозначные f и сделать нетривиальную замену переменных $(x, u) \rightarrow (s, K)$, где

$$s = \int dx((1 + f_x^2)^{1/2} - 1), \quad K = u_x,$$

то (12) сводится к мКдВ.

Мне приятно поблагодарить О.П.Погоцу и С.В.Базденкова за многочисленные обсуждения близких вопросов.

Когда статья уже была направлена в печать, д-р Пратт из Вудз Холла (Woods Hole) сообщил мне, что (7) получено им в ²⁰, а дальнейшее изучение этого уравнения, содержащее часть наших результатов, будет опубликовано в ²¹.

1. Zabusky N.J., Hughes M.N., Roberts K.V., J. Comput. Phys., 1979, 30, 96.
2. Deem G.S., Zabusky N.J., В сб. Солитоны в действии, М.: Мир, 1981.
3. Zabusky E.A., Overman E.A. II, J. Comput. Phys., 1983, 52, 351.

4. Wu H.M., Overman E.A. II, Zabusky N.J., J. Comput. Phys., 1984, 53, 42.
5. Pozrikidis C., Higdon J.J.L., J. Fluid Mech., 1985, 157, 225.
6. Dritschel D.G., J. Fluid Mech., 1985, 157, 95.
7. Melander M.V., Zabusky N.J., Sticzek A.S., J. Fluid Mech., 1986, 167, 95.
8. Holm D.D., J. Fluid Mech., 1991, 227, 393.
9. Dritschel D.G., J. Fluid Mech., 1990, 210, 223.
10. Dritschel D.F., J. Comput. Phys., 1988, 77, 240.
11. Pratt L.J., Pedlosky J., J. Fluid Mech., 1991, 224, 49.
12. Polvani L.M., J. Fluid Mech., 1991, 225, 241.
13. Dritschel D.G., McIntyre M.E., Phys. Fluids A, 1990, 2, 748.
14. Hasegawa A., Mima K. Phys. Fluids, 1978, 21, 87.
15. Грузинов А.В., Погуце О.П., ДАН СССР, 1986, 290, 322.
16. Miura R.M., В сб.: Солитоны в действии, М.: Мир, 1981.
17. Ablowitz M.A., Segur H., Solitons and Inverse Scattering Transform, Philadelphia: SIAM, 1981.
18. van Heijst G.J.F., Kloosterziel R.C., Williams C.W.M., J. Fluid Mech., 1991, 225, 301.
19. В.Овсеенко, Сколько кривых на Земле? , Квант N1, 1991.
20. Pratt L.J., J. Phys. Oceanography, 1988, 18, 1627.
21. Cushman-Rosin B., Pratt L., Ralph E., Ibidem, Submitted.