Письма в ЖЭТФ, том 117, вып. 6, с. 400 – 405

Нелинейный отклик разреженных газов на ультрафиолетовый фемтосекундный импульс

Н. Р. Врублевская[+], *Д. Е. Шипило*[+*], *И. А. Николаева*[+*], *Н. А. Панов*[+*], *О. Г. Косарева*[+*1)]

[+]*Физический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия*

[*]*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 2 февраля 2023 г.
После переработки 7 февраля 2023 г.
Принята к публикации 7 февраля 2023 г.

Квантовомеханические расчеты нелинейного отклика одномерной квантовой системы, воспроизводящей энергетическую структуру ксенона, на ультрафиолетовый фемтосекундный импульс с интенсивностью 1–100 ТВт/см^2 показали дисперсию коэффициента кубической нелинейности в диапазоне 266–400 нм и его зависимость от интенсивности, исключающую описание отклика связанных электронов в виде $\chi^{(3)}E^3$. Вычисление поляризации на базе одномерной квантовой модели может быть использовано при моделировании распространения ультрафиолетового фемтосекундного излучения в газе.

DOI: 10.31857/S1234567823060022, EDN: qrrkuz

1. Введение. К настоящему времени проведено детальное экспериментальное и теоретическое исследование распространения высокоинтенсивного фемтосекундного лазерного излучения инфракрасного диапазона в газах как при филаментации в объеме газовой среды [1], так и в газонаполненном волокне [2]. Для теоретического описания нелинейного отклика газовых сред на фемтосекундный импульс инфракрасного диапазона применяется *феноменологический* подход [3], основанный на представлении нелинейности в виде суперпозиции тока электронов, освободившихся в актах многофотонной/туннельной ионизации [4], и производной по времени t нелинейной поляризации среды P_{nl}, соответсвующей ангармоничному движению связанных электронов. Поляризация P_{nl}, в основном, определяется мгновенным кубическим по полю E вкладом $P_{nl} = \chi^{(3)}E^3$ [5–8], причем коэффициент нелинейности третьего порядка $n_2 \propto \chi^{(3)}$ определяется экспериментально [9–11]. Для расчетов распространения в молекулярных газах модель дополняют описанием резонансного линейного [11–14] и инерционного кубического [14–18] откликов.

Строго говоря, феноменологический подход к описанию нелинейности не обоснован математически, его применимость обусловлена существенно различным числом фотонов, обеспечивающих отклик связанных электронов ($3\hbar\omega$) и ионизацию среды ($8\hbar\omega$ для молекулы O_2 при центральной длине волны излучения $\lambda = 2\pi c/\omega = 800$ нм, c – скорость света). Для фемтосекундных импульсов с центральной длиной волны в ближнем и среднем инфракрасном диапазоне феноменологический подход воспроизводит экспериментальные результаты. Например, для наиболее часто используемого в экспериментах излучения с центральной длиной волны около 800 нм (лазер на титан-сапфире) оцененная из измерений и моделирования пиковая интенсивность в филаменте в воздухе составляет около 100 ТВт/см^2 [19–22].

В плазменном канале ультрафиолетового филамента возможно усиление радиочастотного и терагерцового излучения благодаря относительно узкому спектру фотоэлектронов [23]. Однако параметры филаментов ультрафиолетового диапазона не столь детально изучены, как для инфракрасного излучения. В частности, неизвестен даже порядок интенсивности импульса на длине волны ~ 250 нм (третья гармоника лазера на титан-сапфире) в филаменте: согласно работе [24] она составляет около 0.1 ТВт/см^2, тогда как согласно [25] – 20 ТВт/см^2. Вызывает сомнения сама возможность применения феноменологического подхода [25–28] для теоретического описания взаимодействия высокоинтенсивного фемтосекундного лазерного излучения ультрафиолетового диапазона с газовыми средами. Действительно, для излучения с длиной волны ~ 250 нм ионизация таких газов как кислород или ксенон становится трехфотонной [29]. Поэтому отклик электронов как связанных в атомах или молекулах, так и освобожденных в актах ионизации [4, 30] становится кубичным по полю.

1)e-mail: kosareva@physics.msu.ru

Косвенное подтверждение ограниченной применимости феноменологического подхода к описанию нелинейности газов в ультрафиолетовом диапазоне представлено в работе [31], в которой построена аппроксимация зависимости коэффициента n_2, полученного на основе квантовых вычислений, от длины волны λ формулой селлмейеровского типа. Сингулярность в аппроксимации $n_2(\lambda)$ достигалась на длине волны, соответствующей трети потенциала ионизации, – т.е. когда нелинейная ионизация становится трехфотонной. Тем самым, для фемтосекундного излучения ультрафиолетового диапазона с частотой вблизи трети потенциала ионизации само определение n_2 может терять физический смысл.

Стоит отметить, что квантовомеханическое описание нелинейного отклика полупроводников и диэлектриков обычно базируется на системе уравнений Максвелла–Блоха, см., например, [32, 33]. В случае разреженного одноатомного газа, однако, отсутствует необходимость учитывать зонную структуру, анизотропию среды, взаимодействие с резервуаром и термализацию плазмы, поэтому можно отказаться от такого формализма в пользу нестационарного уравнения Шредингера [34, 35].

В настоящей работе мы, используя одномерную квантовомеханическую модель [36] взаимодействия света с потенциальной ямой с уровнями энергии, приближенно соответствующими основному и возбужденным состояниям атома ксенона, исследуем нелинейный отклик, наводимый в среде фемтосекундным импульсом. В широком диапазоне интенсивностей импульса от 0.1 до 100 ТВт/см^2 и его центральных длин волн от 266 до 1500 нм из численного решения нестационарного уравнения Шредингера нами получен нелинейный отклик среды, состоящей из таких невзаимодействующих между собой квантовых систем. Установлено, что в инфракрасном диапазоне найденная нами нелинейная поляризация соответствует отклику, определенному из феноменологического подхода. Для ультрафиолетовых фемтосекундных импульсов это согласие нарушается: уже при низкой интенсивности 2 ТВт/см^2 нелинейный отклик не может быть аппроксимирован кубом поля, а с ростом интенсивности до 25 ТВт/см^2 рассчитанные квантовомеханически и феноменологически зависимости нелинейной поляризации от времени осциллируют со сдвигом фазы в четверть оптического периода и имеют различный частотный состав.

2. Одномерная квантовомеханическая модель взаимодействия фемтосекундного импульса с веществом. Пусть $U(x)$ – одномерная потенциальная яма. Для определения связанных состояний потенциала $U(x)$ мы использовали итерационный алгоритм, подробно описанный в Приложении. Вариацией параметров мы построили такой потенциал (здесь и далее в формулах использованы атомные единицы)

$$U(x) = -\frac{0.5625}{\sqrt{x^2+0.63^2}} \exp\left[-\left(\frac{x}{8}\right)^{16}\right], \qquad (1)$$

что его связанные состояния $|\Psi_j\rangle$, $j = 0, 1, 2$ с энергиями $W_0 = -12.08$ эВ, $W_1 = -2.93$ эВ и $W_2 = -1.17$ эВ воспроизводят энергетическую структуру атома ксенона (см. рис. 1).

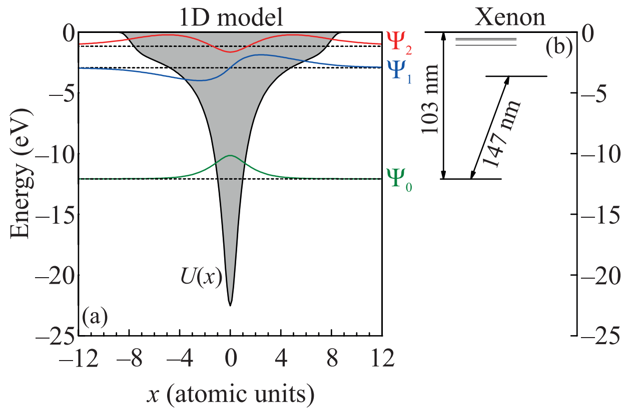

Рис. 1. (Цветной онлайн) (a) – Потенциал $U(x)$ (черная кривая) и волновые функции связанных состояний $\Psi_j(x)$ (цветные кривые). (b) – Атомные уровни ксенона

Для описания взаимодействия света с веществом использовалось нестационарное уравнение Шредингера для волновой функции $\Psi(x,t)$ с начальными условиями $\Psi(x, t \to -\infty) = |\Psi_0\rangle$:

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(x)\Psi - E(t)x\Psi, \qquad (2)$$

где $E(t) = \sqrt{I_0}\exp(-t^2/[2\tau_0^2])\sin\omega_0 t$ – электрическое поле лазерного импульса длительностью $2\tau_0 = 10$ фс. Интенсивность излучения I_0 варьировалась от 0.1 до 100 ТВт/см^2 (от 3×10^{-6} до 3×10^{-3} атомной интенсивности), частота ω_0 соответствовала длинам волн от 1500 до 266 нм, т.е. от низкочастотного туннельного предела до трехфотонной ионизации.

Расчеты проводились на видеокарте NVIDIA GeForce RTX 3080 с использованием технологии CUDA. Общий размер временной области составлял $20\,\tau_0 = 100$ фс, пространственной области – 8192 ат. ед. Количество узлов временной и пространственной сеток $N = 2^{16}$ обеспечивало разрешение по времени $\Delta t = 1.5$ ас и по пространству $\Delta x = 0.125$ ат. ед. Характерное время расчета составляло около 5 мин.

Полученная при численном интегрировании уравнения (2) вероятность ионизации $\eta = 1 - \sum_j |\langle\Psi_j\Psi\rangle|^2$ находится в согласии с результатами расчета по формуле Переломова–Попова–Терентьева. Для центральных длин волн 266, 800 и 1500 нм зависимости вероятности перехода системы из связанного состояния в свободное от интенсивности приведены на рис. 2. Полученные из квантовомеханических расчетов зависимости $\eta(I_0)$ соответствуют многофотонному пределу для ультрафиолетовых импульсов и туннельному – для импульсов ближнего и среднего инфракрасного диапазона.

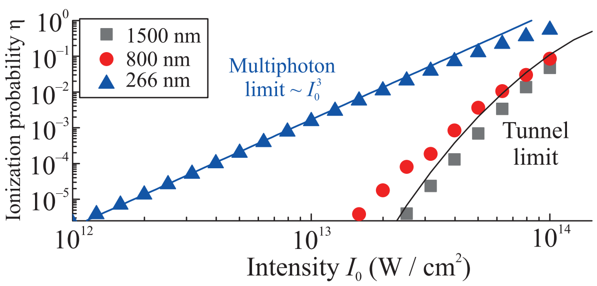

Рис. 2. (Цветной онлайн) Вероятности ионизации в широком диапазоне значений пиковой интенсивности импульса длительностью 10 фс (символы) и ее аппроксимация в многофотонном и туннельном пределах (кривые)

3. Нелинейный отклик одномерной квантовой системы. Поскольку мы рассматриваем разреженные газовые среды, макроскопическая поляризация P равна произведению дипольного момента атома газа и концентрации частиц. Произведем нормировку макроскопической поляризации на концентрацию частиц. Нормированная поляризация будет равна дипольному моменту нашей квантовой системы:

$$P(t) = -\langle\Psi|\hat{x}|\Psi\rangle. \tag{3}$$

Поляризация $P(t)$ содержит как линейный по полю, так и нелинейный вклады связанных электронов, а также вклад электронов континуума и интерференционные члены, разделить которые в общем случае невозможно. Определим эффективный коэффициент кубической нелинейности $n_2 \propto \chi^{(3)}$ из наилучшей аппроксимации поляризации (3) зависимостью

$$P(t) = \chi^{(1)}(t) \otimes E(t) + \chi^{(3)}E^3(t), \tag{4}$$

где знаком $\otimes$ обозначена свертка. Используя для аппроксимации расчеты при нескольких значениях пиковой интенсивности I_0, можно выделить нелинейную часть поляризации. При этом дисперсия линейного отклика газовой среды учитывается для всего диапазона пиковой интенсивности.

По найденным из аппроксимации (4) значениям $\chi^{(3)}$ на рис. 3 построены зависимости эффективного коэффициента кубической нелинейности n_2 как функции интенсивности для трех длин волн $\lambda = 1500$, 800 и 266 нм. Эти значения примерно на порядок меньше известных из экспериментов [9–11] значений коэффициента керровской нелинейности газов в инфракрасном диапазоне $n_2 \sim 10^{-19}$ см^2/Вт. Для импульсов с $\lambda = 1500$, 800 нм эффективный коэффициент n_2 постоянен вплоть до интенсивностей 30–40 ТВт/см^2, после чего становится отрицательным из-за существенной доли ионизованных атомов ($\eta \gtrsim 10^{-3}$, см. рис. 2). В случае $\lambda = 266$ нм рост ионизации с интенсивностью происходит "постепенно", и уже на интенсивностях более 5 ТВт/см^2 нельзя считать n_2 постоянным.

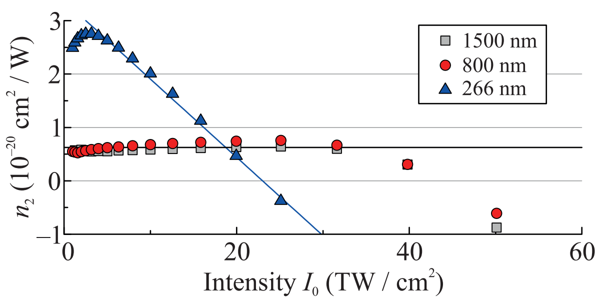

Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимости эффективного коэффициента кубической нелинейности от интенсивности для различных длин волн. Для инфракрасных импульсов зависимость можно считать постоянной, для ультрафиолетового – линейно убывающей (линии)

Для демонстрации дисперсии кубической нелинейности на рис. 4 построена зависимость эффективного коэффициента n_2 от центральной частоты лазерного импульса. В согласии с данными моделирования [31] она может быть аппроксимирована формулой селлмейеровского типа [26], если в качестве резонансных частот взять 1/3 от резонансных частот линейной дисперсии, которые соответствуют переходам из основного состояния в первое возбужденное и в континуум:

$$n_2(\omega_0) = \frac{A}{\Omega_A^2 - \omega_0^2} + \frac{B}{\Omega_B^2 - \omega_0^2}, \tag{5}$$

где $\Omega_A = |W_0|/3 = 4.03$ эВ, $\Omega_B = |W_0 - W_1|/3 = 3.05$ эВ. На частотах выше 600–700 ТГц (длинах волн меньше 430–500 нм) значения n_2 существенно меняются с изменением частоты в пределах спектральной ширины фемтосекундного импульса и ста-

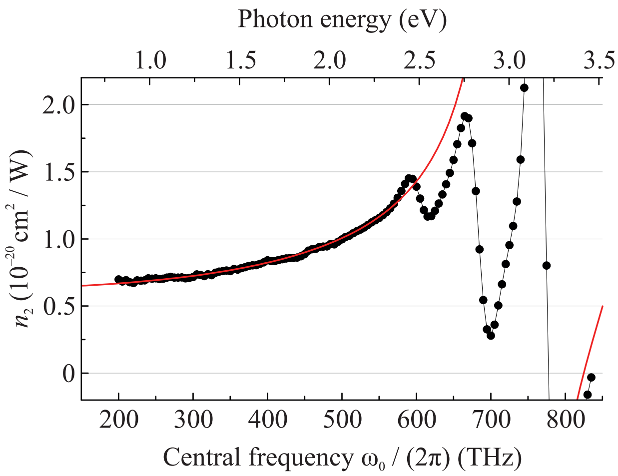

Рис. 4. (Цветной онлайн) Зависимость эффективного коэффициента кубической нелинейности n_2, оцененного согласно аппроксимации (4) из квантовомеханических расчетов (2), от центральной частоты фемтосекундного импульса с пиковой интенсивностью 10 ТВт/см^2 (черные точки) и ее аппроксимация формулой селлмейеровского типа (5) (красная линия)

новятся отрицательными. Аппроксимация (4) перестает быть физически осмысленной, поскольку нелинейный отклик третьего порядка является запаздывающим и/или зависит от интенсивности излучения.

Для инфракрасных импульсов (1500 нм, рис. 5) нелинейную поляризацию квантовой системы можно с хорошей точностью воспроизвести в феноменологической модели, подобрав коэффициент кубической нелинейности и предэкспоненциальный фактор в скорости ионизации. Высокочастотные осцилляции поляризации на заднем фронте импульса соответствуют рекомбинационной генерации гармоник [37, 38]. Для ультрафиолетового импульса (266 нм, рис. 6) можно добиться совпадения амплитуд $P(t)$, рассчитанных двумя способами, но при этом у них существенно отличается фаза, внутрипериодная динамика и частотный спектр (ср. рис. 7a и b). Даже при низкой интенсивности 2 ТВт/см^2 (рис. 6a), когда доля ионизованных атомов $\eta \sim 10^{-5}$, в квантовой системе поляризация не пропорциональна кубу электрического поля и запаздывает относительно него. С ростом интенсивности до 25 ТВт/см^2 запаздывание нелинейного отклика, найденного при численном решении уравнения Шредингера, относительно отклика, расчитанного в рамках феноменологического подхода, увеличивается, достигая четверти оптического периода (рис. 6b, c).

4. Заключение. На основе разработанной одномерной квантовомеханической модели взаимодействия лазерного излучения с веществом исследован

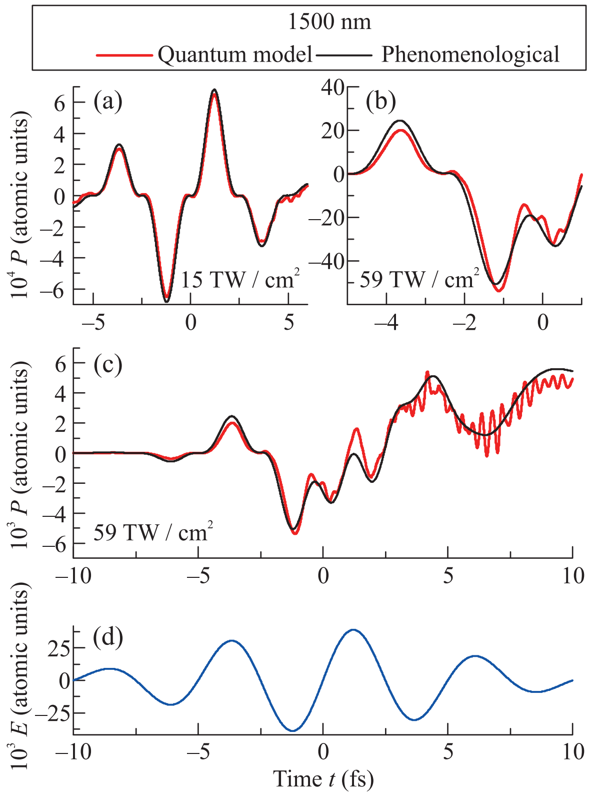

Рис. 5. (Цветной онлайн) Нелинейная поляризация атомной системы, полученная в квантовомеханическом расчете (красные линии) и на основе феноменологической модели (черные линии) при воздействии импульса на длине волны 1500 нм с интенсивностью: (a) – 15 и (b), (c) – 59 ТВт/см^2. (d) – Поле лазерного импульса

нелинейный отклик атома на фемтосекундное излучение с центральными длинами волн от 266 до 1500 нм. В ультрафиолетовой части спектра эффективный коэффициент кубической нелинейности демонстрирует дисперсию и сильную зависимость от интенсивности, т.е. $\chi^{(3)}$ не может считаться константой. Даже при интенсивности ~1 ТВт/см^2 нелинейный отклик на ультрафиолетовый импульс не является кубическим по полю. С ростом интенсивности до ~20 ТВт/см^2 отклонение результатов квантовомеханического расчета нелинейной поляризации от результатов расчета в рамках феноменологического подхода увеличивается.

Тем самым, квантовомеханические расчеты нелинейного отклика атомной системы на ультрафиолетовый фемтосекундный импульс являются, повидимому, необходимыми для моделирования распространения такого излучения в газовой среде, поскольку феноменологические модели выходят из области применимости, когда отклик связанных электронов и ионизация становятся механизмами одного

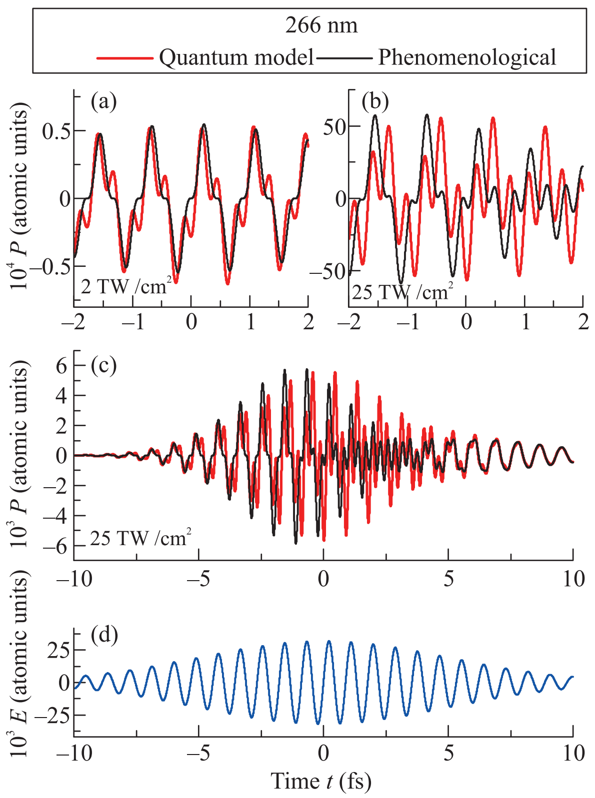

Рис. 6. (Цветной онлайн) То же, что на рис. 5, для импульсов на длине волны 266 нм с интенсивностью: (a) – 2 и (b), (c) – 25 ТВт/см^2

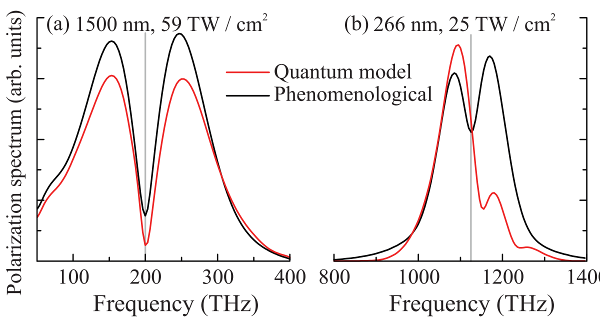

Рис. 7. (Цветной онлайн) Спектры нелинейной поляризации для: (a) – инфракрасного и (b) – ультрафиолетового импульсов. Спектры получены из зависимостей, построенных на рис. 5c и 6c, соответственно. Серые вертикальные линии указывают центральные частоты импульсов

порядка фотонности. Время выполнения квантовых расчетов на базе одномерной модели допускает использование такого подхода при моделировании распространения ультрафиолетового фемтосекундного излучения в газе.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (21-49-00023). Работа Д. Е. Шипило поддержана стипендией Президента РФ молодым ученым и аспирантам (СП-3450.2022.2). Работа И. А. Николаевой и Н. Р. Врублевской поддержана стипендиями Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС" (21-2-10-55-1 и 22-2-1-41-1).

Приложение: итерационный алгоритм определения связанных состояний потенциальной ямы. Для опеределения уровней энергии заданного потенциала $U(x)$ и волновых функций $|\Psi_j\rangle$ к произвольно выбранному начальному приближению $|\Psi_0\rangle^{(0)}$ многократно применялся оператор $(1-\alpha\hat{H})$:

$$|\Psi_0{}^{(k+1)}\rangle = \hat{N}(1-\alpha\hat{H})|\Psi_0{}^{(k)}\rangle, \tag{6}$$

где $\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U$ – гамильтониан, $\hat{N}|\varphi\rangle = |\varphi\rangle/\sqrt{\langle\varphi|\varphi\rangle}$ – нормировка волновой функции, а параметр $\alpha \ll 1$ подбирался таким образом, чтобы самые высокие состояния континуума на заданной сетке затухали. Поскольку самое высокое состояние континуума соответствует частоте Найквиста, достаточно потребовать $\alpha < (2\Delta x/\pi)^2$, где Δx – шаг сетки. Стоит отметить, что требовалось достаточно большое количество итераций, до 100 000, чтобы полученная таким образом функция основного состояния $|\Psi_0\rangle$ была ортогональна остальным волновым функциям и не приводила к артефактам в численном решении нестационарного уравнения (2). Высшие связанные состояния $|\Psi_1\rangle$ и $|\Psi_2\rangle$ находились аналогично, с той разницей, что в итерационный алгоритм было добавлено условие ортогональности найденным ранее состояниям:

$$|\Psi_1{}^{(k+1)}\rangle = \hat{N}\Big(1-|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|\Big)\Big(1-\alpha\hat{H}\Big)|\Psi_1\rangle^{(k)}, \tag{7}$$

$$|\Psi_2{}^{(k+1)}\rangle = \hat{N}\left(1-\sum_{j=0}^{1}|\Psi_j\rangle\langle\Psi_j|\right)\Big(1-\alpha\hat{H}\Big)|\Psi_2\rangle^{(k)}. \tag{8}$$

1. V. P. Kandidov, S. A. Shlenov, and O. G. Kosareva, Quantum Electron. **39**(3), 205 (2009).
2. А. М. Желтиков, *Оптика микроструктурированных волокон*, М. (2004).
3. A. Couairon, E. Brambilla, T. Corti, D. Majus, O. de J. Ramírez-Góngora, and M. Kolesik, Eur. Phys. J. Spec. Top. **199**(1), 5 (2011).
4. F. Brunel, J. Opt. Soc. Am. B **7**(4), 521 (1990).
5. O. Kosareva, J.-F. Daigle, N. Panov, T. Wang, S. Hosseini, S. Yuan, G. Roy, V. Makarov, and S. L. Chin, Opt. Lett. **36**(7), 1035 (2011).
6. P. Polynkin, M. Kolesik, E. M. Wright, and J. V. Moloney, Phys. Rev. Lett. **106**(15), 153902 (2011).

7. J. Wahlstrand, Y.-H. Cheng, Y.-H. Chen, and H. Milchberg, Phys. Rev. Lett. **107**(10), 103901 (2011).
8. E. A. Volkova, A. M. Popov, and O. V. Tikhonova, Quantum Electron. **42**(8), 680 (2012).
9. S. Zahedpour, J. Wahlstrand, and H. Milchberg, Opt. Lett. **40**(24), 5794 (2015).
10. W. Liu and S. L. Chin, Opt. Express **13**(15), 5750 (2005).
11. V. O. Kompanets, D. E. Shipilo, I. A. Nikolaeva, N. A. Panov, O. G. Kosareva, and S. V. Chekalin, JETP Lett. **111**, 31 (2020).
12. N. A. Panov, D. E. Shipilo, V. A. Andreeva, O. G. Kosareva, A. M. Saletsky, H. Xu, and P. Polynkin, Phys. Rev. A **94**(4), 041801 (2016).
13. Y. E. Geints and A. A. Zemlyanov, Appl. Opt. **56**, 1397 (2017).
14. N. A. Panov, D. E. Shipilo, A. M. Saletsky, W. Liu, P. G. Polynkin, and O. G. Kosareva, Phys. Rev. A **100**(2), 023832 (2019).
15. P. A. Oleinikov and V. T. Platonenko, Laser Phys. **3**, 618 (1993).
16. E. T. J. Nibbering, G. Grillon, M. A. Franco, B. S. Prade, and A. Mysyrowicz, J. Opt. Soc. Am. B **14**(3), 650 (1997).
17. J. P. Palastro, T. M. Antonsen, and H. M. Milchberg, Phys. Rev. A **86**, 033834 (2012).
18. В. О. Компанец, А. А. Архипова, А. А. Мельников, С. В. Чекалин, Письма в ЖЭТФ **116**(4), 217 (2022).
19. J. Kasparian, R. Sauerbrey, and S. L. Chin, Appl. Phys. B **71**, 877 (2000).
20. O. G. Kosareva, W. Liu, N. A. Panov, J. Bernhardt, Z. Ji, M. Sharifi, R. Li, Z. Xu, J. Liu, Z. Wang, J. Ju, X. Lu, Y. Jiang, Y. Leng, X. Liang, V. P. Kandidov, and S. L. Chin, Laser Phys. **19**(8), 1776 (2009).
21. S. Xu, X. Sun, B. Zeng, W. Chu, J. Zhao, W. Liu, Y. Cheng, Z. Xu, and S. L. Chin, Opt. Express **20**(1), 299 (2012).
22. S. I. Mitryukovskiy, Y. Liu, A. Houard, and A. Mysyrowicz, J. Phys. B **48**(9), 094003 (2015).
23. А. В. Богацкая, Е. А. Волкова, А. М. Попов, ЖЭТФ **157**(5), 777 (2020).
24. S. Tzortzakis, B. Lamouroux, A. Chiron, M. Franco, B. Prade, A. Mysyrowicz, and S. Moustaizis, Opt. Lett. **25**(17), 1270 (2000).
25. A. Couairon and L. Bergé, Phys. Rev. Lett. **88**, 135003 (2002).
26. V. Y. Fedorov and V. Kandidov, Optics and Spectroscopy **105**(2), 280 (2008).
27. D. E. Shipilo, N. A. Panov, E. S. Sunchugasheva, D. V. Mokrousova, A. V. Shutov, V. D. Zvorykin, N. N. Ustinovskii, L. V. Seleznev, A. B. Savel'ev, O. G. Kosareva, S. L. Chin, and A. A. Ionin, Opt. Express **25**, 25386 (2017).
28. A. V. Shutov, D. V. Mokrousova, V. Y. Fedorov, L. V. Seleznev, G. E. Rizaev, A. V. Shalova, V. D. Zvorykin, S. Tzortzakis, and A. A. Ionin, Opt. Lett. **44**(9), 2165 (2019).
29. М. В. Федоров, ЖЭТФ **149**(3), 522 (2016).
30. M. Lewenstein, P. Balcou, M. Y. Ivanov, A. L'huillier, and P. B. Corkum, Phys. Rev. A **49**(3), 2117 (1994).
31. J. M. Brown, A. Couairon, and M. B. Gaarde, Phys. Rev. A **97**, 063421 (2018).
32. A. N. Pfeiffer, J. Phys. B **53**(16), 164002 (2020).
33. L. Yue and M. B. Gaarde, Phys. Rev. A **101**(5), 053411 (2020).
34. E. Volkova, A. Popov, O. Popovicheva, and C. Eftimiu, Sov. Phys. JETP **75**, 263 (1992).
35. С. Стремоухов, Известия РАН, Серия физическая **86**(6), 770 (2022).
36. E. Volkova and A. Popov, ZhETF **106**, 735 (1994).
37. E. Serebryannikov and A. Zheltikov, Phys. Rev. Lett. **113**(4), 043901 (2014).
38. А. М. Желтиков, Успехи физических наук **191**(4), 386 (2021).