Письма в ЖЭТФ, том 116, вып. 9, с. 579 – 586

Пятиточечные корреляционные числа в минимальной Лиувиллевской гравитации

А. А. Артемьев[+*1)], *А. А. Белавин*[+× 1)]

[+]*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия*

[*]*Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия*

[×]*Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича, 127994 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 22 сентября 2022 г.
После переработки 23 сентября 2022 г.
Принята к публикации 27 сентября 2022 г.

Исследуются N-точечные корреляционные числа в минимальной Лиувиллевской гравитации. Мы демонстрируем, как использовать высшие уравнения движения Ал. Замолодчикова в теории Лиувилля для явного их вычисления и находим ответ при $N = 5$.

DOI: 10.31857/S1234567822210029, EDN: lgkgup

1. Введение. Существует несколько подходов к двумерной квантовой гравитации [1]. В одном из них, "непрерывном" подходе, изучается функциональный интеграл по всем римановым метрикам в двух измерениях, а также полям материи. В случае, когда теория поля материи конформная, после фиксации калибровки мы приходим к так называемой теории Лиувиллевской гравитации [2]; если сектор материи описывается минимальными моделями конформной теории поля [3], то говорят о минимальной Лиувиллевской гравитации (МЛГ) [4–6]. В другом "дискретном" подходе рассматриваются определенного вида интегралы по $L \times L$ матрицам в пределе $L \to \infty$; это так называемый подход матричных моделей (ММ) (обзор этого подхода дан, к примеру, в [7, 8]).

Из общих соображений ожидается, что эти подходы должны давать эквивалентные результаты; вычисления гравитационных размерностей и корреляционных чисел, подтверждающие эту гипотезу, были проведены в [4, 9–11]. В силу сложности явного вычисления со стороны МЛГ такие проверки были проведены только вплоть до 4-точечных корреляционных чисел (со стороны МЛГ четырехточечный коррелятор был вычислен в [12, 13]), хотя со стороны ММ в одноматричном случае выражения для любого N-точечного коррелятора могут быть получены весьма просто [11]. В этой работе мы попытаемся продвинуться в прямом вычислении высших корреляционных чисел в МЛГ (мы ограничимся случаем корреляторов на сфере).

Корреляционные числа в МЛГ определяются как вакуумные средние от произведения физических (BRST-замкнутых) операторов. Такие операторы являются либо локальными полями размерности 0, либо интегралами от локальных плотностей (полей размерности $(1,1)$) по мировой поверхности. Мы будем изучать корреляторы локальных операторов с духовым числом 1 $W_{m,n}$ и интегралов от соответствующих им локальных плотностей духового числа 0 $U_{m,n}(x)$ (определения и свойства всех этих полей описаны в следующем разделе). Из-за аномалии духового числа для незануления такого коррелятора на сфере в нем должно присутствовать 3 оператора типа W.

Отсюда следует, что трехточечная функция не содержит интегралов по мировой поверхности вовсе и для ее нахождения достаточно знать структурные константы в минимальных моделях [3] и теории поля Лиувилля [14–16]. Четырехточечный коррелятор содержит один интеграл по положению поля $U_{m,n}(x)$. В работе [13] был предложен способ вычисления такого коррелятора с использованием так называемых "высших уравнений движения" (ВУД) [17] в теории поля Лиувилля, которые позволяют свести интеграл $\int d^2x$ к вычислимым граничным вкладам от окрестностей точек $x_i, i = 1, 2, 3$ вставки операторов W и точки $x = \infty$.

Важным фактом, использованным в этом вычислении, является BRST-инвариантность всех остальных полей под знаком коррелятора и, следовательно, возможность отбросить BRST-точные члены в ВУД. Это уже не так для корреляторов с более чем од-

1)e-mail: artemev.aa@phystech.edu; belavin@itp.ac.ru

ним интегралом от плотности $\int d^2y_i\, U_{m,n}(y_i)$ – такие интегралы BRST-инвариантны только с точностью до граничных членов, которые нельзя отбросить. В этой статье мы продемонстрируем, однако, что учет $\mathcal{Q}$-точных членов в ВУД, примененных к одной из интегрируемых плотностей $\int d^2y_1\, U_{m,n}(y_1)$, сводит интеграл по y_1 к граничным вкладам, имеющим вид четырехточечного коррелятора; причем вклад от окрестности точки вставки второй плотности y_2 имеет вид, аналогичный вкладам от окрестностей точек x_i.

Эта статья имеет следующую структуру: в разделе 2 мы кратко суммируем необходимые для дальнейших вычислений факты о МЛГ. В разделе 3 мы описываем предлагаемый способ вычисления пятиточечного коррелятора и приводим полученный ответ.

2. Пререквизиты. Минимальная Лиувиллевская гравитация – конформная теория поля с полным центральным зарядом 0, состоящая из теории поля Лиувилля, описывающей гравитацию, минимальной модели CFT в качестве сектора материи и B, C-системы репараметризационных BRST-духов с центральным зарядом -26.

$$A_{\mathrm{MLG}} = A_L + A_{\mathcal{M}_{q,q'}} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int d^2x\, \left(C\bar{\partial}B + \bar{C}\partial\bar{B}\right)}_{A_{\mathrm{ghost}}}. \quad (1)$$

Центральный заряд теории Лиувилля определяется условием $c_L + c_M + c_{gh} = 0$ и, соответственно, характеристиками минимальной модели – числами (q', q).

Сектор материи $\mathcal{M}_{q,q'}$. Минимальная модель CFT определяется парой взаимнопростых чисел q, q'; ее пространство состояний состоит из конечного набора неприводимых представлений алгебры Вирасоро с вырожденным старшим весом, т.е. вырожденных полей $\Phi_{m,n}$ с $1 \le m < q$ и $1 \le n < q'$ и их потомков. Обозначим за $q/q' = b^2$, тогда центральный заряд $\mathcal{M}_{q',q}$

$$c = 1 - 6(b^{-1} - b)^2, \quad (2)$$

а размерности вырожденных полей $\Phi_{m,n}$

$$\Delta^M_{m,n} = -(b^{-1} - b)^2/4 + \lambda^2_{m,-n}, \qquad \lambda_{m,n} = (mb^{-1} + nb)/2. \quad (3)$$

Мы также будем обозначать эти примарные поля Φ_α, где параметр α связан с размерностью согласно $\Delta^{(M)}_\alpha = \alpha(\alpha - b^{-1} + b)$. Дополнительно к описанному выше в минимальной модели:

1. Все вырожденные поля $\Phi_{m,n}$ составляют спектр теории.

2. В каждом модуле Вирасоро, порожденном $\Phi_{m,n}$, проведена факторизация по подмодулю, порожденному сингулярным потомком на уровне mn

$$D^{(\mathrm{M})}_{m,n}\Phi_{m,n} = \bar{D}^{(\mathrm{M})}_{m,n}\Phi_{m,n} = 0, \quad (4)$$

где $D^{(\mathrm{M})}_{m,n}$ $(\bar{D}^{(\mathrm{M})}_{m,n})$ – определенные операторы уровня mn из голоморфных (антиголоморфных) мод Вирасоро в минимальной модели L^M_n $(\bar{L}^M_n)$.

3. Предполагается отождествление полей $\Phi_{q-m,q'-n} = \Phi_{m,n}$.

Эти требования задают теорию единственным образом и позволяют, в частности, однозначно определить структурные константы в минимальной модели.

Теория поля Лиувилля. Гравитационный сектор описывается квантовой версией классической теории поля, основанной на действии Лиувилля. Это конформная теория поля с центральным зарядом, параметризуемым переменной b или $Q = b^{-1} + b$ как

$$c_{\mathrm{L}} = 1 + 6Q^2. \quad (5)$$

В МЛГ из требования зануления полного центрального заряда следует, что параметр b в теории Лиувилля должен совпадать с $\sqrt{q/q'}$, как он был определен в предыдущем разделе. Он входит в лагранжиан теории следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{L}} = \frac{1}{4\pi}\left(\partial_a\phi\right)^2 + \mu e^{2b\phi}. \quad (6)$$

Здесь μ – дополнительный параметр теории, называемый космологической постоянной, а ϕ – динамическая степень свободы, оставшаяся после фиксации калибровки в интеграле по метрикам.

Примарные поля в теории – экспоненциальные операторы $V_a \equiv \exp(2a\phi)$, параметризованные непрерывным (комплексным) параметром a; соответствующая конформная размерность

$$\Delta^{(\mathrm{L})}_a = a(Q - a). \quad (7)$$

Два вида Лиувиллевских операторов будут важны нам для построения физических полей в МЛГ. Первый – это вырожденные поля $V_{m,n} \equiv V_{a_{m,n}}$ с

$$a_{m,n} = -b^{-1}\frac{(m-1)}{2} - b\frac{(n-1)}{2}. \quad (8)$$

Вырожденные поля подчиняются уравнениям $D^{(L)}_{m,n}V_{m,n} = \bar{D}^{(L)}_{m,n}V_{m,n} = 0$, аналогичным минимальным моделям. Второй вид – это поля $V_{m,-n}$, используемые для построения исследуемых классов когомологий в МЛГ (см. ниже).

Трехточечная функция в теории Лиувилля [16] $C_{\mathrm{L}}(a_1, a_2, a_3) = \langle V_{a_1}(0)V_{a_2}(1)V_{a_3}(\infty)\rangle_{\mathrm{L}}$ известна явно:

$$C_{\mathrm{L}}(a_1, a_2, a_3) = \quad (9)$$
$$= \left(\pi\mu\gamma(b^2)b^{2-2b^2}\right)^{(Q-a)/b}\frac{\Upsilon_b(b)}{\Upsilon_b(a-Q)}\prod_{i=1}^{3}\frac{\Upsilon_b(2a_i)}{\Upsilon_b(a-a_i)},$$

где $a = a_1 + a_2 + a_3$ и $\Upsilon_b(x)$ – некоторая специальная функция [16]. Операторное разложение (OPE) в теории Лиувилля дается следующей формулой:

$$V_{a_1}(x)V_{a_2}(0) = \qquad (10)$$
$$= \int' \frac{dP}{4\pi} C^{(\mathrm{L})Q/2+iP}_{a_1,a_2} (x\bar{x})^{\Delta^{(\mathrm{L})}_{Q/2+iP} - \Delta^{(\mathrm{L})}_{a_1} - \Delta^{(\mathrm{L})}_{a_2}} \left[V_{Q/2+iP}(0)\right]$$

где структурная константа связана с (9) как $C^{(\mathrm{L})p}_{a_1,a_2} = C_{\mathrm{L}}(g, a, Q-p)$. Интегрирование здесь идет по мнимой оси, если a_1 и a_2 лежат в области

$$|Q/2 - \mathrm{Re}\, a_1| + |Q/2 - \mathrm{Re}\, a_2| < Q/2. \qquad (11)$$

Мы требуем аналитичности в других областях параметров, т.е. к интегралу нужно добавить отдельно вычеты в полюсах, пересекающих контур при аналитическом продолжении из области (11). Эти добавочные вклады (“дискретные члены”) особенно важны, чтобы формула (10) воспроизводила операторное разложение с вырожденными полями $V_{m,n}$.

Духи и BRST-инвариантность. Духовый сектор – фермионная (B, C)-система с размерностями полей $(2, -1)$

$$A_{\mathrm{gh}} = \frac{1}{\pi}\int (C\bar{\partial}B + \bar{C}\partial\bar{B})d^2x \qquad (12)$$

и центральным зарядом -26, которая появляется в результате фиксации калибровки методом Фаддеева–Попова. В МЛГ появляется нечетная BRST-симметрия, генерируемая (голоморфным) зарядом

$$\mathcal{Q} = \oint (CT + C\partial CB)\, \frac{dz}{2\pi i}, \qquad (13)$$

где T – тензор энергии импульса материи и теории Лиувилля. По определению физические состояния в МЛГ – классы BRST-когомологий $\mathcal{Q}$ и антиголоморфного заряда $\bar{\mathcal{Q}}$.

Физические поля и их корреляторы. Простейшие представители когомологий с духовым числом ноль могут быть получены “одеванием” примарных полей $\Phi_{m,n}$ Лиувиллевскими операторами $V_{m,-n}$; суммарная размерность $U_{m,n} \equiv V_{m,-n}\Phi_{m,n}$ равна $(1,1)$. BRST-вариация $U_{m,n}$ дается

$$\mathcal{Q}U_{m,n} = \partial(CU_{m,n}), \qquad (14)$$

поэтому интегралы от $U_{m,n}$ по сфере BRST-инвариантны (с точностью до возможных граничных членов в зависимости от других вставок).

Чтобы получить локальные физические поля с духовым числом 1, вместо интегрирования можно рассмотреть $(0,0)$-форму $W_{m,n} \equiv C\bar{C}U_{m,n}$; она BRST-замкнута: $\mathcal{Q}W_{m,n} = \bar{\mathcal{Q}}W_{m,n} = 0$. Мы также будем параметризовать такие поля числом a: $W_a = V_a\Phi_{a-b}$.

В минимальной гравитации существует дополнительный набор BRST-замкнутых полей духового числа ноль, образующих так называемое “кольцо дискретных состояний” [18]. Они построены из потомков вырожденных полей в обоих секторах и имеют общий вид

$$O_{m,n}(x) = H_{m,n}\bar{H}_{m,n}\Theta_{m,n}, \quad \Theta_{m,n} \equiv V_{m,n}\Phi_{m,n}, \qquad (15)$$

где $H_{m,n}$ – полином степени $mn-1$ из мод Вирасоро L^M_k, L_k, а также духов B и C. Общий вид $H_{m,n}$ неизвестен, но можно найти его в каждом отдельном случае, потребовав $\mathcal{Q}$-замкнутости $O_{m,n}$. Эти операторы играют важную роль в выводе “высших уравнений движения”.

Свойства операторов из кольца дискретных состояний включают:

1. Независимость корреляторов от их положения в том смысле, что

$$\partial O_{m,n} = \text{BRST-точное}. \qquad (16)$$

2. Простые правила слияния в когомологиях друг с другом

$$O_{m,n}(x)O_{m',n'}(0) =$$
$$= \sum_{r=|m-m'|+1:2}^{m+m'+1} \sum_{s=|n-n'|+1:2}^{n+n'+1} G^{(m,n)|(m',n')}_{r,s} O_{r,s}(0) +$$
$$+ \text{BRST-точное}. \qquad (17)$$

3. А также с операторами W_a духового числа 1

$$O_{m,n}W_a = \sum_{r=-m+1:2}^{m-1} \sum_{s=-n+1:2}^{n-1} A^{(m,n)}_{r,s}(a) W_{a+\frac{rb^{-1}+sb}{2}} +$$
$$+ \text{BRST-точное}. \qquad (18)$$

Перенормировкой операторов $O_{m,n}$ и $W_{m,n}$ коэффициенты $G^{(m,n)|(m',n')}_{r,s}$ и $A^{(m,n)}_{r,s}(a)$ могут быть сделаны единичными; более явно, верны следующие формулы

$$G^{(m,n)|(m',n')}_{r,s} = \frac{\Lambda_{m,n}\Lambda_{m',n'}}{\Lambda_{r,s}};\ \Lambda_{m,n} = \frac{B_{m,n}}{\pi}\mathcal{N}(a_{m,-n}), \qquad (19)$$

$$A^{(m,n)}_{r,s}(a) = \frac{B_{m,n}}{\pi}\frac{\mathcal{N}(a)\mathcal{N}(a_{m,-n})}{\mathcal{N}(a+\lambda_{r,s})}, \qquad (20)$$

$$\mathcal{N}(a) = \frac{\pi}{(\pi\mu)^{a/b}}\left[\frac{\gamma(2ab-b^2)\gamma(2ab^{-1}-b^{-2})}{\gamma^{2a/b-1}(b^2)\gamma(2-b^{-2})}\right]^{1/2}, \qquad (21)$$

где $B_{m,n}$ определена ниже (23). Таким образом, необходимая перенормировка $\mathcal{O}_{m,n} = \Lambda_{m,n}^{-1} O_{m,n}$ и $\mathcal{W}_a = \mathcal{N}(a)^{-1} W_a$.

Высшие уравнения движения и МЛГ. ВУД в теории Лиувилля говорят о так называемых логарифмических операторах V_a'; по определению

$$V_a'(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a} V_a(x). \tag{22}$$

Мы будем обозначать за $V_{m,n}'$ такие производные по параметру, вычисленные в точке $a = a_{m,n}$.

Согласно ВУД, потомки логарифмических операторов можно отождествить (с точностью до константы) с примарными полями $V_{m,-n}$ [17]; именно,

$$D_{m,n}^{(L)} \bar{D}_{m,n}^{(L)} V_{m,n}' = \tag{23}$$
$$= B_{m,n} V_{m,-n},\ B_{m,n} = (\pi\mu\gamma(b^2) b^{2-2b^2})^n \frac{\Upsilon_b'(2\alpha_{m,n})}{\Upsilon_b(2\alpha_{m,-n})}.$$

Из этих формул можно получить ключевое для наших целей соотношение в МЛГ: определив $O_{m,n}' := H_{m,n}\bar{H}_{m,n}\Theta_{m,n}'$, где $\Theta_{m,n}' := \Phi_{m,n} V_{m,n}'$, имеем следующую связь (см. [13, 19])

$$U_{m,n} = B_{m,n}^{-1}(\bar\partial - \bar{\mathcal{Q}}\bar{B}_{-1})(\partial - \mathcal{Q}B_{-1}) O_{m,n}'. \tag{24}$$

Здесь B_{-1} – мода духового поля B.

Четырехточечный коррелятор. Продемонстрируем применение (24) на примере четырехточечного коррелятора, следуя [12]. Выделив отдельно нормировочные факторы $\prod_{i=1}^{3} \mathcal{N}(a_i) \times \mathcal{N}(a_{m,-n})$, с учетом определений перенормированных операторов выше мы рассматриваем

$$C_4(a_1, a_2, a_3|m,n) \equiv \tag{25}$$
$$\equiv \frac{1}{Z_L} \left\langle \int d^2x\, \frac{U_{m,n}(x)}{\mathcal{N}(a_{m,-n})} \mathcal{W}_{a_1}(x_1)\mathcal{W}_{a_2}(x_2)\mathcal{W}_{a_3}(x_3) \right\rangle.$$

Перепишем $U_{m,n}$ согласно (24). Поскольку W-операторы $\mathcal{Q}$-замкнуты, мы игнорируем BRST-точные члены; получим

$$Z_L\, C_4(a_1, a_2, a_3|m,n) =$$
$$= \left\langle \int d^2x\, \partial\bar\partial \frac{O_{m,n}'}{B_{m,n}\mathcal{N}(a_{m,-n})} \mathcal{W}_{a_1}\mathcal{W}_{a_2}\mathcal{W}_{a_3} \right\rangle =$$
$$= \frac{1}{\pi} \left\langle \int d^2x\, \partial\bar\partial \mathcal{O}_{m,n}' \mathcal{W}_{a_1}\mathcal{W}_{a_2}\mathcal{W}_{a_3} \right\rangle. \tag{26}$$

Теперь мы можем использовать формулу Стокса для взятия интеграла по x, т.к. имеем там полную производную. Граничные вклады от окрестностей $x = x_i$ и $x = \infty$ $O_{m,n}'$ ненулевые из-за того, что при слиянии O' с W будут логарифмические члены, которые дают дельта-функцию после дифференцирования. Эти логарифмические члены мы и должны вычислить.

Вклад от бесконечности берется из того, что $V_{m,n}'$ при $x \to \infty$ ведет себя как (см. [13])

$$V_{1,2}'(x) \sim -\Delta_{m,n}' \log(x\bar{x}) V_{1,2}(0),$$
$$\Delta_{m,n}' \equiv 2\lambda_{m,n} = mb^{-1} + nb. \tag{27}$$

Аналогично ведет себя и $O_{m,n}'$; на бесконечности мы можем заменить его на $O_{m,n}$ с тем же коэффициентом и логарифмом. Соответствующий граничный вклад дается

$$-2\lambda_{m,n} \langle \mathcal{O}_{m,n}(0)\mathcal{W}_{a_1}(x_1)\mathcal{W}_{a_2}(x_2)\mathcal{W}_{a_3}(x_3)\rangle. \tag{28}$$

Этот коррелятор не зависит от положения $O_{m,n}$ (следует из описанных ранее свойств), поэтому мы можем сдвинуть его к любому из полей $\mathcal{W}$ и провести операторное разложение, получив, например,

$$-2\lambda_{m,n} \sum_{r=-m+1:2}^{m-1} \times$$
$$\times \sum_{s=-n+1:2}^{n-1} \langle \mathcal{W}_{a_1+\lambda_{r,s}}(x_1)\mathcal{W}_{a_2}(x_2)\mathcal{W}_{a_3}(x_3)\rangle. \tag{29}$$

Логарифмические факторы в OPE O' с W могут возникнуть только от дифференцирования по a степенных факторов $(x\bar{x})$ в дискретных членах в Лиувиллевской части. Например, для случая OPE $V_{1,2}'V_a$ мы получим

$$\log(x\bar{x})\Big(q_{0,1}^{(1,2)}(a)(x\bar{x})^{ab} C_L^+(a)[V_{a-b/2}(0)] +$$
$$+ q_{0,-1}^{(1,2)}(a)(x\bar{x})^{1-ab+b^2} C_L^-(a)[V_{a+b/2}(0)]\Big), \tag{30}$$

$$q_{r,s}^{(m,n)} \equiv |a - \lambda_{r,s} - \frac{Q}{2}| - \lambda_{m,n}. \tag{31}$$

Другими словами, результат напоминает OPE с обычным примарным полем $V_{1,2}$, помимо дополнительных факторов $q_{r,s}^{(1,2)}$. Это же справедливо для общего случая $V_{m,n}'$. Перемножая OPE в Лиувилле и минимальных моделях и действуя $H_{m,n}\bar{H}_{m,n}$, мы получим выражение, аналогичное (18) вида

$$\mathcal{O}_{m,n}'(x)\mathcal{W}_a(0) = \tag{32}$$
$$= \log(x\bar{x}) \sum_{r=-m+1:2}^{m-1} \sum_{s=-n+1:2}^{n-1} q_{r,s}^{(m,n)}(a)\mathcal{W}_{a-\lambda_{r,s}} + \ldots$$

Соответствующие вклады в четырехточечный коррелятор (с дополнительным знаком "–" из-за противоположной ориентации граничных контуров для окрестностей x_i и ∞)

$$-\sum_{i=1}^{3} \sum_{r=-m+1:2}^{m-1} \sum_{s=-n+1:2}^{n-1} q_{r,s}^{(m,n)}(a_i)\langle \mathcal{W}_{a_i-\lambda_{r,s}} \ldots \rangle \tag{33}$$

Теперь, используя, что нормированные на $\mathcal{N}(a)$ трехточечные корреляторы не зависят от параметров a_i и равны $-b^{-2}(b^{-4}-1)$ [13, 20], мы приходим к итоговому ответу

$$C_4(a_1,a_2,a_3|m,n) = -(b^{-6}-b^{-2}) \times \tag{34}$$
$$\times \left[-2mn\lambda_{mn} - \sum_{i=1}^{3} \sum_{r=-m+1:2}^{m-1} \sum_{s=-n+1:2}^{n-1} q_{r,s}^{(m,n)}(a_i) \right].$$

3. Пятиточечный коррелятор. В этом разделе мы попытаемся модифицировать рассмотренный ранее метод на случай пятиточечного (и высших) корреляторов. Для простоты мы ограничимся $(2,2p+1)$ МЛГ; нормированный коррелятор имеет вид

$$C_5(a_1,a_2,a_3|k_1,k_2) = Z_L^{-1} \times \tag{35}$$
$$\times \left\langle \int d^2x \, \frac{U_{1,k_1+1}(x)}{\mathcal{N}(a_{1,-1-k_1})} \times \right.$$
$$\left. \times \int d^2y \, \frac{U_{1,k_2+1}(y)}{\mathcal{N}(a_{1,-1-k_2})} \mathcal{W}_{a_1}(x_1)\mathcal{W}_{a_2}(x_2)\mathcal{W}_{a_3}(x_3) \right\rangle.$$

Будем считать без ограничения общности, что $k_1 \leq \leq k_2$. Начнем вычисление с применения ВУД для поля U_{k_1}; член со второй производной $\partial\bar{\partial}\mathcal{O}'_{m,n}$ может быть сведен к граничным вкладам в окрестностях x_i, y и ∞.

Вклады при $x \sim x_i$. Здесь мы проводим ОРЕ $\mathcal{O}'$ с $\mathcal{W}_a(x_i)$. Как и раньше, только логарифмические члены важны для этой цели; в сумме полученные вклады дадут

$$-\sum_{i=1}^{3} \sum_{s=-k_1:2}^{k_1} q_{0,s}^{(1,k_1+1)}(a_i) \times$$
$$\times \left\langle \int d^2y \, \frac{U_{1,k_2+1}(y)}{\mathcal{N}(a_{1,-1-k_2})} \, \mathcal{W}_{a_i-\lambda_{0,s}}(x_i) \ldots \right\rangle, \tag{36}$$

т.е. выражаются в терминах ранее вычисленного 4-точечного коррелятора.

Вклад при $x \to \infty$. Используя асимптотическое поведение $O'(x)$ при $x \to \infty$, соответствующий граничный вклад дается

$$-2\lambda_{1,k_1+1} \int d^2y \, \left\langle \mathcal{O}_{1,k_1+1}(0) \, \frac{U_{1,k_2+1}(y)}{\mathcal{N}(a_{1,-1-k_2})} \, \prod_{i=1}^{3} \mathcal{W}_{a_i} \right\rangle. \tag{37}$$

Для его вычисления применим ВУД теперь для $U_{1,k_2+1}(y)$. $\mathcal{Q}$-точные члены теперь не важны, так как все остальные операторы $\mathcal{Q}$-замкнуты; мы получим

$$-\frac{2\lambda_{1,k_1+1}}{\pi} \times$$
$$\times \int d^2y \, \partial\bar{\partial} \left\langle \left(\mathcal{O}'_{1,1+k_2}(y)\right) \mathcal{O}_{1,k_1+1}(0) \prod_{i=1}^{3} \mathcal{W}_{a_i} \right\rangle. \tag{38}$$

Теперь к граничным членам в окрестностях $x_i, 0, \infty$ сводится интеграл по y. Новый элемент, появляющийся здесь – логарифмический вклад в ОРЕ $O'_{1,1+k_2}(y)O_{1,k_1+1}(0)$. Поскольку в логарифмических членах ОРЕ $V'_{1,k}$ и V_a такое же, как ОРЕ с обычным примарным полем $V_{1,k}$ (помимо факторов $q_{r,s}^{(m,n)}$), достаточно добавить такие же факторы в правую часть (17):

$$\mathcal{O}'_{1,k_2+1}(y)\mathcal{O}_{1,k_1+1}(x) = \log|y-x|^2 \times$$
$$\times \sum_{s=k_2-k_1}^{k_2+k_1} q_{0,s-k_1}^{(1,k_2+1)}(a_{1,k_1+1})\mathcal{O}_{1,1+s} + \ldots \tag{39}$$

Четырехточечный коррелятор $\langle OWWW \rangle$ теперь может быть вычислен, как раньше.

Вклад при $x \sim y$. Эти вклады наиболее проблематичны для вычисления из-за двух проблем. Во-первых, такие граничные члены возникают не только от $\partial\bar{\partial}O'_{1,1+k_1}$, но и от $\mathcal{Q}$-точных членов в ВУД. Во-вторых, из-за отсутствия дополнительных духов C логарифмические члены в ОРЕ $O'_{1,1+k_1}(x)$ с $U_{1,1+k_2}$ не так просты, как (32). Однако мы утверждаем, что эти две проблемы компенсируют друг друга; конкретизируем это утверждение. Перепишем произведение операторов $U_{1,1+k_1}(x)U_{1,1+k_2}(y)$ с использованием (24) как

$$B_{1,1+k_1}U_{1,1+k_1}(x)U_{1,1+k_2}(y) =$$
$$= (\bar{\partial}\partial - \bar{\mathcal{Q}}\bar{B}_{-1}\partial - \bar{\partial}\mathcal{Q}B_{-1} + \bar{\mathcal{Q}}\bar{B}_{-1}\mathcal{Q}B_{-1}) \times$$
$$\times O'_{m,n}(x)U_{1,1+k_2}(y). \tag{40}$$

Перебросив действие $\mathcal{Q}$ и $\bar{\mathcal{Q}}$ с $O'_{m,n}(x)$ на $U_{1,1+k_2}(y)$, получим в правой части (40)

$$(\bar{\partial}\partial O'_{m,n})U_{1,1+k_2} - \bar{\partial}B_{-1}O'_{m,n}\mathcal{Q}U_{1,1+k_2} - \tag{41}$$
$$- \partial\bar{B}_{-1}O'_{m,n}\bar{\mathcal{Q}}U_{1,1+k_2} + \bar{B}_{-1}B_{-1}O'_{m,n}\bar{\mathcal{Q}}\mathcal{Q}U_{1,1+k_2}.$$

Наконец, используя $\mathcal{Q}U_{1,1+k_2} = \partial_y(CU_{1,1+k_2})$, пятиточечный коррелятор переписывается как

$$\int d^2y \int d^2x \, \partial_x\bar{\partial}_x \left(H_{1,1+k_1}\bar{H}_{1,1+k_1}\Theta'_{1,1+k_1}\right) \times$$
$$\times U_{1,1+k_2}(y)W_{a_1}(x_1)W_{a_2}(x_2)W_{a_3}(x_3) - \tag{42}$$
$$- \int d^2y \int d^2x \, \bar{\partial}_x \left(R_{1,1+k_1}\bar{H}_{1,1+k_1}\Theta'_{1,1+k_1}\right) \times$$
$$\times \partial_y(CU_{1,1+k_2}(y))W_{a_1}(x_1)W_{a_2}(x_2)W_{a_3}(x_3) - \tag{43}$$
$$- \int d^2y \int d^2x \, \partial_x \left(\bar{R}_{1,1+k_1}H_{1,1+k_1}\Theta'_{1,1+k_1}\right) \times$$
$$\times \bar{\partial}_y(\bar{C}U_{1,1+k_2}(y))W_{a_1}(x_1)W_{a_2}(x_2)W_{a_3}(x_3) + \tag{44}$$
$$+ \int d^2y \int d^2x \, R_{1,1+k_1}\bar{R}_{1,1+k_1}\Theta'_{1,1+k_1}\partial_y\bar{\partial}_y \times$$
$$\times \left(C\bar{C}U_{1,1+k_2}(y)\right) W_{a_1}(x_1)W_{a_2}(x_2)W_{a_3}(x_3), \tag{45}$$

где $R_{1,1+k} := B_{-1}H_{1,1+k}$. Для (42) мы применили теорему Стокса в интеграле по x и вычислили все граничные вклады, кроме $x \sim y$; в (43), (44), (45) же, если свести к интегралу по границе $\int d^2y$, поскольку у $CU/\bar{C}U$ и W нет достаточно сингулярных вкладов в OPE и на бесконечности $CU/\bar{C}U$ затухает быстрее, чем $\bar{z}^{-1}/z^{-1}$ соответственно, ненулевые вклады будут только при $x \to y$. Нам снова нужны логарифмические члены в OPE типа $R\bar{H}\Theta'(x)CU(y)$ или $R\bar{R}\Theta'(x)C\bar{C}U(y)$, чтобы вычислить эти вклады; мы рассмотрели несколько первых примеров и убедились, что в сумме с граничными членами от окрестности $x \sim y$ из (42) мы получаем вклад, выглядящий так же, как (36):

$$-\sum_{s=-k_1:2}^{k_1} \frac{q_{0,s}^{(1,k_1+1)}(a_{1,-k_2-1})}{\mathcal{N}(a_{1,-1-(k_2-s)})} \left\langle \int d^2y\, U_{1,(k_2-s)+1}(y)\mathcal{W}_{a_i}(x_i)\dots \right\rangle. \tag{46}$$

Проиллюстрируем это на примере $k_1 = 1$. Нам понадобится явный вид

$$H_{1,2} = L_{-1}^M - L_{-1} + b^2CB,\ R_{1,2} = b^2B, \tag{47}$$

а также OPE

$$V'_{1,2}(x)V_a(y) = \log(|x-y|^2)\left[\overbrace{|x-y|^{2ab}\tilde{C}_L^+(a)[V_{a-b/2}(y)]}^{(1)} + \overbrace{|x-y|^{2(1-ab+b^2)}\tilde{C}_L^-(a)[V_{a+b/2}(y)]}^{(2)}\right], \tag{48}$$

$$\Phi_{1,2}(x)\Phi_{a-b}(y) = \underbrace{|x-y|^{2(ab-b^2)}C_M^+(a-b)[\Phi_{a-b/2}(y)]}_{(3)} + \underbrace{|x-y|^{2(1-ab)}C_M^-(a-b)[\Phi_{a-3b/2}(y)]}_{(4)}. \tag{49}$$

Здесь $a = b + \alpha_{1,k_2+1}$, а $\tilde{C}_L$ – структурные константы теории Лиувилля, помноженные на q-факторы, как в (30). Перемножая равенства выше и действуя $H_{1,2}\bar{H}_{1,2}$, мы получаем OPE $O'_{1,1+k_1}$ и $U_{1,1+k_2}$; оставляя только логарифмические вклады, на уровне примарных полей имеем

$$\begin{aligned}\log|x-y|^2 \times \Bigg[&\tilde{C}_L^+C_M^+\left(-\frac{b^2}{x-y} + b^2CB\right)\left(-\frac{b^2}{\overline{x-y}} + b^2\overline{CB}\right) \times |x-y|^{2(2ab-b^2)}V_{a-b/2}\Phi_{a-b/2}(y) + \\ &+ \tilde{C}_L^+C_M^-\left(\frac{1-2ab}{x-y} + b^2CB\right)\left(\frac{1-2ab}{\overline{x-y}} + b^2\overline{CB}\right) \times |x-y|^2U_{a-b/2}(y) + \\ &+ \tilde{C}_L^-C_M^+\left(\frac{2ab-2b^2-1}{x-y} + b^2CB\right)\left(\frac{2ab-2b^2-1}{\overline{x-y}} + b^2\overline{CB}\right) \times |x-y|^2U_{a+b/2}(y) + \\ &+ \tilde{C}_L^-C_M^-\left(-\frac{b^2}{x-y} + b^2CB\right)\left(-\frac{b^2}{\overline{x-y}} + b^2\overline{CB}\right) \times |x-y|^{2(2-2ab+b^2)}V_{a+b/2}\Phi_{a-3b/2}(y)\Bigg].\end{aligned} \tag{50}$$

Вторая производная $\partial_x\bar{\partial}_x$ от этого дает вклад от $x \sim y$ в (42). Из-за отсутствия духов C члены, не имеющие вид $U_\# = V_\#\Phi_{\#-b}$, не сокращаются, а в "правильных" членах появляются духи. Однако содержащие духи множители выглядят как OPE

$$R_{1,2}(x)C(y) = \frac{b^2}{x-y} + b^2BC + \dots \tag{51}$$

Ровно так выглядят граничные вклады от строчек (43), (44), (45). Например, для строчки (44) мы имеем

$$\begin{aligned}-\partial_x\bar{\partial}_y\log|x-y|^2 \times \Bigg[&\tilde{C}_L^+C_M^+\left(\frac{b^2}{x-y} - b^2CB\right)\left(-\frac{b^2}{\overline{x-y}} + b^2\overline{CB}\right) \times |x-y|^{2(2ab-b^2)}V_{a-b/2}\Phi_{a-b/2}(y) + \\ &+ \tilde{C}_L^+C_M^-\left(\frac{b^2}{x-y} - b^2CB\right)\left(\frac{1-2ab}{x\bar{-}y} + b^2C\bar{B}\right) \times |x-y|^2U_{a-b/2}(y) + \\ &+ \tilde{C}_-^LC_+^M\left(\frac{b^2}{x-y} - b^2CB\right)\left(\frac{2ab-2b^2-1}{\overline{x-y}} + b^2\overline{CB}\right) \times |x-y|^2U_{a+b/2}(y) + \\ &+ \tilde{C}_L^-C_M^-\left(\frac{b^2}{x-y} - b^2CB\right)\left(-\frac{b^2}{\overline{x-y}} + b^2\overline{CB}\right) \times |x-y|^{2(2-2ab+b^2)}V_{a+b/2}\Phi_{a-3b/2}(y)\Bigg].\end{aligned}$$

На уровне примарных полей, т.е. дифференцируя только коэффициенты, зависящие от $x-y$, мы можем заменить $\bar{\partial}_y$ на $-\bar{\partial}_x$, после чего вклады от строчек (42) и (44), пропорциональные $V_{a-b/2}\Phi_{a-b/2}$ и $V_{a+b/2}\Phi_{a-\frac{3b}{2}}$ сокращаются под производной. Такое же сокращение происходит и для подобных вкладов из строчек (43) и (45). С другой стороны, суммируя вклады типа $U_{a-b/2}$ от всех четырех строчек, мы получаем

$$\left(\frac{1-2ab}{x-y}+b^2CB\right)\left(\frac{1-2ab}{\overline{\overline{x-y}}}+b^2\overline{CB}\right)+\left(\frac{1-2ab}{x-y}+b^2CB\right)\left(\frac{b^2}{\overline{\overline{x-y}}}-b^2\overline{CB}\right)+$$
$$+\left(\frac{b^2}{x-y}-b^2CB\right)\left(\frac{1-2ab}{\overline{\overline{x-y}}}+b^2\overline{CB}\right)+\left(\frac{b^2}{x-y}-b^2CB\right)\left(\frac{b^2}{\overline{\overline{x-y}}}-b^2\overline{CB}\right)=$$
$$=\left(\frac{1-2ab}{x-y}+b^2CB+\frac{b^2}{x-y}-b^2CB\right)\times\left(\frac{1-2ab}{\overline{\overline{x-y}}}+b^2\overline{CB}+\frac{b^2}{\overline{\overline{x-y}}}-b^2\overline{CB}\right)=$$
$$=\frac{1}{|x-y|^2}(1-2ab+b^2)^2. \tag{52}$$

Видим, что духов не осталось и мы получили такой же фактор, как для OPE O' с W (см. (20)).

Все вместе. Собирая (36), (38) и (46), мы получили следующее выражение для пятиточечного коррелятора

$$C_5(a_1,a_2,a_3|k_1,k_2)=(b^{-6}-b^{-2})\,[\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3]\,; \tag{53}$$

$$\Sigma_1=\sum_{s=-k_1:2}^{k_1}q_{0,s}^{(1,k_1+1)}(a_{1,-k_2-1})\times\left[2(1+k_2-s)\lambda_{1,1+k_2-s}+\sum_{i=1}^{3}\sum_{l=-k_2+s:2}^{k_2-s}q_{0,l}^{(1,1+k_2-s)}(a_i)\right], \tag{54}$$

$$\Sigma_2=\sum_{i=1}^{3}\sum_{s=-k_1:2}^{k_1}q_{0,s}^{(1,k_1+1)}(a_i)\left[2(1+k_2)\lambda_{1,1+k_2}+\sum_{l=-k_2:2}^{k_2}\left(q_{0,l}^{(1,k_2+1)}(a_i-\lambda_{0,s})+\sum_{j\neq i}q_{0,l}^{(1,k_2+1)}(a_j)\right)\right], \tag{55}$$

$$\Sigma_3=2\lambda_{1,1+k_1}\left[\sum_{s=-k_1:2}^{k_1}\sum_{l=-k_2:2}^{k_2}\left(\sum_{i=1}^{3}q_{0,l}^{(1,1+k_2)}(a_i)+2\lambda_{1,k_2+1}\right)+\sum_{s=k_2-k_1}^{k_2+k_1}q_{0,s-k_1}^{(1,k_2+1)}(a_{1,k_1+1})(1+s)\right]. \tag{56}$$

Работа была проведена в Институте теоретической физики им. Ландау в рамках государственного задания # 0029-2019-0004.

1. A. Belavin, M. Bershtein, and G. Tarnopolsky, Письма в ЖЭТФ **93**(2), 51 (2011) [JETP Lett. **93**(2), 471 (2011)].
2. A. Polyakov, Phys. Lett. B **103**, 207 (1981).
3. A. Belavin, A. Polyakov, and A. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **241**, 333 (1984).
4. V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, Mod. Phys. Lett. A **3**, 819 (1988).
5. F. David, Mod. Phys. Lett. A **3**, 1651 (1988).
6. J. Distler and H. Kawai, Nucl. Phys. B **321**, 509 (1989).
7. P. H. Ginsparg and G. W. Moore, arXiv:hep-th/9304011.
8. P. Di Francesco, P. H. Ginsparg, and J. Zinn-Justin, Phys. Rep. **254**, 1 (1995); hep-th/9306153.
9. M. Goulian and M. Li, Phys. Rew. Lett. **66**, 2051 (1991).
10. G. W. Moore, N. Seiberg, and M. Staudacher, Nucl. Phys. B **362**, 665 (1991).
11. A. Belavin and A. Zamolodchikov, Jour. Phys. A **42**, 304004 (2009); arXiv:0811.0450 [hep-th].
12. A. Belavin and Al. Zamolodchikov, Theor. Math. Phys. **147**, 729 (2006); hep-th/0510214.
13. A. Belavin and Al. Zamolodchikov, JETP Lett. **82**, 8 (2005).
14. H. Dorn and H.-J. Otto, Phys. Lett. B **291**, 39 (1992); hep-th/9206053.
15. H. Dorn and H.-J. Otto, Nucl. Phys. B **429**, 375 (1994); hep-th/9403141.
16. A. Zamolodchikov and Al. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **477**, 577 (1996).
17. Al. Zamolodchikov, Int. J. Mod. Phys. A **19S2**, 510 (2004); hep-th/0312279.
18. E. Witten, Nucl. Phys. B **373**, 187 (1992); hep-th/9108004.
19. A. Belavin and V. Belavin, J. Phys. A **42**, 304003 (2009); arxiv: hep-th/08101023.
20. Al. Zamolodchikov, Theor. Math. Phys. **142**, 183 (2005).