

Прямое численное моделирование акустической турбулентности: спектр Захарова–Сагдеева

Е. А. Кочурин^{+*}, Е. А. Кузнецов^{*×^o1})

⁺Институт электрофизики Уральского отделения РАН, 620016 Екатеринбург, Россия

^{*}Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия

[×]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

^oИнститут теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черногловка, Россия

Поступила в редакцию 22 октября 2022 г.

После переработки 3 ноября 2022 г.

Принята к публикации 3 ноября 2022 г.

Представлены результаты прямого численного моделирования трехмерной акустической турбулентности в средах со слабой положительной дисперсией. Показано, что в начале длинноволновой области в распределении энергии турбулентности в k -пространстве происходит формирование джетов в виде узких конусов. При больших волновых числах конусы уширяются, а распределение соответственно стремится к изотропному. В этой области волновых чисел усредненный по углу спектр турбулентности приобретает степенной характер, $E(k) \propto k^{-\alpha}$, с показателем, близким к $3/2$, что соответствует спектру слабой акустической турбулентности Захарова–Сагдеева.

DOI: 10.31857/S1234567822240028, EDN: ndvodb

Введение. В основе теории слабой волновой турбулентности, как хорошо известно (см., например, [1–3]), лежит предположение о слабости нелинейного взаимодействия волн по сравнению с линейной дисперсией, определяемой зависимостью второй производной собственной частоты волн малой амплитуды ω от волнового вектора \mathbf{k} . Для волн на глубокой воде как для гравитационных, так и для капиллярных волн во всей области волновых чисел вторая производная $\omega(\mathbf{k})$ отлична от нуля. Благодаря этому линейные волны с разными \mathbf{k} , распределенные начально по Гауссу, практически остаются таковыми при учете слабой нелинейности. Каждая волна, двигаясь со своей частотой и волновым вектором, испытывает влияние других волн на расстояниях L , больших по сравнению с длиной волны, $\sim k^{-1}$. Это дает возможность, используя приближение случайных фаз, описать систему волн статистически с помощью кинетических уравнений для числа волн (квазичастиц) n_k [1]. В главном приближении по нелинейности кинетические уравнения описывают либо процессы распада ($1 \rightarrow 2$), когда

$$\omega_k = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad (1)$$

или в случае четырехволнового взаимодействия процессы рассеяния ($2 \rightarrow 2$), для которых выполняется условие резонанса

$$\omega_k + \omega_{k_1} = \omega_{k_2} + \omega_{k_3}, \quad \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3. \quad (2)$$

Из этих резонансных условий сразу следует, что для волн акустического типа, когда ω_k линейно зависит от волнового вектора \mathbf{k} , резонансные условия (1) и (2) выполняются автоматически при условии коллинеарности волновых векторов \mathbf{k}_i всех взаимодействующих волн. Это означает, что все резонансные волны распространяются в одном направлении с одной и той же скоростью. Строго говоря, в такой ситуации кинетическое уравнение не может быть применимо. Необходим учет дисперсии волн, которая должна обеспечивать применимость теории слабой турбулентности. Таким образом, в законе дисперсии ω_k нужно удерживать в длинноволновом пределе следующие – кубические по \mathbf{k} – слагаемые. В изотропных средах это разложение записывается как

$$\omega_k = kc_s(1 \pm a^2k^2 + \dots), \quad (3)$$

где c_s – скорость звука, а a – масштабный параметр, характеризующий дисперсию волн. При знаке $+$ в (3) говорят о положительной дисперсии, при другом знаке – об отрицательной дисперсии. Условие резонанса (1) выполняется только при положительной дисперсии, и соответственно не выполняется при другом знаке дисперсии (последнее означает, что при слабой нелинейности главным процессом является четырехволновой, для которого условие (2) выполнено).

¹)e-mail: kuznetso@itp.ac.ru

В данной работе мы рассмотрим случай положительной дисперсии для трехмерной ($D = 3$) акустической турбулентности. Как было выяснено в работах [5, 4], кинетическое уравнение при $D = 3$ обладает в длинноволновом пределе масштабнo-инвариантным решением колмогоровского типа, не зависящим от длины a . Это изотропное решение – спектр турбулентности Захарова–Сагдеева $E(k) \propto \propto k^{-3/2}$, который описывает прямой каскад с постоянным потоком энергии ε из длинноволновой области в область больших волновых чисел. Факт независимости спектра от дисперсионной длины связан с интегрируемой особенностью в кинетическом уравнении, обязанной наличием двух δ -функций, т.е. резонансов (1). В двумерном случае в области малых k особенность является неинтегрируемой. Как было выяснено недавно [6], спектр в этом случае является степенным, $\propto k^{-1}$, но зависит явно от масштабного дисперсионного параметра a .

В данной статье представлены результаты прямого численного моделирования трехмерной акустической турбулентности в средах со слабой положительной дисперсией. Показано, что в области, близкой к накачке, в распределении энергии в k -пространстве возникают джеты в виде узких конусов. При больших волновых числах конусы уширяются, а распределение соответственно стремится к изотропному. В этой области волновых чисел усредненный по углу спектр турбулентности приобретает степенной характер, $E(k) \propto k^{-\alpha}$, с показателем, близким к $3/2$, что соответствует спектру слабой акустической турбулентности Захарова–Сагдеева [4].

Основные уравнения. Прямое численное моделирование акустической турбулентности проводилось в рамках уравнения нелинейной струны для скалярной функции u , зависящей от трех пространственных координат $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ и времени t :

$$u_{tt} = \Delta u - 2a^2 \Delta^2 u + \Delta(u^2), \quad (4)$$

где a – дисперсионный параметр, введенный нами выше, Δ – оператор Лапласа. Отметим, что это уравнение в одномерном случае относится к уравнениям, интегрируемым методом обратной задачи рассеяния [7]. В трехмерной геометрии для исследования слабой акустической турбулентности впервые эта модель была использована Захаровым в работе [5]. В линейном приближении уравнение (4) имеет закон дисперсии

$$\omega^2 = k^2 + 2a^2 k^4, \quad k = |\mathbf{k}|, \quad (5)$$

совпадающий со спектром Боголюбова для колебаний конденсата слабо-неидеального бозе-газа. Ско-

рость звука c_s в этом выражении равна 1. В случае слабой дисперсии $ka \ll 1$ этот закон дисперсии переходит в (3).

Уравнение (4) относится к гамильтоновским системам, оно может быть представлено в виде системы двух уравнений:

$$u_t = \frac{\delta H}{\delta \phi}, \quad \phi_t = -\frac{\delta H}{\delta u}, \quad (6)$$

где ϕ имеет смысл гидродинамического потенциала, а гамильтониан H записывается в виде

$$H = \frac{1}{2} \int [(\nabla \phi)^2 + u^2] d\mathbf{r} + \int a^2 (\nabla u)^2 d\mathbf{r} + \frac{1}{3} \int u^3 d\mathbf{r} \equiv \equiv H_1 + H_2 + H_3. \quad (7)$$

В гамильтониане (7) выделены три слагаемых. Первое H_1 представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергии линейных бездисперсионных волн. Второе слагаемое H_2 отвечает за дисперсионную часть энергии, а H_3 ответственно за нелинейное взаимодействие волн.

Совершая далее Фурье-преобразование по пространственным переменным и вводя нормальные переменные a_k и a_k^* ,

$$u_k = \left(\frac{k^2}{2\omega_k} \right)^{1/2} (a_k + a_{-k}^*),$$

$$\phi_k = -i \left(\frac{\omega_k}{2k^2} \right)^{1/2} (a_k - a_{-k}^*),$$

уравнения (6) принимают стандартный вид [8]:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -i \frac{\delta H}{\delta a_k^*}, \quad (8)$$

где

$$H = \int \omega_k |a_k|^2 d\mathbf{k} + \frac{1}{2} \int V_{k_1 k_2 k_3} (a_{k_1}^* a_{k_2} a_{k_3} + + a_{k_1} a_{k_2}^* a_{k_3}^*) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3.$$

В этом гамильтониане в нелинейном члене мы оставили только один резонансный член, отвечающий процессам распада (1).

В приближении слабой дисперсии в квадратичном гамильтониане H мы будем далее учитывать дисперсионную добавку,

$$\omega_k = k(1 + a^2 k^2),$$

а в матричном элементе $V_{k_1 k_2 k_3}$ ей будем пренебрегать:

$$V_{k_1 k_2 k_3} = \frac{3}{4\pi^{3/2}} (k_1 k_2 k_3)^{1/2}.$$

Отсюда кинетическое уравнение для парного коррелятора n_k ($\langle a_k^* a_{k_1} \rangle = n_k \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)$) в приближении слабой турбулентности записывается в виде

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = 2\pi \int d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 (T_{kk_1k_2} - T_{k_1kk_2} - T_{k_2kk_1}), \quad (9)$$

где

$$T_{kk_1k_2} = |V_{kk_1k_2}|^2 (n_{k_1} n_{k_2} - n_k n_{k_2} - n_k n_{k_1}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}). \quad (10)$$

Спектр турбулентности $E(k)$, т.е. зависимость энергии от модуля k , находится из решения этого уравнения после усреднения величины $\omega_k n_k k^2$ по всему телесному углу Ω :

$$E(k) = k^2 \omega_k \int n_k d\Omega.$$

Для изотропных распределений очевидно $E(k) = 4\pi k^2 \omega_k n_k$.

Как было впервые отмечено Захаровым [5], в кинетическом уравнении (9) в случае изотропных распределений можно пренебречь в ω_k дисперсионной добавкой, несмотря на наличие в столкновительном члене произведения двух дельта-функций по частотам и волновым векторам, которые дают сингулярность в кинетическом уравнении. Эта особенность в кинетическом уравнении после усреднения по углам оказывается интегрируемой. В результате кинетическое уравнение допускает для n_k стационарное решение степенного вида: $n_k \propto k^\alpha$. Показатель α для спектра колмогоровского типа находится с помощью преобразований Захарова (см. [1]): $\alpha = -11/2$, что соответствует спектру Захарова–Сагдеева [4]:

$$E(k) = C \varepsilon^{1/2} k^{-3/2}. \quad (11)$$

Здесь C – константа (постоянная Колмогорова–Захарова), а ε – темп диссипации энергии в единице объема, представляющий собой поток энергии по спектру. Степенная зависимость от ε в спектре (11) с показателем $1/2$ отвечает резонансному трехволновому взаимодействию.

Существование спектра Захарова–Сагдеева в инерционном интервале, как спектра колмогоровского типа, было подтверждено в ряде работ [9–11] при численном решении кинетического уравнения (9) в присутствии длинноволновой накачки и высокочастотного затухания. Важно отметить, что численное исследование слабой звуковой турбулентности в рамках кинетического уравнения (9) в трехмерном случае было проведено только для изотропных распределений. В данной работе мы

покажем, что при прямом численном моделировании трехмерной акустической турбулентности, описываемой уравнением (4), дополненным затуханием при больших k и накачкой в области длинных волн, структура спектров не является изотропной, особенно это проявляется в области малых k .

С учетом накачки и затухания уравнения (6) записываются в виде:

$$u_t = -\Delta \phi + \mathcal{F}(\mathbf{k}, t) - \gamma_k u, \quad (12)$$

$$\phi_t = -u + 2a^2 \Delta u - u^2, \quad (13)$$

где оператор γ_k , ответственный за диссипацию, и накачка $\mathcal{F}(\mathbf{k}, t)$ заданы в Фурье-пространстве в виде:

$$\gamma_k = 0, \quad k \leq k_d,$$

$$\gamma_k = \gamma_0, \quad k > k_d,$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}, t) = F(k) \cdot \exp[iR(\mathbf{k}, t)],$$

$$F(k) = F_0 \cdot \exp[-(k - k_1)^4 / k_2^4], \quad k \leq k_2,$$

$$F(k) = 0, \quad k > k_2.$$

Здесь $R(\mathbf{k}, t)$ – случайные числа, равномерно распределенные в интервале $[0, 2\pi]$, γ_0 и F_0 – константы. Величина k_1 определяет волновое число, на котором достигается максимум амплитуды накачки, а k_2 задает ее ширину, а k_d соответствует масштабу, на котором происходит диссипация.

Численная схема и параметры. Численное интегрирование системы уравнений (12) и (13) осуществлялось в кубической области размером $(2\pi)^3$ с периодическими граничными условиями по всем трем координатам. По времени интегрирование проводилось по явной схеме методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности с шагом $\delta t = 2.5 \cdot 10^{-3}$. По пространственным координатам уравнения интегрировались с помощью спектральных методов с полным числом гармоник $N^3 = 512^3$. Для подавления эффекта элайзинга в работе использовался фильтр, обнуляющий высшие гармоники с волновым числом выше $k_a > N/3$. Ниже приведены результаты численного моделирования для следующих параметров: $k_d = 125$, $k_1 = 3$, $k_2^4 = 6$, $\gamma_0 = 100$, $a = 2.5 \cdot 10^{-3}$, $F_0 = 5 \cdot 10^5$. При таком выборе параметров инерционный интервал составил более одной декады. При этом максимальная дисперсионная добавка на границе инерционного интервала при $k = k_d$ составляла $(k_d a)^2 \approx 0.1$.

Результаты моделирования. В численном эксперименте при указанных выше параметрах мы наблюдали переход в режим слабой турбулентности. На рисунке 1 показано, как эволюционирует полная энергия системы (7). Можно видеть, что достаточно

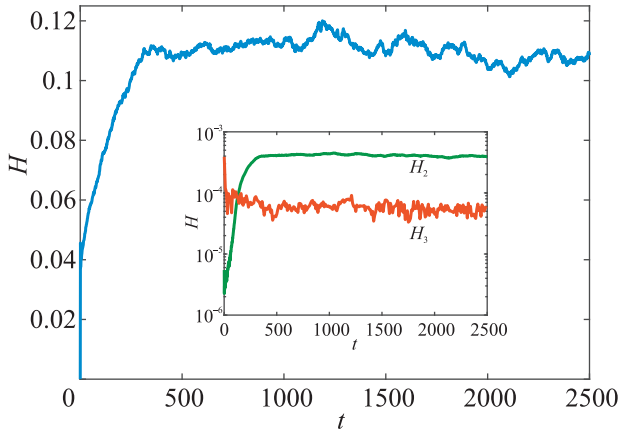


Рис. 1. (Цветной онлайн) Полная энергия системы (7) в зависимости от времени для $a = 2.5 \cdot 10^{-3}$. Во вставке показаны временные зависимости дисперсионной части энергии H_2 и энергии нелинейного взаимодействия H_3

быстро происходит переход в режим квазистационарного хаотического движения, когда влияние накачки в области малых k полностью компенсируется диссипативными эффектами. Во вставке к рис. 1 показаны временные зависимости дисперсионной части энергии H_2 и энергии нелинейного взаимодействия H_3 . Оба вклада H_2 и H_3 оказываются малыми по сравнению с полной энергией системы (соответственно с H_1). При этом дисперсионная часть энергии превышает энергию нелинейного взаимодействия почти на порядок, что свидетельствует о реализации слабонелинейного режима. Таким образом, полная энергия в инерционном интервале приблизительно равна $H_1 \approx \int \epsilon_k d\mathbf{k}$, где $\epsilon_k = k|a_k|^2$ – плотность энергии волн в k -пространстве.

О слабонелинейном характере распространения волн свидетельствует также поведение спектра пространственно-временного преобразования Фурье функции $u(\mathbf{r}, t)$, представленного на рис. 2. На графике видно, что энергия волн сосредоточена вдоль линейного дисперсионного соотношения (5). Уширение линии обязано нелинейности. Практически для всего инерционного интервала это уширение не превышает линейную дисперсию. При малых k уширение сравнимо с дисперсией. При больших k дисперсия превышает нелинейное уширение, что согласуется с отношением соответствующих вкладов H_2 и H_3 .

Численный эксперимент демонстрирует, что после выхода системы в квазистационарное состояние поведение $u(\mathbf{r})$ приобретает сложный (турбулентный) характер. На рисунке 3 это поведение демонстрирует зависимость функции $u(\mathbf{r})$ в плоскости

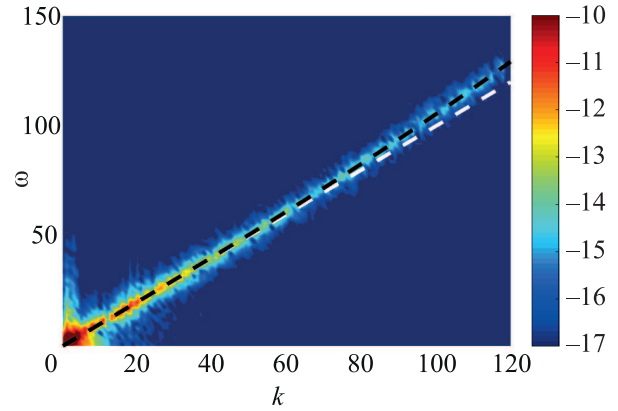


Рис. 2. (Цветной онлайн) Пространственно-временное преобразование Фурье $|u(\mathbf{k}, \omega)|^2$ показано в логарифмическом масштабе. Черные пунктирные линии соответствуют точному значению дисперсионной кривой (5), белые пунктирные линии – бездисперсионному распространению волн, $\omega = |\mathbf{k}|$

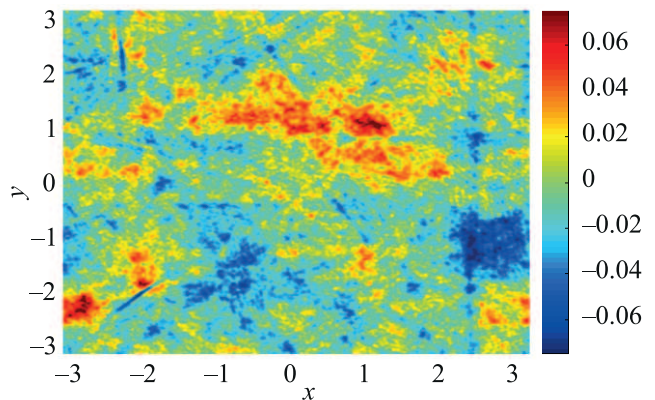


Рис. 3. (Цветной онлайн) Сечение функции $u(\mathbf{r})$ плоскостью $z = 0$ в момент $t = 2500$, соответствующий квазистационарному состоянию

$z = 0$ для квазистационарного состояния в момент $t = 2500$. При этом распределение плотности энергии турбулентных пульсаций ϵ_k в k -пространстве не является изотропным. Анизотропия особенно проявляется в области малых волновых чисел вблизи накачки.

На рисунке 4 представлены три изоповерхности функции $|u_{\mathbf{k}}| (= \epsilon_k^{1/2})$. Можно видеть, что в области малых волновых чисел в распределении турбулентных пульсаций возникают структуры с большим количеством джетов в виде узких конусов. Возникновение таких структур является результатом резонансных волновых взаимодействий (1) при очень малых k , близких к области накачки, когда дисперсией можно пренебречь. С увеличением k конусы уширяются, а распределение приближается к изотропному (см.

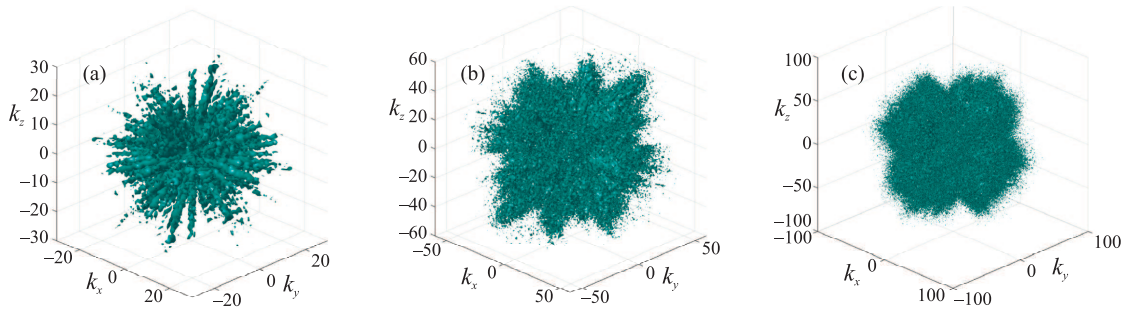


Рис. 4. (Цветной онлайн) Изоповерхности Фурье-спектра $|u_{\mathbf{k}}| = u_0$, (a), (b) и (c) соответствуют значениям $u_0 = 5 \cdot 10^{-5}$, $0.5 \cdot 10^{-5}$ и $0.25 \cdot 10^{-5}$, соответственно, $t = 2500$

рис. 5). На этом рисунке голубой цвет (при $k \geq 30$)

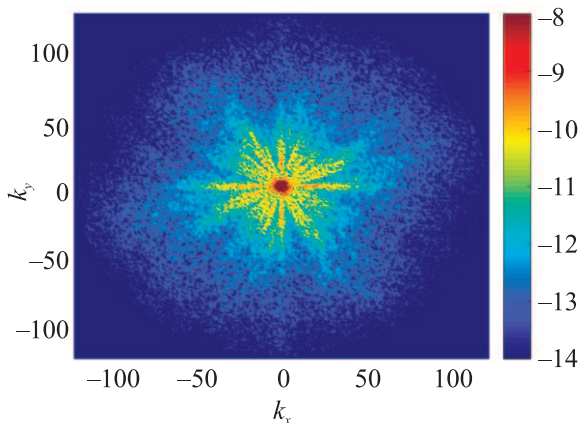


Рис. 5. (Цветной онлайн) Фурье-спектр $|u_{\mathbf{k}}| \equiv \epsilon_k^{1/2}$ в сечении $k_z = 0$ (логарифмический масштаб), $t = 2500$

показывает тенденцию к изотропизации спектра, что связано с ростом дисперсии при увеличении k и соответственно с угловым уширением резонансной поверхности (1) на угол порядка ka .

Рождение джетов связано с двумя возможными причинами: линейными и нелинейными. Во-первых, это дискретность решетки волновых векторов в области накачки $1 \leq k \leq 6$, что неминуемо приводит к небольшой анизотропии в возбуждении и различию в росте возмущений на начальной стадии. Во-вторых, благодаря тому, что дисперсия в силу уравнений стремится к нулю при малых k , трехволновые резонансные условия выполняются для произвольного луча. Формирование джета происходит от лучей, которые имеют преимущество по сравнению с другими лучами. Этот процесс – процесс кооперации лучей в джет – имеет явно нелинейный характер. Это, в частности, следует из численных результатов, представленных на рис. 4 и 5, для которых контрасты по интенсивности в джетах и областями между ними значительны: разница достигает двух

порядков. По нашему мнению, такой скачок интенсивности не может объясняться только малой анизотропией накачки, а имеет нелинейное происхождение, возможно, благодаря коллапсу звуковых волн, описываемому трехмерным уравнением Кадомцева–Петвиашвили (см. обзор [12]). Следует отметить также, что джеты, как показывают численные эксперименты, возникают при зарождении развитой гидродинамической турбулентности [13]. Этот вопрос, однако, выходит за рамки данной работы: требуется проведение новых численных экспериментов с большим пространственным разрешением.

Для нахождения спектра турбулентности $E(k)$, как отмечалось выше, необходимо проинтегрировать выражение $k^2 \epsilon_k$ по всему телесному углу. На рисунке 6 представлен результат этого усреднения по углу для момента времени, соответствующего квазистационарному состоянию. Из рисунка 6 хорошо видно, что в режиме квазистационарного хаотического движения спектр величины $E(k)$ приобретает степенной характер. Напомним, что инерционный интервал составил, $k \in [6, 100]$. Как видно из рис. 6, в инерционном интервале существуют две области с различным поведением спектра. В области больших волновых чисел спектр слабой звуковой турбулентности с высокой точностью совпадает со спектром Захарова–Сагдеева (11), а в длинноволновой области наблюдаются отклонения от этого спектра, которые, по нашему мнению, возникают из-за джетов, роль которых существенна при малых k . Следует отметить, что похожие большие отклонения осцилляторного характера от спектра Захарова–Сагдеева наблюдались численно при моделировании колебаний конденсата в рамках уравнения Гросса–Питаевского [14]. По нашему мнению, эти отклонения могут быть связаны с анизотропией, обусловленной наличием джетов. Джеты в эксперименте [14] обнаружены не были. В нашем численном эксперименте спектральная плотность энергии ϵ_k , как это следует из рис. 4 и 5, при-

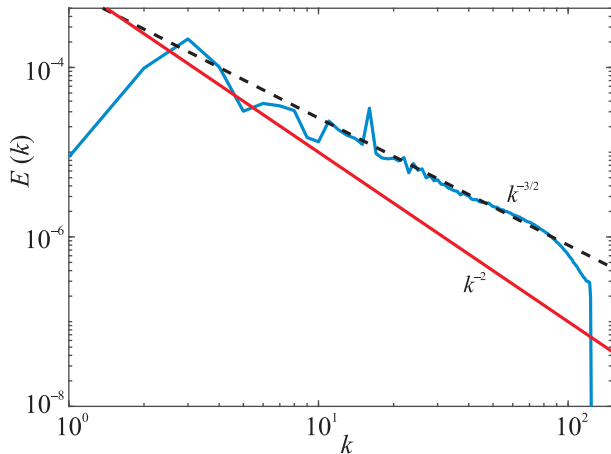


Рис. 6. (Цветной онлайн) Спектр турбулентности $E(k)$, измеренный в квазистационарном состоянии, черная пунктирная линия соответствует спектру Захарова–Сагдеева (11), красная сплошная – спектру Кадомцева–Петвиашвили

ближается к изотропному распределению в области больших k . При этом дисперсия $(ka)^2$ в этой области меняется от 10^{-3} до 10^{-1} , т.е. остается слабой. Эти два фактора способствуют формированию спектра Захарова–Сагдеева. Особо следует подчеркнуть, что найденный спектр турбулентности далек от спектра Кадомцева–Петвиашвили $E_{KP} \propto k^{-2}$ [15], относящегося к бездисперсионному пределу ($a = 0$).

Заключение. В настоящей работе проведено прямое численное моделирование трехмерной звуковой волновой турбулентности в среде со слабой положительной дисперсией с учетом накачки и диссипации энергии. В работе установлено, что система нелинейных взаимодействующих слабодисперсионных волн достаточно быстро переходит в квазистационарное хаотическое состояние, представляющее собой развитую волновую турбулентность. В квазистационарном режиме волновое поле приобретает сложный, хаотический характер. В длинноволновой области, близкой к накачке, в спектре турбулентности обнаружено появление узких джетов в виде конусов, расширяющихся при переходе в область коротких волн. Последнее приводит к тому, что спектральная плотность энергии ϵ_k стремится в области больших k к изотропному распределению, для которого дисперсия остается слабой. Именно в этой области масштабов вычисленный в стационарном состоянии спектр турбулентности с высокой точностью согла-

суется с аналитическим спектром слабой звуковой турбулентности Захарова–Сагдеева. Численно установлено, что для данного спектра полностью выполняются критерии слабой турбулентности. Отметим, что полученный результат – это есть первое достоверное наблюдение спектра слабой турбулентности звуковых волн в средах с положительной дисперсией в прямом трехмерном численном моделировании.

Авторы благодарят В. Е. Захарова за полезные обсуждения. Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российским научным фондом (грант # 19-72-30028).

1. V. E. Zakharov, G. Falkovich, and V. S. L'vov, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin (1992).
2. Б. Б. Кадомцев, *Турбулентность плазмы, в сб. Вопросы теории плазмы*, Атомиздат, М. (1964), т. 4, с. 188.
3. Б. Б. Кадомцев, В. М. Конторович, *Изв. вузов. Радиофизика* **17**, 511 (1974) [B. B. Kadomtsev and V. M. Kontorovich, *Radiophys. Quantum Electron.* **17**, 386 (1974)].
4. В. Е. Захаров, Р. З. Сагдеев, *Докл. АН СССР* **192**(2), 297 (1970) [V. E. Zakharov and R. Z. Sagdeev, *Sov. Phys. Dokl.* **15**, 439 (1970)].
5. В. Е. Захаров, *ПМТФ* **4**, 35 (1965) [V. E. Zakharov, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **6**(4), 22 (1965)].
6. A. Griffin, G. Krstulovic, V. S. L'vov, and S. Nazarenko, *PRL* **128**, 224501 (2022).
7. В. Е. Захаров, *ЖЭТФ* **65**, 219 (1973) [V. E. Zakharov, *Sov. Phys. JETP* **38**(1), 108 (1974)].
8. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, *УФН* **40**, 1087 (1997).
9. В. Е. Захаров, С. Л. Мушер, *Докл. АН СССР* **209**(5), 1063 (1973).
10. C. Connaughton, *Physica D* **238**, 2282 (2009).
11. C. Connaughton and P. L. Krapivsky, *Phys. Rev. E* **81**, 035303(R) (2010).
12. Е. А. Кузнецов, *ЖЭТФ* **162**, 143 (2022) [E. A. Kuznetsov, *JETP* **135**, 121 (2022)].
13. Д. С. Агафонцев, Е. А. Кузнецов, А. А. Майлыбаев, Е. В. Серещенко, *УФН* **192**, 205 (2022) [D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, A. A. Mailybaev, and E. V. Sereshchenko, *Phys.-Uspekhi* **65**(2), 189 (2022)].
14. D. Proment, S. Nazarenko, and M. Onorato, *Physica D* **241**, 304 (2012).
15. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, *Докл. АН СССР* **208**, 794 (1973).