

# Определение скорости нагрева и температуры ионных цепочек в линейной ловушке Пауля по дефазировке осцилляций Раби

Н. В. Семенин<sup>+\*1)</sup>, А. С. Борисенко<sup>+\*</sup>, И. В. Заливако<sup>+</sup>, И. А. Семерилов<sup>+</sup>, М. Д. Аксенов<sup>+</sup>,  
К. Ю. Хабарова<sup>+\*×</sup>, Н. Н. Колачевский<sup>+×</sup>

<sup>+</sup>Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

<sup>\*</sup>Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет), 141701 Долгопрудный, Россия

<sup>×</sup>Российский Квантовый Центр, 121205 Москва, Россия

Поступила в редакцию 23 мая 2022 г.

После переработки 4 июня 2022 г.

Принята к публикации 4 июня 2022 г.

При оптимизации параметров лазерного охлаждения и исследования скорости нагрева в ионных ловушках возникает задача измерения температуры ионных цепочек, для которых выполняется режим Лэмба–Дике. В данной работе предложен метод измерения температуры ионных цепочек, основанный на исследовании динамики осцилляций Раби на узком электронном переходе в отдельном ионе цепочки. Выведена аналитическая зависимость населенности верхнего состояния от времени возбуждения с учетом теплового распределения фононов в колебательных модах цепочки с произвольным числом ионов. Метод экспериментально апробирован на массиве из пяти ионов  $^{171}\text{Yb}^+$  на квадрупольном переходе 435 нм, а также на одиночном ионе. Была измерена скорость нагрева осевой моды колебаний, составившая для нашей ловушки  $8 \cdot 10^3$  фононов/с.

DOI: 10.31857/S1234567822140026, EDN: ixsnvuy

**1. Введение.** Ультрахолодные ионы в ловушках на протяжении многих лет остаются объектом активных исследований в области квантовых вычислений. Они обладают рядом фундаментальных преимуществ перед альтернативными платформами, таких как большое время когерентности [1], сильное кулоновское взаимодействие, позволяющее эффективно перепутывать состояния кубитов [2], а также высокая степень изоляции системы от внешних возмущений. Помимо этого, интерес к ионной платформе дополнительно стимулируется прогрессом в создании ловушек с низкими скоростями нагрева [3], высоким оптическим доступом [4], а также в создании ловушек с возможностью изменения конфигурации цепочки [5].

Одной из важнейших задач для реализации квантовых вычислений на ионах является контроль температуры ионов. Для обеспечения высокой достоверности квантовых операций (в особенности перепутывающих) необходимо, как правило, охладить цепочку как можно ближе к основному колебательному состоянию [6, 7]. Несмотря на прогресс в разработке алгоритмов, менее требовательных к температуре

цепочки [8, 9], степень ее влияния на достоверность операций остается существенной.

Используемые на данный момент методы измерения температуры и/или скорости нагрева иона включают в себя измерение сигнала флуоресценции иона при его доплеровском охлаждении [10, 11], спектроскопии боковых колебательных частот [12], а также методы, основанные на когерентных эффектах, например, на индуцированной прозрачности [13]. Вместе они покрывают достаточно большой диапазон поддающихся измерению температур. Однако, первый из них применим только для очень больших значений среднего колебательного числа ( $10^4$ – $10^5$ ), тогда как второй, наоборот, дает достаточно точные результаты только при малых температурах – как правило, он используется после глубокого охлаждения, когда среднее колебательное число не превышает нескольких единиц. Третий метод удовлетворительно работает в промежуточном диапазоне, но требует более сложной техники, а именно, наличия как минимум двух взаимно когерентных источников оптического излучения с разными частотами.

В данной работе предлагается метод измерения температуры цепочки, основанный на дефазировке резонансных осцилляций Раби на несущей частоте

<sup>1)</sup>e-mail: semeninnv@gmail.com

те узкого оптического перехода в ионе. Этот метод менее требователен к экспериментальной установке, так как для его осуществления не требуется лазерных источников в дополнение к тем, что используются для управления оптическим кубитом. Получена аналитическая формула, описывающая зависимость населенности верхнего состояния иона от времени и обобщающая теорию, изложенную в [14], на случай произвольного числа ионов. Затем была продемонстрирована ее применимость в эксперименте для оценки скорости нагрева одиночного иона в ловушке и для определения температуры массива из 5 ионов.

**2. Дефазировка осцилляций Раби.** Рассмотрим одномерное движение цепочки из  $N$  ионов вдоль какой-либо оси ловушки. Всего имеется  $N$  нормальных мод колебаний цепочки, характеризующихся  $N$  значениями секулярных частот  $\omega_k$ ,  $1 \leq k \leq N$ . Каждая из этих мод представляет собой независимый осциллятор с частотой  $\omega_k$ , так что квантовое состояние отдельного иона представится вектором

$$|\psi\rangle = |\text{el}\rangle |n_1, n_2, \dots, n_N\rangle = |\text{el}\rangle |\{n_k\}\rangle, \quad (1)$$

где  $|\text{el}\rangle \in \{|0\rangle, |1\rangle\}$  – электронное состояние иона,  $n_k$  – количество фононов в  $k$ -й колебательной моде. При приложении к иону в цепочке излучения, направленного вдоль рассматриваемой оси и резонансного с электронным переходом  $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ , между состояниями с одинаковыми наборами  $\{n_k\}$  будут происходить осцилляции Раби с угловой частотой

$$\Omega_{\{n_k\}} = \Omega_0 \left| \left\langle \{n_k\} \left| \exp \left( i \sum_{k=1}^N \eta_k (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger) \right) \right| \{n_k\} \right\rangle \right|, \quad (2)$$

где  $\Omega_0$  – частота Раби для покоящегося иона,  $\hat{a}_k$  и  $\hat{a}_k^\dagger$  – лестничные операторы для фононов  $k$ -й моды,  $\eta_k$  – параметр Лэмба–Дике для данного иона в  $k$ -й моде. Используя коммутативность лестничных операторов для разных мод, данное выражение можно переписать в более удобном виде:

$$\Omega_{\{n_k\}} = \Omega_0 \left| \prod_{k=1}^N \langle n_k | e^{i\eta_k (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger)} | n_k \rangle \right|, \quad (3)$$

в котором каждый член произведения является частным случаем фактора Дебая–Уоллера [15].

$$\left| \langle n_k | e^{i\eta_k (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger)} | n_k \rangle \right| = e^{-\eta_k^2/2} |L_{n_k}(\eta_k^2)|, \quad (4)$$

где  $L_n(x)$  –  $n$ -й полином Лагерра. Обычно для ионов, охлажденных до доплеровского предела, выполняется режим Лэмба–Дике, при котором  $\sqrt{\bar{n}_k} \eta_k \ll 1$ , по-

этому в полиноме Лагерра в выражении (4) можно учитывать только наименьшую степень  $\eta_k$ :

$$\begin{aligned} \left| \langle n_k | e^{i\eta_k (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger)} | n_k \rangle \right| &\approx e^{-\eta_k^2/2} (1 - n_k \eta_k^2) \approx \\ &\approx 1 - (n_k + 1/2) \eta_k^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда можно для частоты Раби записать

$$\begin{aligned} \Omega_{\{n_k\}} &\approx \Omega_0 \prod_{k=1}^N (1 - (n_k + 1/2) \eta_k^2) \approx \\ &\approx \Omega_0 \left( 1 - \sum_{k=1}^N (n_k + 1/2) \eta_k^2 \right) \end{aligned} \quad (6)$$

с точностью до членов порядка  $\eta_k^2$ .

Если населенность состояния  $|0\rangle |\{n_k\}\rangle$  перед воздействием излучения равна  $p_{\{n_k\}}$ , то населенность состояния  $|1\rangle |\{n_k\}\rangle$  будет меняться со временем следующим образом:

$$P_{\{n_k\}}(t) = \frac{p_{\{n_k\}}}{2} (1 - \cos(\Omega_{\{n_k\}} t)). \quad (7)$$

Общая населенность уровня  $|1\rangle$  будет суммой (7) по всем возможным наборам  $\{n_k\}$ :

$$P(t) = \frac{1}{2} \sum_{\{n_k\}} p_{\{n_k\}} (1 - \cos(\Omega_{\{n_k\}} t)). \quad (8)$$

Если бы частота Раби не зависела от номеров колебательных уровней  $n_k$ , то все осцилляции в сумме выше были бы сфазированы, в результате чего зависимость  $P(t)$  представляла бы собой чистую синусоиду с постоянной амплитудой и частотой. Однако, как видно из (6), имеется слабая зависимость от  $\{n_k\}$ . В этом случае колебания с разными  $\{n_k\}$  через некоторое время перестанут быть в фазе (аналогично эффекту распывания волнового пакета), и видность осцилляций уменьшится (рис. 1).

Глубины типичных ионных ловушек намного выше величины средней тепловой энергии ионов даже без охлаждения, поэтому сумму по  $\{n_k\}$  можно рассматривать в виде бесконечного ряда:

$$P(t) = \frac{1}{2} \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} p_{\{n_k\}} (1 - \cos(\Omega_{\{n_k\}} t)). \quad (9)$$

Если

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} p_{\{n_k\}} = a, \quad (10)$$

т.е. населенность уровня  $|0\rangle$  в начальный момент рав-

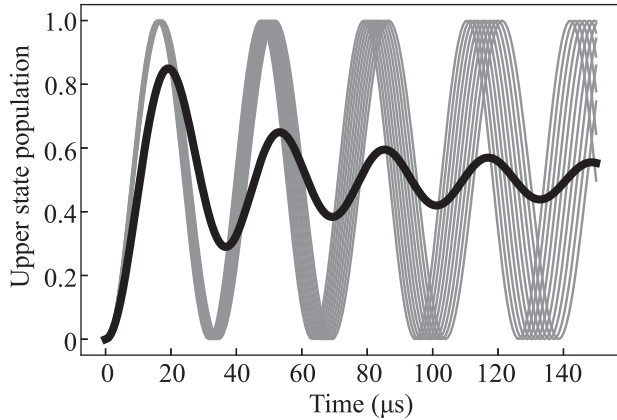


Рис. 1. Иллюстрация дефазировки осцилляций Раби. Серым цветом обозначены колебания населенности для первых 10 мод, черным — взвешенная сумма по всем модам

на  $a$ , то, принимая тепловое распределение со средними для каждой моды  $\bar{n}_k$ , получим для  $p_{\{n_k\}}$

$$p_{\{n_k\}} = a \frac{\exp\left(-\sum_{k=1}^N \alpha_k n_k\right)}{\prod_{k=1}^N (\bar{n}_k + 1)}, \quad (11)$$

где  $e^{-\alpha_k} = \bar{n}_k / (\bar{n}_k + 1)$ . Подставляя вместе с (6) в (9) и используя экспоненциальную запись косинуса, получаем

$$P(t) = \frac{a}{2} - \frac{a}{4 \prod_{k=1}^N (\bar{n}_k + 1)} \times \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \left[ e^{i\Omega_0 t} \exp\left(-\sum_{k=1}^N (\alpha_k n_k + i\Omega_0 \eta_k^2 t n_k + i\Omega_0 \eta_k^2 t / 2)\right) + \text{с.с.} \right]. \quad (12)$$

Слагаемое типа

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_N=0}^{\infty} \exp\left(-\sum_{k=1}^N (\alpha_k n_k + i\Omega_0 \eta_k^2 t (n_k + 1/2))\right) \quad (13)$$

можно записать в виде произведения сумм по отдельным  $n_k$  как

$$\prod_{k=1}^N \left[ e^{-i\Omega_0 \eta_k^2 t / 2} \sum_{n_k=0}^{\infty} \exp(-(\alpha_k + i\Omega_0 \eta_k^2 t) n_k) \right]. \quad (14)$$

Каждая из этих сумм является суммой геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} \sum_{n_k=0}^{\infty} \exp(-(\alpha_k + i\Omega_0 \eta_k^2 t) n_k) &= \frac{1}{1 - e^{-\alpha_k - i\Omega_0 \eta_k^2 t}} = \\ &= \frac{1 - e^{-\alpha_k + i\Omega_0 \eta_k^2 t}}{1 - 2e^{-\alpha_k} \cos(\Omega_0 \eta_k^2 t) + e^{-2\alpha_k}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для характеристики всей цепочки удобно ввести параметры  $r_k = \omega_k / \omega_1$ , где  $\omega_1$  — частота колебаний моды центра масс (моды, в которой вся ионная цепочка движется как единое целое). Изложенное выше рассмотрение справедливо для любых значений  $\{\bar{n}_k\}$  при условии нахождения цепочки в режиме Лэмба–Дике. Однако на практике наиболее интересен случай, соответствующий состоянию после доплеровского охлаждения цепочки, а именно, когда температуры всех мод оказываются равны. В этом случае средние колебательные числа всех мод могут быть выражены через среднее число фононов в моде центра масс  $\bar{n}$ , так что  $\bar{n}_k = \bar{n} / r_k$ . При этом функция  $P(t)$  с учетом определения  $\alpha_k$  примет вид

$$P(t) = \frac{a}{2} \times \left[ 1 - \frac{\text{Re} \left[ e^{i\Omega_0 t} \prod_{k=1}^N e^{-i\Omega_0 \eta_k^2 t / 2} \left( 1 - \frac{(\bar{n}/r_k) e^{i\Omega_0 \eta_k^2 t}}{\bar{n}/r_k + 1} \right) \right]}{\prod_{k=1}^N \left( (\bar{n}/r_k + 1) - 2(\bar{n}/r_k) \cos(\Omega_0 \eta_k^2 t) + \frac{(\bar{n}/r_k)^2}{(\bar{n}/r_k + 1)} \right)} \right] \quad (16)$$

и будет зависеть от трех параметров:  $\bar{n}$ ,  $a$ ,  $\Omega_0$ ; коэффициенты  $\eta_k$ ,  $r_k$  определяются геометрией ловушки [16] и частотой колебаний ионов и могут быть измерены с высокой точностью независимо. Заметим, что в общем случае возбуждения колебаний цепочки по всем трем осям формула (16) по-прежнему верна, с той лишь разницей, что в произведения по модам вместо параметров  $\eta_k$ ,  $\bar{n}$ ,  $r_k$  должны входить параметры типа  $\eta_{ik}$ ,  $\bar{n}_i$ ,  $r_{ik}$ , где  $i = x, y, z$  — индекс оси, а коэффициенты Лэмба–Дике зависят от направления пучка.

**3. Схема измерений.** Для исследования дефазировки осцилляций Раби был использован ион иттербия  $^{171}\text{Yb}^+$ , схема уровней которого приведена на рис. 2. Переход  $^2S_{1/2} \rightarrow ^2P_{1/2}$  служит для охлаждения иона и подготовки состояния. С этой целью основной лазерный пучок с длиной волны 369 нм при помощи электрооптических модуляторов делится на 3 частотные компоненты, две из которых отвечают за охлаждение, а одна — за накачку иона в основное состояние  $^2S_{1/2}(F=0)$ . Вспомогательный пучок на длине волны 935 нм осуществляет перекачку из состояния  $^2D_{3/2}$ . Осцилляции Раби производятся на

квадрупольном переходе  ${}^2S_{1/2}(F=0) \rightarrow {}^2D_{3/2}(F=2)$  с длиной волны 435 нм. Выбор данного перехода обусловлен его малой шириной (3 Гц), так что время жизни верхнего состояния намного больше характерного времени дефазировки.

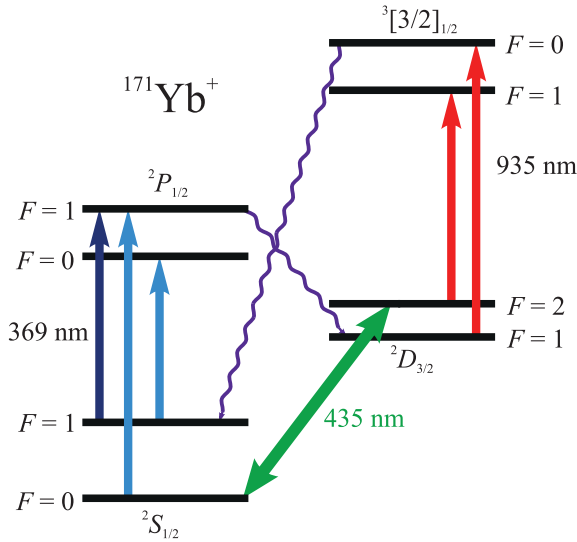


Рис. 2. (Цветной онлайн) Схема уровней иона  ${}^{171}\text{Yb}^+$ . Светло-синие стрелки показывают переходы, используемые для охлаждения, темно-синие – за накачку в основное состояние, красные – за перекачку

Эксперимент по измерению параметров дефазировки осцилляций проводится в несколько этапов. Сначала ионная цепочка охлаждается до температуры, близкой к доплеровскому пределу. Затем производится накачка ионов в основное состояние. Далее все лазерные источники выключаются, и система подвергается взаимодействию с окружением в течение некоторого варьируемого времени задержки. После этого на некоторый выделенный ион подается резонансный лазерный импульс на длине волны 435 нм, возбуждая квадрупольный переход; длительность этого импульса также варьируется. Наконец, электронное состояние данного иона детектируется методом квантовых скачков [17].

При фиксированном времени задержки исследуется зависимость населенности верхнего состояния квадрупольного перехода от времени возбуждения. Полученная кривая аппроксимируется функцией (16), и из параметров аппроксимации находится величина  $\bar{n}(\tau)$ , где  $\tau$  – время задержки. Данный эксперимент повторяется для нескольких значений  $\tau$ , и полученная зависимость аппроксимируется линейной функцией для определения темпов нагрева (в фононах в секунду).

Чтобы определить температуру ионной цепочки, достаточно провести описанный выше эксперимент

при нулевой задержке, тогда температура цепочки может быть вычислена по формуле

$$T = \frac{\hbar\omega_1}{k_B \ln(1 + 1/\bar{n}(0))}, \quad (17)$$

где  $\omega_1$  – частота моды центра масс (см. предыдущий раздел),  $k_B$  – постоянная Больцмана.

**4. Результаты эксперимента.** Для определения скорости нагрева в ловушку был пойман одиночный ион иттербия, так что произведения по модам в формуле (16) содержат всего 1 множитель. Поскольку воздействие на ион осуществлялось вдоль оси ловушки, релевантная частота колебаний равна аксиальной частоте, и параметры ловушки вычисляются по формулам

$$\eta_1 = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}}, \quad r_1 = 1, \quad (18)$$

где  $\lambda = 435$  нм,  $m$  – масса иона,  $\nu$  – частота аксиальной моды в герцах. Результаты измерений с одиночным ионом представлены на рис. 3. Параметры аппроксимации формулой (16) сведены в табл. 1. Из

Таблица 1. Результаты аппроксимации по измерениям дефазировки осцилляций Раби для одиночного иона

$\tau$ , мс	$\bar{n}$	$\Omega_0$ , мс <sup>-1</sup>	$a$
0	53.4	200.9	0.93
2	63.9	196.2	0.91
5	95.3	199.2	0.91
7	132.0	197.4	0.91
10	118.7	194.3	0.88

этой таблицы видно, что значение  $\Omega_0$  остается примерно постоянным с изменением времени задержки, что находится в согласии с принятой моделью. Кроме того, коэффициент  $a$  во всех случаях близок к единице. Его отличие от единицы можно объяснить совместным влиянием неточности подготовки состояния и неточности считывания; погрешность считывания во время калибровки установки достигала величин порядка 10–12 %.

Аппроксимируя функцию  $\bar{n}(\tau)$  линейной зависимостью (рис. 3f), находим скорость нагрева иона как коэффициент наклона прямой:

$$\dot{\bar{n}} = (8 \pm 2) \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}. \quad (19)$$

При выводе (16) неявно использовалось предположение о малом изменении  $\bar{n}$  за время измерений. Как видно из получившегося значения  $\dot{\bar{n}}$ , за 150 мкс увеличение количества фононов составляет не более 1–2, что пренебрежимо мало по сравнению со всеми  $\bar{n}$  в эксперименте, в том числе при нулевой задержке.

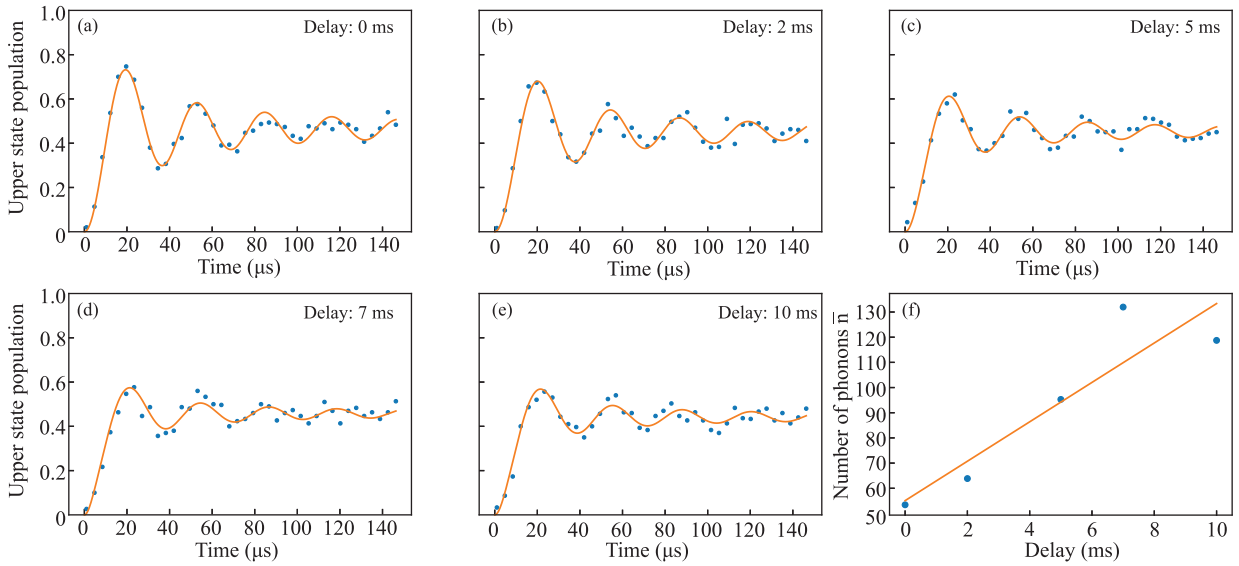


Рис. 3. (Цветной онлайн) (a)–(e) – Зависимость населенности верхнего состояния иона от времени возбуждения при задержках 0, 2, 5, 7 и 10 мс соответственно; (f) – зависимость среднего колебательного числа одиночного иона от времени задержки

Определение температуры ионной цепочки производилось для массива из 5 ионов. Для измерений был выбран первый ион в цепочке, так что параметры ловушки имели значения

$$\eta_k = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}} \{0.447, -0.486, 0.346, -0.173, 0.054\}, \quad (20)$$

$$r_k = \{1, 1.73, 2.41, 3.05, 3.67\}. \quad (21)$$

Результаты измерений для цепочки из 5 ионов показаны на рис. 4. Эффективное среднее колебательное

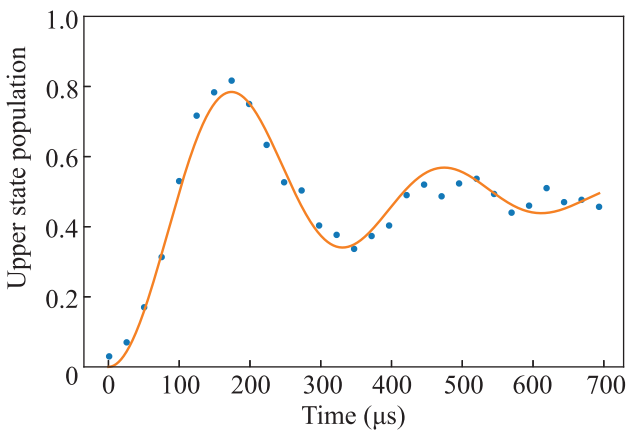


Рис. 4. (Цветной онлайн) Зависимость населенности верхнего состояния иона в цепочке от времени возбуждения

число, полученное путем аппроксимации, оказалось равным

$$\bar{n}(0) = 75 \pm 3. \quad (22)$$

Соответственно, температура цепочки, вычисленная по формуле (17), равна

$$T = 1.69 \pm 0.08 \text{ мК}. \quad (23)$$

Доплеровский предел для перехода  $^2S_{1/2} \rightarrow ^2P_{1/2}$  равен

$$T_D = \frac{\hbar\Gamma}{2k_B} = 0.5 \text{ мК}. \quad (24)$$

Полученная температура цепочки близка к этому пределу, а отличие от него может быть связано с увеличенной по сравнению с одиночным ионом скоростью нагрева, в частности, аномального (нагрева из-за флуктуаций потенциала на электродах и из-за близкого расположения ионной цепочки относительно их поверхности).

**5. Заключение.** В данной работе была получена аналитически и проверена экспериментально зависимость населенности возбужденного состояния иона в цепочке от времени его возбуждения резонансным излучением с учетом теплового распределения по колебательным степеням свободы. Результаты проверки теории позволяют говорить о применимости принятой модели в пределах точности измерений.

Предложенный метод (дефазировка осцилляций Раби), таким образом, дает возможность определить как температуру ионной цепочки, так и скорость его

нагрева в ловушке. Основными преимуществами этого метода являются его общность относительно количества ионов в цепочке, а также то, что он, в отличие от методов, упомянутых в введении, вполне применим для значений  $\bar{n}$  от 50 до 100 и дает адекватные результаты даже при скоростях нагрева порядка  $10^4$  фононов в секунду, что существенно расширяет диапазон поддающихся измерению параметров цепочек и ловушек.

Работы по анализу экспериментальных данных были выполнены А. С. Борисенко при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта # 20-32-90020. Все прочие исследования, включая разработку теоретической модели, были осуществлены остальными соавторами при финансовой поддержке Лидирующего исследовательского центра “Квантовые вычисления” (соглашение о предоставлении гранта # 014/20).

1. P. Wang, C. Y. Luan, M. Qiao, M. Um, J. Zhang, Y. Wang, X. Yuan, M. Gu, J. Zhang, and K. Kim, *Nat. Commun.* **12**, 1 (2021).
2. J. P. Gaebler, T. R. Tan, Y. Lin, Y. Wan, R. Bowler, A. C. Keith, S. Glancy, K. Coakley, E. Knill, D. Leibfried, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 1 (2016).
3. P. C. Holz, K. Lakhmanskiy, D. Rathje, P. Schindler, Y. Colombe, and R. Blatt, *Phys. Rev. B* **104**, 64513 (2021).
4. M. G. Blain, R. Haltli, P. Maunz, C. D. Nordquist, M. Revelle, and D. Stick, *Quantum Science and Technology* **6**, 34011 (2021).
5. J. M. Pino, J. M. Dreiling, C. Figgatt, J. P. Gaebler, S. A. Moses, M. S. Allman, C. H. Baldwin, M. Foss-Feig, D. Hayes, K. Mayer, C. Ryan-Anderson, and B. Neyenhuis, *Nature* **592**, 209 (2021).
6. B. B. Zelener, S. A. Saakyan, V. A. Sautenkov, A. M. Akulshin, E. A. Manykin, B. V. Zelener, V. E. Fortov, *JETP Lett.* **98**, 670 (2014).
7. L. A. Akopyan, I. V. Zalivako, K. E. Lakhmanskiy, K. Y. Khabarova, and N. N. Kolachevsky, *JETP Lett.* **112**, 585 (2020).
8. T. Manovitz, A. Rotem, R. Shaniv, I. Cohen, Y. Shapira, N. Akerman, A. Retzker, and R. Ozeri, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 220505 (2017).
9. C. H. Valahu, A. M. Lawrence, S. Weidt, and W. K. Hensinger, *New J. Phys.* **23**, 113012 (2021).
10. J. H. Wesenberg, R. J. Epstein, D. Leibfried, R. B. Blakestad, J. Britton, J. P. Home, W. M. Itano, J. D. Jost, E. Knill, C. Langer, R. Ozeri, S. Seidelin, and D. J. Wineland, *Physical Review A – Atomic, Molecular, and Optical Physics* **76**, 1 (2007).
11. R. J. Epstein, S. Seidelin, D. Leibfried et al. (Collaboration), *Phys. Rev. A* **76**, 33411 (2007).
12. C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, S. R. Jefferts, W. M. Itano, D. J. Wineland, and P. Gould, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4011 (1995).
13. J. Roßnagel, K. N. Tolazzi, F. Schmidt-Kaler, and K. Singer, *New J. Phys.* **17**, 45004 (2015).
14. S. Blatt, J. W. Thomsen, G. K. Campbell, A. D. Ludlow, M. D. Swallows, M. J. Martin, M. M. Boyd, and J. Ye, *Phys. Rev. A* **80**, 52703 (2009).
15. D. J. Wineland and W. M. Itano, *Phys. Rev. A* **20**, 1521 (1979).
16. D. F. V. James, *Appl. Phys. B* **66**, 181 (1998).
17. N. V. Semenik, A. S. Borisenko, I. V. Zalivako, I. A. Semerikov, K. Y. Khabarova, and N. N. Kolachevsky, *JETP Lett.* **114**, 486 (2021).