

Влияние беспорядка на магнитотранспорт в полупроводниковом искусственном графене

О. А. Ткаченко⁺¹⁾, В. А. Ткаченко^{+*}, Д. Г. Бакшеев^{*}, О. П. Сушков[×]

⁺ Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия

^{*} Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

[×] School of Physics, University of New South Wales, 2052 Sydney, Australia

Поступила в редакцию 15 ноября 2022 г.

После переработки 1 декабря 2022 г.

Принята к публикации 8 декабря 2022 г.

В рамках формализма Ландауэра–Бьюттикера промоделирован магнитотранспорт в мезоскопических образцах с полупроводниковым искусственным графеном. Модельные четырехтерминальные системы в высокоподвижном двумерном электронном газе имеют форму квадрата размером $3 \div 5$ мкм, который заполнен короткопериодной (120 нм) слабо разупорядоченной треугольной решеткой антиточек при амплитуде модуляции электростатического потенциала, сравнимой с энергией Ферми. Обнаружено, что при концентрациях носителей в решетке ниже точки Дирака $n < n_{1D}$ в холловском сопротивлении $R_{xy}(B)$ в диапазоне магнитных полей $B = 10 \div 50$ мТл возникает плато дырочного типа $R_{xy} = -R_0$, а при $n > n_{1D}$ плато электронного типа $R_{xy} = R_0$, где $R_0 = h/2e^2 = 12.9$ кОм. С усилением беспорядка плато разрушаются, но тип носителей (электроны или дырки) сохраняется. При низких магнитных полях длинноволновой беспорядок подавляет плато квантованных сопротивлений гораздо эффективнее, чем коротковолновый.

DOI: 10.31857/S1234567823030084, EDN: oxgchz

В последние годы достигнут значительный прогресс в формировании полупроводниковых решеток с периодом 70–130 нм в высокоподвижном двумерном электронном газе (ДЭГ). Были минимизированы ошибки технологии, которые могут разрушать энергетический спектр решеток. Особое внимание уделяется разработке и тестированию устройств с треугольной решеткой антиточек [1], которые позволяют создавать и изучать полупроводниковый искусственный графен. В таких устройствах с нелегированной гетероструктурой GaAs/AlGaAs предусмотрено два затвора, разделенных диэлектриком [2]. Нижний затвор пронизан решеткой отверстий, он лежит на полупроводнике и вытягивает электроны из боковых контактов в рабочий слой GaAs. Верхний затвор, отделенный от нижнего тонким слоем диэлектрика, входит в область отверстий и создает в ДЭГ под отверстиями области обеднения – барьеры конечной высоты (антиточки). В результате в плоскости ДЭГ возникает плавный синусоподобный потенциал с гексагональной симметрией. Различия в диаметрах, в форме, в положении отверстий нижнего затвора и цилиндров верхнего затвора, входящих в отверстия,

вносят длинноволновый беспорядок в потенциал решетки [2]. Размер типичных флуктуаций такого беспорядка охватывает несколько периодов решетки.

В работе [3] для ряда атомарных решеток, включая гексагональную и квадратную, методом сильной связи было предсказано поведение холловской проводимости $\sigma_{xy}(E)$ для энергий в щелях минизон Ландау. Рассматривался случай бесконечной периодической решетки в перпендикулярном магнитном поле, отношение магнитного потока через элементарную ячейку ϕ к кванту потока $\phi_0 = h/e$ выбиралось равным рациональной дроби $\phi/\phi_0 = p/q$. Аномальное поведение холловской проводимости в гексагональной решетке вблизи точки Дирака $\sigma_{xy} = \pm(2N + 1)2e^2/h$, где $N = 0, 1, 2, \dots$ (здесь учтено вырождение по спину) было предсказано в еще работе [4] до экспериментального наблюдения аномального квантового эффекта Холла (АКЭХ) в графене. Авторы работы [3] показали, что АКЭХ существует вплоть до некоторых энергий для целого класса решеток. Эти энергии связаны с сингулярностями Ван Хофа и расположены по обе стороны от точки Дирака. Было так же выяснено, что при переходе через сингулярности Ван Хофа проводимость претерпевает гигантский скачок, при этом знак проводимости

¹⁾e-mail: otkach@isp.nsc.ru

меняется. Таким образом, в работе [3] было показано, что холловская проводимость, ниже первой точки Ван Хова, положительная, а выше второй точки Ван Хова – отрицательная и меняется в этих областях по энергии с шагом $2e^2/h$ в соответствии с обычным квантовым эффектом Холла (КЭХ). Пример, демонстрирующий зависимость $\sigma_{xy}(E)$, был дан для “низкого” магнитного потока $\phi = \phi_0/31$, для графена соответствующая напряженность магнитного поля равна $B = 2538$ Тл. Для искусственного графена с периодом 120 нм магнитное поле, отвечающее потоку $\phi/\phi_0 = 1/31$, очень мало $B = 0.011$ Тл (магнитные поля отличаются в квадрат отношения постоянных решетки). Результаты работы [3] не могут быть буквально перенесены на искусственный полупроводниковый графен, поскольку это совершенно другая электронная система с плавным эффективным потенциалом и существенным беспорядком.

Ранее мы моделировали треугольную решетку антиточек конечных размеров (период 100 нм, беспорядок отсутствовал) и обнаружили, что АКЭХ возникает в окрестности точек Дирака в перпендикулярном магнитном поле несколько миллитесла [5], причем ниже точки Дирака ток переносится дырками, а выше точки Дирака – электронами. Этот результат в основном сохраняется при коротковолновом беспорядке, который позволяет подавить интерференционные осцилляции, связанные с размером образца [6]. Оставалось неясным, будет ли длинноволновой беспорядок разрушать квантование холловского сопротивления R_{xy} и может ли сохраняться дырочный и электронный тип проводимости вблизи точек Дирака при подавленных значениях $R_{xy} \ll R_0 = h/2e^2 = 12.9$ кОм.

В настоящей работе мы сопоставляем влияние коротко- и длинноволнового беспорядка на квантовый транспорт через гексагональную решетку. Мы вычисляем холловские сопротивления R_{xy} для устройства в четырехтерминальной схеме измерений при фиксированной модуляции периодического потенциала и заданном уровне беспорядка. Мы показываем, что коротковолновый беспорядок разумных амплитуд не приводит к разрушению КЭХ, в то время как длинноволновой может существенно уменьшать значения холловского сопротивления, не изменяя его знака.

В расчетах мы используем задание потенциала по аналитической формуле [7]: $U(\mathbf{r}) = V_0 \sum \cos(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{r})$, где V_0 определяет амплитуду модуляции потенциала. Векторы обратной решетки определяются как

$$\mathbf{g}_1 = g_0(1, 1/\sqrt{3}),$$

$$\mathbf{g}_2 = g_0(0, 2/\sqrt{3}),$$

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2 = g_0(1, -1/\sqrt{3}).$$

Здесь $g_0 = 2\pi/L$, а L – период решетки. Зонные спектры идеальной гексагональной решетки для разных значений V_0 обсуждались в работе [2]. Было показано, что спектр зависит только от безразмерной амплитуды модуляции потенциала $w_0 = 0.5V_0/E_0$, где характерная энергия $E_0 = \frac{8\pi^2}{9} \frac{\hbar^2}{m^*L^2}$. Для эффективной массы в GaAs $m^* = 0.067m_e$ и периода решетки $L = 120$ нм получаем $E_0 = 0.693$ мэВ.

На рисунке 1 показаны нижние минизоны, рассчитанные для решетки с модуляцией $w_0 = 0.25$, пол-

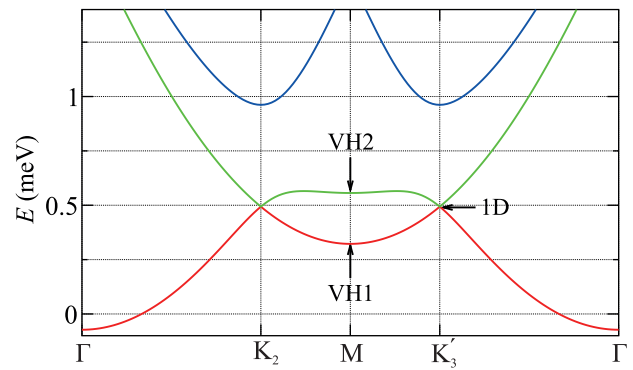


Рис. 1. (Цветной онлайн) Нижние минизоны для идеальной решетки с периодом $L = 120$ нм и модуляцией $w_0 = 0.25$. Стрелки VH1 и VH2 указывают на положения по энергии первой и второй сингулярностей Ван Хова, стрелка 1D – на первую точку Дирака

ная амплитуда периодического потенциала от минимального до максимального значения равна $9w_0E_0 \approx 1.56$ мэВ. Это довольно низкая модуляция, при которой третья минizona перекрывается со второй. Тем не менее, минизонные особенности уже четко проявляются в холловском сопротивлении. Две нижние минизоны пересекаются в точке Дирака с энергией $E_{1D} = 0.49$ мэВ. Первая и вторая сингулярности Ван Хова отвечают энергиям $E_{VH1} = 0.32$ мэВ, $E_{VH2} = 0.57$ мэВ – это точки, в которых меняется кривизна закона дисперсии. Концентрация частиц в первой точке Дирака отвечает заполнению первой минизоны двумя электронами: $n_{1D} = 2/(\sqrt{3}L^2/2) = 1.6 \cdot 10^{10}$ см $^{-2}$. С ростом модуляции третья зона поднимается и при $w_0 \geq 0.75$ между второй и третьей зонами возникает щель запрещенных энергий.

Беспорядок в расчетах задавался функцией $V_d(\mathbf{r})$, которая прибавляется к периодическому потенциалу $U(\mathbf{r})$. Это позволяет независимо менять амплитуду модуляции и беспорядка. Поскольку потенциал численно определялся на дискретной квадратной сетке

с шагом $h_x = h_y = 8$ нм, проще всего было ввести беспорядок как случайную добавку в каждом сайте (i, j) вычислительной сетки. Реализация беспорядка V_d определялась последовательностью случайных чисел $\delta_{i,j}$ в диапазоне от -0.5 до 0.5 : $V_d(\mathbf{r}_{i,j}) = \delta_{i,j} \cdot V_r$, где коэффициент V_r задавал амплитуду беспорядка. Такой беспорядок (коротковолновый или локальный) вызывает рассеяние даже в сравнительно сильных магнитных полях 1–2 Тл, при которых магнитная длина остается больше шага сетки. Другой тип беспорядка ближе к реальному. Способ его задания вытекает из нашего опыта расчетов трехмерной электростатики структур с треугольной решеткой [2]. Из этих расчетов следует, что при учете разброса диаметров отверстий в нижнем затворе самые сильные отклонения потенциала от идеальной формы возникают в области антиточек, в то время как между антиточками в каналах, заполненных электронами, потенциал меняется гораздо слабее за счет самоэкранировки. Поэтому разумно задать беспорядок этого типа в виде суммы гауссовых функций случайной амплитуды $V_r \cdot \sum_i \delta_i \exp(-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2/\sigma^2)$, центрированных в вершинах \mathbf{r}_i треугольников гексагональной решетки. Для масштабирования беспорядка вводится общий множитель V_r перед суммой, δ_i – случайные числа в диапазоне от -0.5 до 0.5 . Полуширина колокола $\sigma = 45$ нм выбрана близкой к расстоянию от затвора до плоскости с ДЭГ в моделируемой структуре. На рисунке 2 показаны фрагменты (квадратик размером 1 мкм) карты потенциала решетки с модуляцией $w_0 = 0.25$ для двух типов беспорядка с одинаковой амплитудой $V_r = 2$ мэВ, где желто-красным цветом изображены горбы потенциала (антиточки), а синим каналы между ними. Видно, что при задании беспорядка гауссовыми функциями в потенциале возникают “хребты” и “ущелья”, которые охватывают группу периодов, в то время как при сайтовом беспорядке потенциал на соседних периодах в среднем не меняется.

Задача рассеяния электронов в модельном квадратном образце решается в рамках пакета KWANT [8], предназначенного для расчетов многотерминального квантового транспорта. Четырехтерминальные сопротивления восстанавливаются по формулам Бютиккера – по вычисляемым в системе коэффициентам прохождения между контактами [9]. В моделировании подводящие каналы подходят горизонтально сверху и снизу к боковым сторонам квадрата, на котором задана решетка. Они отмечены серыми вертикальными полосками на правой и левой сторонах образца (рис. 3 и 4). В обсуждаемых расчетах ширины всех четырех каналов были

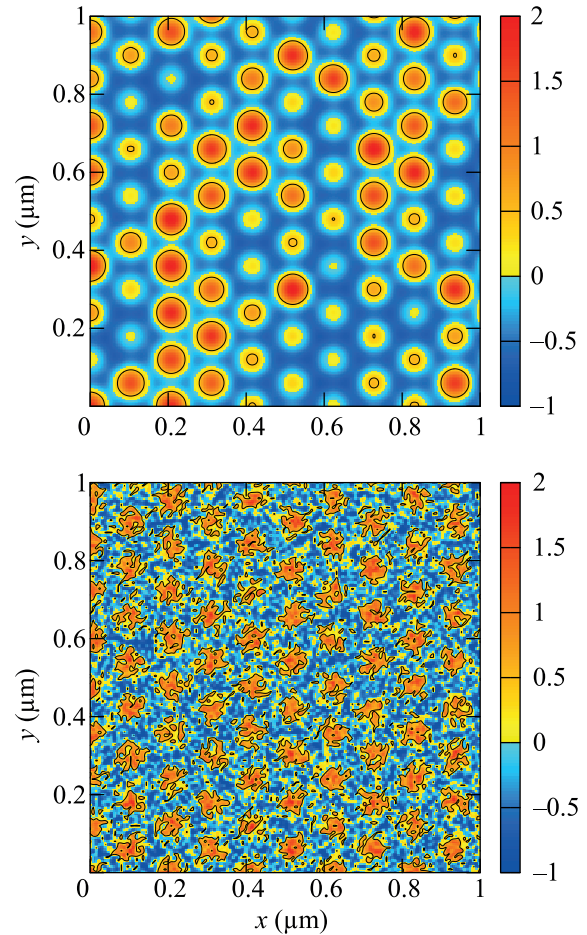


Рис. 2. (Цветной онлайн) Карты двумерного потенциала решетки с периодом $L = 120$ нм и модуляцией $w_0 = 0.25$ при длинноволновом (верхняя карта) и локальном (нижняя карта) с амплитудой $V_r = 2$ мэВ. Цветная шкала потенциала в миллиэлектронвольтах. Изолиния (черные колечки на верхней карте) соответствует энергии первой точки Дирака

одинаковые и равны 560 нм. Потенциал в каналах был постоянным и равным минимуму потенциала решетки в отсутствие беспорядка. На рисунках 3 и 4 показано распределение плотности потока частиц с заданной энергией E , которые инжектируются в решетку через нижний левый канал, рассеиваются на решетке и выходят через два верхних канала и нижний справа. При нулевой температуре энергия E имеет смысл уровня Ферми. В решетке возможны два типа носителей заряда: электроны и дырки, в магнитном поле их траектории разделяются. На рисунке 3 частицы с энергией $E = 0.5$ мэВ в магнитном поле $B = 30$ мТл прижимаются силой Лоренца к нижнему краю решетки (тип проводимости электронный). Достаточно сильный локальный беспорядок $V_r = 3$ мэВ не разрушает краевое состо-

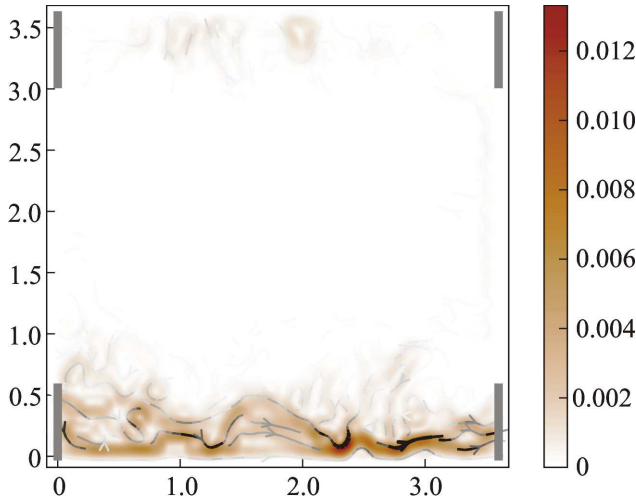


Рис. 3. (Цветной онлайн) Распределение плотности тока $J(x, y)$ для решетки размером 3.6 мкм при $w_0 = 0.25$, $E = 0.5$ мэВ, $B = 0.03$ Тл и локальном беспорядке $V_r = 3$ мэВ. Серые вертикальные полосы отмечают места подсоединения четырех горизонтальных каналов. Частицы входят в образец через левый нижний канал, рассеиваются на решетке и могут выйти через левый верхний, правый верхний и правый нижний каналы.

ание, что означает, что холловское сопротивление имеет квантованное значение. На рисунке 4 показан ток для энергии $E = 0.8$ мэВ в магнитном поле $B = 30$ мТл. В отсутствие беспорядка (график сверху) видно, что тип носителей дырочный. Поток частиц идет вверх вдоль левой стенки, обходя центр решетки по часовой стрелке. Длинноволновой беспорядок (график снизу) разрушает краевое состояние и перемешивает частицы по всей решетке, при этом сопротивление отрицательное и мало по величине (дырочный тип проводимости доминирует).

Вычисления DoS и сопротивления Холла R_{xy} выполнялись по следующей схеме. Для заданной w_0 при нулевом беспорядке и $B = 0$ по энергетической зависимости плотности состояний определялось положение точки Дирака (провал между линейным склоном и подъемом DoS(E)) и положение сингулярностей Ван Хофа (точки максимумов DoS(E)). Затем при энергиях ниже и выше точки Дирака проводились магнитопольные расчеты сопротивлений и DoS(B) при разных уровнях и типах беспорядка. Заметим, что все зависимости по энергии или магнитному полю сглаживались из-за присутствия сильных интерференционных осцилляций. Усреднение соответствовало эффективной температуре 0.05 К. Модельные системы имели форму квадрата размером $3.6 \div 4.8$ мкм ($30 \div 40$ периодов решетки).

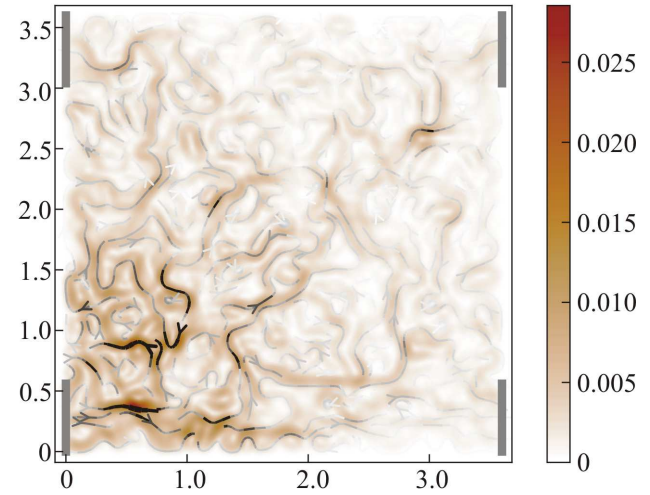
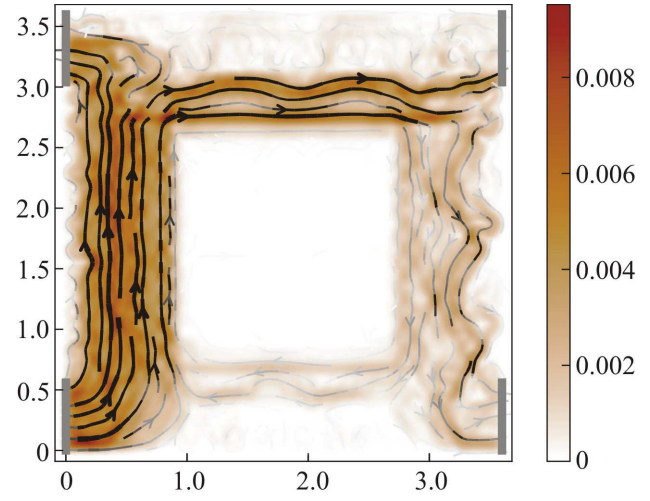


Рис. 4. (Цветной онлайн) Плотность потока $J(x, y)$ для решетки размером 3.6 мкм при $w_0 = 0.25$, $E = 0.8$ мэВ, $B = 0.03$ Тл в отсутствие беспорядка $V_r = 0$ (сверху) и при длинноволновом беспорядке $V_r = 2$ мэВ (график снизу). Размеры по осям указаны в микронах

В эксперименте модуляция периодического потенциала решетки, создаваемой электростатически, может сильно уменьшаться при постепенном заселении электронами нижних минизон из-за самоэкранировки. Однако при разных модуляциях $w_0 = 0.25-2$ поведение холловского сопротивления в окрестности первой точки Дирака однотипно из-за похожего закона дисперсии двух нижних подзон [2]. Различия в поведении R_{xy} проявляются при более высоких концентрациях $n > 2n_{1D}$ и более высоких магнитных полях [6]. Ниже все расчеты относятся к решетке с $w_0 = 0.25$.

Рисунок 5 показывает энергетические зависимости холловского сопротивления $R_{xy}(E)$ и плотности состояний DoS(E) для $w_0 = 0.25$ и разных

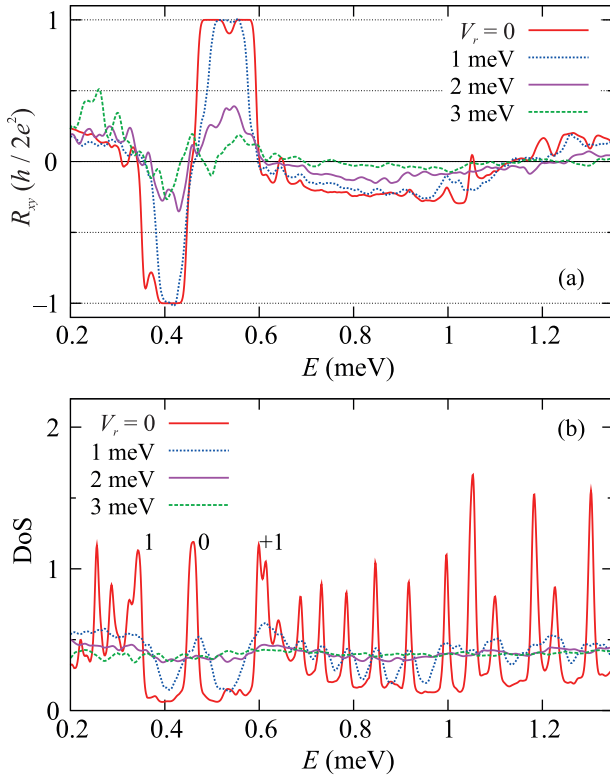


Рис. 5. (Цветной онлайн) Холловское сопротивление R_{xy} (a) и плотность состояний DoS (b) в зависимости от энергии для $w_0 = 0.25$, $B = 25$ мТл. Беспорядок длинноволновой. Числа 0, +1, -1 на графике (b) отмечают пики нулевого и плюс/минус первого уровней Ландау–Дирака. Положение точки Дирака совпадает с пиком $N = 0$, а сингулярности Ван Хова при $B = 25$ мТл сливаются с пиками $N = \pm 1$

амплитудах V_r длинноволнового беспорядка в магнитном поле $B = 25$ мТл. В отсутствие беспорядка можно видеть квантованные плато сопротивления $R_{xy} = \pm R_0$, разделяющие нулевой уровень Ландау–Дирака и уровни Ландау–Дирака с $N = 0, \pm 1$: $E_0 = 0.46$ мэВ, $E_{-1} = 0.34$ мэВ, $E_{+1} = 0.6$ мэВ. Беспорядок и магнитное поле немного сдвигают точку Дирака и сингулярности Ван Хова по энергии по сравнению со значениями, полученными из закона дисперсии на рис. 1. При низких магнитных полях можно считать, что энергии E_{1D} , E_{VH1} , E_{VH2} совпадают с точками изменения знака холловского сопротивления [3]. В интервале от $E = 0.6$ мэВ примерно до $E = 1.2$ мэВ холловское сопротивление снова становится отрицательным, хотя значения сопротивления тут гораздо меньше, чем в окрестности точки Дирака. При $V_r > 1$ мэВ плато $R_{xy} = \pm R_0$ разрушаются. При $V_r = 2$ мэВ величина сопротивления в окрестности точки Дирака сильно подавляется по сравнению с R_0 . Там, где было отрицательное плато

$R_{xy} = -R_0$ в отсутствие беспорядка, сопротивление уменьшилось в разы, но тип проводимости остался дырочным. Электронное плато $R_{xy} = R_0$ выше точки Дирака по энергии превратилось в горб с максимальным значением примерно $R_0/3$. При $V_r = 3$ мэВ возникают дополнительные осцилляции $R_{xy}(E)$ и точка Дирака размывается. При $V_r > 3$ мэВ значения сопротивления становятся маленькими и в основном положительными. Таким образом, при $V_r \leq 2$ мэВ есть две области отрицательных холловских сопротивлений: $E_{VH1} < E < E_{1D}$ и $E_{VH2} < E < 1.2$ мэВ. В плотности состояний DoS(E) при $V_r = 0$ уровни Ландау видны в виде пиков, причем три пика, отвечающие уровням Ландау–Дирака с $N = 0, \pm 1$ шире, чем обычные уровни Ландау, поскольку их вырождение в два раза больше (рис. 5b). Это связано с тем, что вблизи точки Дирака поверхность Ферми является двусвязной (распадается на две долины). Магнитный поток через площадь элементарной ячейки решетки при $B = 25$ мТл равен $\phi = 0.075\phi_0$. Соответствующая напряженность магнитного поля в естественном графене относится к недостижимо высоким значениям $B = 5925$ Тл. При $\phi \approx 0.1\phi_0$ уровни Ландау–Дирака с $N = \pm 1$ наползают на сингулярности Ван Хова, что согласуется с моделированием естественного графена, см. рис. 5с в работе [3]. Таким образом, поле $B = 25$ мТл относится к режиму сильных магнитных полей, в котором уровни Ландау–Дирака с более высокими N отсутствуют. При значительном беспорядке области с дырочной и электронной проводимостью перекрываются по энергии, поэтому пики DoS(E) быстро размываются и практически уже не видны при $V_r = 2$ мэВ. Пики DoS(E) ниже и выше сингулярностей Ван Хова можно интерпретировать как уровни Ландау, отстроенные от дна первой минизоны (электронная проводимость) и от макушки второй минизоны (дырочная проводимость).

На рисунке 6 показано влияние длинноволнового беспорядка на магнитополевою зависимость $R_{xy}(B)$ при $w_0 = 0.25$ и $E = 0.4$ мэВ. Видно, что это влияние очень сильное. Отрицательный наклон R_{xy} в нуле $B = 0$ свидетельствует о дырочном типе проводимости. При магнитном поле больше $B = 50 \div 55$ мТл сопротивление становится выше нуля и далее, осциллируя, поднимается до $R_{xy} = R_0$. Между плато квантованных значений $R = R_0, R_0/2, R_0/3, R_0/4$ есть глубокие провалы, которые замываются беспорядком.

На рисунке 7 показано влияние размера решетки и типа беспорядка на зависимость $R_{xy}(B)$. Если при коротковолновом беспорядке все плато прописаны очень четко, то при длинноволновом беспорядке пла-

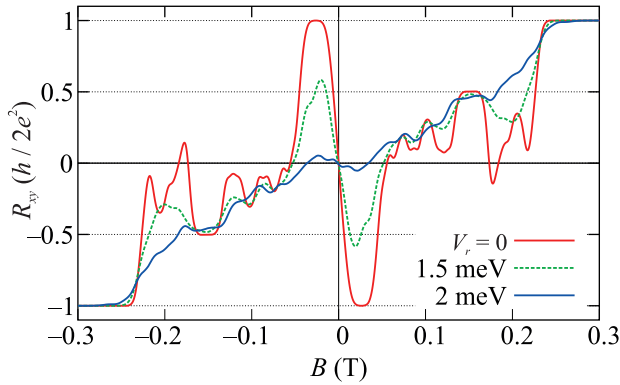


Рис. 6. (Цветной онлайн) Холловское сопротивление $R_{xy}(B)$ при разных амплитудах беспорядка для $w_0 = 0.25$, $E = 0.4$ мэВ (ниже E_{1D}). Беспорядок длинноволновой

то при $B < 0.05$ Тл разрушено, но тип носителей сохраняется: там, где было плато $R_{xy}(B) = -R_0$, знак сопротивления остается отрицательным. Что касается влияния разных реализаций беспорядка, то качественно поведение кривых сопротивления для одного типа беспорядка похожее.

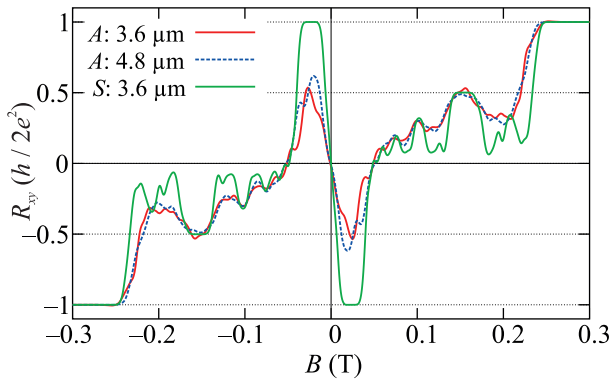


Рис. 7. (Цветной онлайн) Влияние разных реализаций беспорядка и типа беспорядка на зависимость $R_{xy}(B)$ при $w_0 = 0.25$, $E = 0.4$ мэВ, $V_r = 1.5$ мэВ для решеток, заданных на квадрате со стороной 3.6 и 4.8 мкм. Кривые с длинноволновым беспорядком отмечены буквой A (беспорядок в антиточках), с коротковолновым (беспорядок в сайтах) – буквой S

Рисунке 8 показывает эволюцию $R_{xy}(B)$ при постепенном изменении энергии электронов. Синим цветом отмечены кривые $R_{xy}(B)$ с положительным наклоном в нуле, а красные – с отрицательным. Видно, что наклон $R_{xy}(B)$ в нуле меняет знак четыре раза: в сингулярностях Ван Хофа, в точке Дирака и при энергии выше $E = 1.3$ мэВ, где минизоны накладываются друг на друга и доминирует электронный тип проводимости. Вторая область дырочной проводимости шире первой: она идет от 0 почти до

$B = 100$ мТл. Заметим, что по наклону $R_{xy}(B)$ в нуле уже нельзя определять концентрацию в образце.

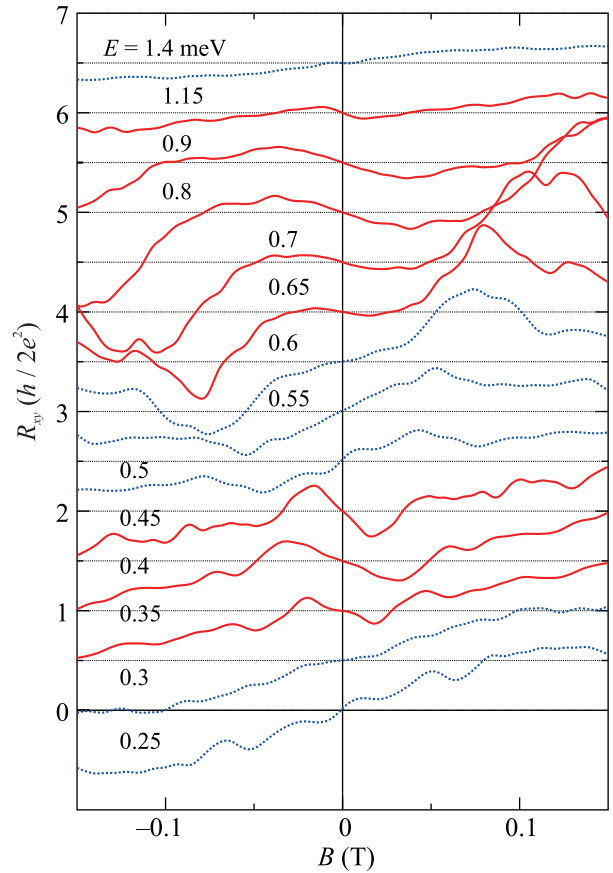


Рис. 8. (Цветной онлайн) Холловское сопротивление для $w_0 = 0.25$ с длинноволновым беспорядком $V_r = 2$ мэВ при фиксированных энергиях, указанных числами. Кривые $R_{xy}(B)$ сдвинуты по вертикали с шагом 0.5

Таким образом, мы показали, что при изменении энергии (концентрации) электронов в решетке или напряженности магнитного поля холловское сопротивление меняет знак. Такое чередование типов носителей связано с минизонным спектром решетки. Выяснено, что в низких магнитных полях коротковолновый беспорядок практически не разрушает краевые состояния решетки, в то время как длинноволновой беспорядок размешивает частицы по всей структуре и подавляет значения холловского сопротивления по сравнению с квантованными значениями в отсутствие беспорядка, сохраняя при этом тип носителей.

Данная работа выполнена с использованием ресурсов Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН и при поддержке Российского научного фонда, грант # 19-72-30023.

Авторы благодарны за стимулирующее обсуждение коллегам, прежде всего, О. Клочану, Д. К. Ванг, З. Е. Криксу, А. Р. Гамильтону из Университета Нового Южного Уэльса, Австралия.

1. D. Q. Wang, D. Reuter, A. D. Wieck, A. R. Hamilton, and O. Klochan, *Appl. Phys. Lett.* **117**, 032102 (2020).
2. O. A. Tkachenko, V. A. Tkachenko, I. S. Terekhov, and O. P. Sushkov, *2D Mater.* **2**, 014010 (2015).
3. Y. Hatsugai, T. Fukui, and H. Aoki, *Phys. Rev. B* **74**, 205414 (2006).
4. Y. Zheng and T. Ando, *Phys. Rev. B* **65**, 245420 (2002).
5. O. A. Tkachenko and V. A. Tkachenko, *JETP Lett.* **99**, 204 (2014).
6. O. A. Tkachenko, V. A. Tkachenko, D. G. Baksheev, and O. P. Sushkov, *JETP Lett.* **116**, 616 (2022).
7. L. Nádvorník, M. Orlita, N. A. Goncharuk, L. Smrčka, V. Novák, V. Jurka, K. Hruška, Z. Výborný, Z. R. Wasilewski, M. Potemski, and K. Výborný, *New J. Phys.* **14**, 053002 (2012).
8. C. W. Groth, M. Wimmer, A. R. Akhmerov, and X. Waintal, *New J. Phys.* **16**, 063065 (2014).
9. M. Büttiker, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1761 (1986).