

# Оптические моды в эллиптических микрорезонаторах для однофотонных источников

Д. Р. Казанов<sup>1)</sup>, А. М. Монахов

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН, 194021 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 10 февраля 2023 г.

После переработки 13 февраля 2023 г.

Принята к публикации 13 февраля 2023 г.

Построена теория оптических мод в эллиптическом микрорезонаторе при помощи функций Матье в эллиптических координатах. Ключевым отличием от цилиндрического случая является расщепление двукратно вырожденных мод. Проведен численный расчет расщепленных оптических мод и определена их симметрия. Предложен метод подбора параметров резонатора для выделенной длины волны. Энергия оптических мод в резонаторе с металлическими стенками и в диэлектрическом резонаторе не отличается больше чем на  $\sim 20\%$ . Дисперсионные зависимости оптических мод показывают возможность вырождения мод различной симметрии, что позволяет провести спектральную и поляризационную фильтрацию излучения источников одиночных фотонов и создать источники многократно запутанных состояний.

DOI: 10.31857/S1234567823060046, EDN: qsejog

**1. Введение.** Одной из задач квантовой нанофотоники является создание высокоэффективных источников одиночных фотонов (ИОФ), в которых дипольными излучателями являются квантовые точки (КТ). Ключевым способом для усиления излучения и его наиболее эффективного направленного вывода от излучателей является использование микрорезонаторных структур. Так, одними из наиболее известных и перспективных вариантов конструкций микрорезонаторов для ИОФ являются резонансные фотонные кристаллы [1, 2], а также цилиндрические вертикальные микрорезонаторы [3]. Например, для реализации ИОФ в спектральном диапазоне  $\sim 920$  нм используют цилиндрические микрорезонаторы радиусом 1–4 мкм с распределенными брэгговскими отражателями AlGaAs/GaAs над и под GaAs активной областью с квантовыми точками на основе InGaAs/GaAs [4]. Резонатор построен таким образом, что оптический переход реализуется вблизи энергии вырожденной по поляризации волноводной оптической моды типа  $HE_{11}$ , а также расположен в максимуме амплитуды реализуемой оптической моды. Это позволяет ускорить излучение КТ за счет эффекта Парселла, а также эффективнее вывести излучение наружу.

Однако при создании таких источников возникает ряд проблем, описанных в обзоре [5], которые могут ухудшать оптические характеристики, например, степень неразличимости фотонов. Одной из них яв-

ляется накачка КТ высоко в зону проводимости с ее дальнейшим рассеянием с непредсказуемым временем излучения. Эту проблему удастся обойти за счет использования резонансной или квази-резонансной накачки, что позволяет избежать потери в степени неразличимости за счет большей определенности времени жизни излучающего состояния. Одновременно с этим в эксперименте при детектировании приходится бороться с рассеянным излучением лазерной накачки: для резонансных фотонных волноводов излучение накачки и детектирование разделяют пространственно [2], тогда как в случае с цилиндрическими микрорезонаторами одним из способов является использование спектральной фильтрации по поляризации [6]. Последний способ уменьшает эффективность источника как минимум на 50%, что фундаментально ограничивает масштабирование таких источников.

Одним из путей преодоления проблемы ухудшения эффективности ИОФ является понижение симметрии системы таким образом, что ранее двукратно вырожденная фундаментальная оптическая мода резонатора расщепится по поляризации [7]. Этого можно достигнуть, изменив геометрию цилиндрического резонатора, перейдя от кругового сечения к эллиптическому [8, 9]. В результате такого расщепления в дальнем поле излучение из резонатора оказывается линейно поляризованным. Подбирая эксцентриситет, можно добиться того, что две моды такого резонатора окажутся почти вырожденными и при этом поляризованными во взаимно перпендикулярном направ-

<sup>1)</sup>e-mail: kazanovdr@gmail.com

лении в дальнем поле. Тогда, имея две оптических моды с поляризацией  $V$ - и  $H$ -, появляется возможность возбуждать, например,  $V$ -моды внешним лазером, тогда как при малом межмодовом расстоянии  $\Delta\omega$  в резонаторе будет возбуждаться и  $H$ -мода, что приведет к возбуждению ИОФ. Поскольку возбуждающее излучение и испускаемые фотоны поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях, то на выходе можно получить высокую эффективность вывода излучения – вплоть до 93 % по оценкам авторов.

Для получения полупроводниковых цилиндрических и эллиптических наноколонн со вставкой из квантовых излучателей в первую очередь используют метод молекулярно-пучковой эпитаксии (МПЭ). Этот метод позволяет с атомарной точностью выращивать планарные брэгговские зеркала, а также слои КТ с минимальным числом дефектов для получения близкой к единице квантовой эффективности КТ. В таких резонаторах можно достичь высоких значений добротности порядка  $Q \sim 10^4$ . Цилиндрическая или эллиптическая форма наноколонн получается с помощью электронной литографии и последующим ионным травлением [10]. Таким образом, текущая технология позволяет получать практически любые формы и размеры резонаторов.

Для контроля параметров резонатора требуется предварительное численное моделирование. Как правило, к нему относятся методы решения уравнений Максвелла во временной или частотной области. К сожалению, использование большого числа слоев в структуре (например, в брэгговских зеркалах) повышает вычислительную сложность задач: увеличивается требование по памяти, а также вычислительной мощности. Кроме того, использование параметрических разверток по выделенному параметру для подбора идеального дизайна в значительной степени увеличивает время выполнения заданного алгоритма.

В этой работе мы представляем методику, позволяющую быстро подбирать необходимые параметры эллиптического резонатора, повышающие эффективность ИОФ. Мы предлагаем метод поиска энергии оптических мод, а также расчет их пространственного распределения в двумерном металлическом резонаторе и представляем оценки погрешности при переходе к диэлектрическому и нульмерному резонатору с трехмерным квантованием за счет брэгговских зеркал. Нами предложен метод, с помощью которого можно возбуждать почти вырожденные состояния для получения эффективного источника одиночных и запутанных фотонов.

**2. Теоретическое описание оптических мод.**

Для описания модовой структуры эллиптического резонатора рассмотрим точно решаемую задачу об эллиптическом резонаторе с идеальными металлическими стенками. Эта задача частично рассмотрена в книге [11]. Моды резонатора определяются уравнением для  $z$  компоненты электрического (ТМ мода) или магнитного (ТЕ) поля. Прочие компоненты через них выражаются. Уравнение для соответствующей компоненты выглядит одинаково:

$$\left(-\frac{n^2\omega^2}{c^2} - \Delta\right)A = 0, \tag{1}$$

где  $A = E_z$  ( $H_z$ ) для ТМ (ТЕ) моды, соответственно,  $n^2 = \epsilon\mu$ ,  $c$  – скорость света в вакууме. Для металлического резонатора переменные в уравнении (1) делятся, поэтому оператор  $\Delta$  можно представить в виде  $\Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , где  $\Delta_2$  – двумерный оператор Лапласа. Считая  $A = B(x, y)Z(z)$ , получим

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = -k_z^2Z, \tag{2}$$

$$\Delta_2 B = -k_{\parallel}^2 B, \tag{3}$$

где  $k_{\parallel}$  – волновой вектор моды в плоскости слоя,  $k_z$  – поперечный волновой вектор, а  $k_{\parallel}^2 + k_z^2 = \frac{n^2\omega^2}{c^2}$ .

Введем эллиптические координаты в плоскости резонатора. Пусть  $a$  и  $-a$  – положения фокусов эллипса на оси  $x$ . Тогда координаты  $x$  и  $y$  будут описываться как

$$x = a \operatorname{ch} \mu \cos \nu,$$

$$y = a \operatorname{sh} \mu \sin \nu,$$

где  $\mu \geq 0$ , а  $\nu \in [0, 2\pi]$ . При такой замене переменных линии уровня  $\mu = \operatorname{const}$  являются эллипсами, один из которых должен совпасть с границей резонатора. В каноническом уравнении эллипсов

$$\frac{x^2}{b_1^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1, \tag{4}$$

параметры эллипса равны  $b_1^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 \mu$  и  $b_2^2 = a^2 \operatorname{sh}^2 \mu$ . Параметр  $\mu$  в данном случае отвечает за степень сплюсненности эллипса и находится из соотношения  $\mu = \operatorname{arctg} \frac{b_2}{b_1}$ . Так, в цилиндрическом случае  $\mu = \infty$ , а при увеличении степени сплюсненности стремится к нулю. После такой замены переменных уравнение (3) перейдет в

$$\frac{1}{a^2(\operatorname{sh}^2 \mu + \sin^2 \nu)} \left( \frac{\partial^2 B}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial \nu^2} \right) + k_{\parallel}^2 B = 0. \tag{5}$$

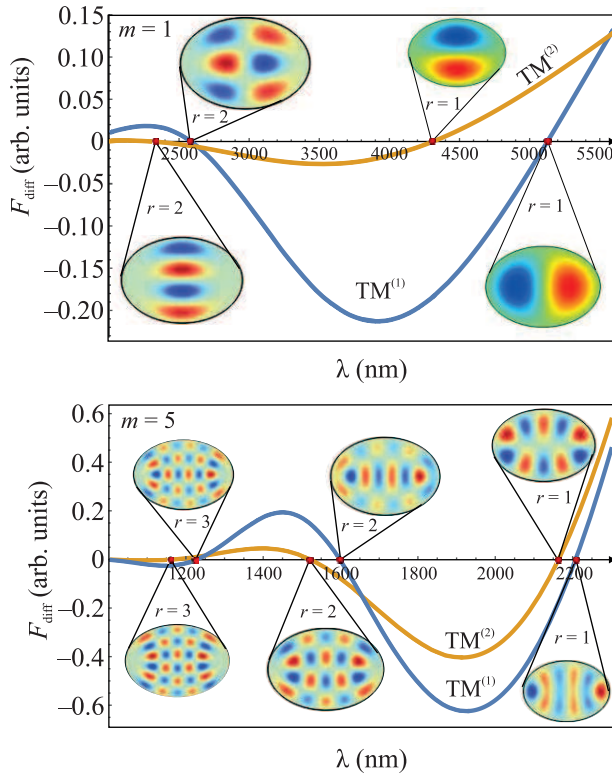


Рис. 1. (Цветной онлайн) Пример поиска оптических мод двумерного эллиптического диэлектрического резонатора с металлическими стенками в ТМ поляризации с использованием трансцендентного уравнения (14) для двух произвольных угловых квантовых чисел  $m = 1$  (сверху) и  $m = 5$  (снизу). Пересечение линий с осью  $x$  отвечает за разные радиальные квантовые числа  $r$ , начиная с  $r = 1$ , при первом пересечении на больших длинах волн. Для каждой точки пересечения показано двумерное пространственное распределение  $z$  компоненты электрического поля

Вводя  $B = M(\mu)N(\nu)$  и воспользовавшись формулой двойного угла  $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$  и ее гиперболическим аналогом, после разделения переменных получаем пару уравнений

$$N'' + \left( \alpha - \frac{k_{\parallel}^2 a^2}{2} \cos 2\nu \right) N = 0 \quad (6)$$

$$M'' - \left( \alpha - \frac{k_{\parallel}^2 a^2}{2} \cosh 2\mu \right) M = 0, \quad (7)$$

где  $\alpha$  – еще одна константа разделения. При этом функция  $N$  должна быть  $2\pi$  периодической, а для функции  $M$  в металлическом резонаторе на границе

должно выполняться одно из следующих граничных условий:

$$N(\nu + 2\pi) = N(\nu), \quad (8)$$

$$\begin{cases} M(\mu_0) = 0 \text{ для ТМ} \\ M'(\mu_0) = 0 \text{ для ТЕ,} \end{cases} \quad (9)$$

где  $\mu_0$  – значение  $\mu$ , при котором линия уровня  $\mu$  совпадает с границей резонатора. Уравнение (6) совпадает с уравнением Матье

$$y''(z) + (\alpha - 2q \cos 2z)y(z) = 0, \quad (10)$$

а уравнение (7) – с модифицированным уравнением Матье, получающемся из (10) заменой  $z = iu$

$$y''(u) - (\alpha - 2q \cosh 2u)y(u) = 0,$$

где

$$q = \frac{k_{\parallel}^2 a^2}{4}. \quad (11)$$

Для того, чтобы найти константы  $\alpha$  и  $k_{\parallel}$  и, тем самым, спектр резонатора, необходимо воспользоваться граничными условиями (8) и (9). Для этого необходимо отобразить  $2\pi$  периодические решения уравнения Матье и решения модифицированного уравнения Матье, имеющие корень при заданном  $\mu_0$ . Про уравнение Матье известно [12], что для пары значений  $(\alpha, q), q \neq 0$ , может существовать не более одного периодического решения периода  $\pi$  или  $2\pi$ . При фиксированном  $q$  существует дискретный набор альф ( $\alpha_m$ ), для которых решения периодичны. Индекс  $m$  нумерует число корней функции на периоде. Важным отличием от привычного цилиндра является то, что эти альфы невырождены.

Для цилиндра  $q = 0$  и каждому  $\alpha > 0$  соответствуют два периодических решения  $\sin \nu$  и  $\cos \nu$  с одинаковой частотой моды. В эллипсе эти решения расщепляются по частоте. Появляется четное решение как аналог косинуса –  $se_m$  и нечетное решение как аналог синуса –  $se_m$ , имеющие в общем случае разные частоты. Для модифицированных функций Матье вводятся соответствующие функции от мнимого аргумента  $Se_m(x) = se_m(ix)$  и  $se_m = -i se_m(ix)$ , у которых индекс  $m$  привязан с четному или нечетному решению уравнения Матье.

Согласно [11], решение уравнения (5) выглядит следующим образом:

$$B_{z_m} = C_m se(\nu, q_{mr}) Ce(\mu, q_{mr}) \text{ для ТМ моды,} \quad (12)$$

$$B_{z_m} = C_m se(\nu, q_{mr}) Se(\mu, q_{mr}) \text{ для ТЕ моды,} \quad (13)$$

где  $B_z$  соответствует  $E_z$  ( $H_z$ ) для ТМ (ТЕ) моды. Остальные комбинации типа  $se_m(\nu, q_{mr}) Se_m(\mu, q_{mr})$  запрещены условием непрерывности на отрезке, соединяющем точки  $-a$  и  $a$ . Индекс  $r$  нумерует корни функции  $Se_m$  или  $Se_m$ . При заданной геометрии эллипса возникают две, в общем случае, невырожденные частоты  $q_{mr}^{(i)}$ , которые определяются из условий

$$0 = \begin{cases} Ce(\mu_0, q_{mr}^{(1)}) \\ Se(\mu_0, q_{mr}^{(2)}) \end{cases} \quad \text{для ТМ моды} \quad (14)$$

$$0 = \begin{cases} \partial_\mu Ce(\mu_0, q_{mr}^{(1)}) \\ \partial_\mu Se(\mu_0, q_{mr}^{(2)}) \end{cases} \quad \text{для ТЕ моды..} \quad (15)$$

**2.1. Примеры оптических мод.** Для сравнения рассмотрим отличие цилиндрического резонатора от эллиптического и ограничимся случаем ТМ моды. Как известно, в цилиндре решение для  $E_z$  двукратно вырожденно [13] и выглядит следующим образом:

$$E_z = C J_m(qR) \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases},$$

где  $q^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} - k_z^2$ . Собственная частота моды определяется из условия

$$J_m(qR) = 0, \quad (16)$$

где  $R$  – радиус цилиндра. Для эллиптического же случая в ТМ поляризации (12) вместо двукратно вырожденной оптической моды (16) возникают два собственных числа  $q_{mr}^{(1)}$  и  $q_{mr}^{(2)}$  из (14). Собственная частота определяется из условия

$$k_{\parallel, mr}^{(i)} = \sqrt{\frac{4q_{mr}^{(i)}}{a^2}}. \quad (17)$$

На рисунке 1 показан пример поиска длины волны оптических мод ТМ поляризации с заранее заданными квантовыми числами  $(m, r)$  в двумерном эллиптическом диэлектрическом микрорезонаторе с металлическими стенками, заполненном GaAs ( $n_{\text{GaAs}} = 3.5$ ) и  $k_z = 0$ . Для этого решались трансцендентные уравнения (14) с размерами  $b_1 = 1000$  нм,  $b_2 = 700$  нм. Расщепленные моды ТМ<sup>(1)</sup> и ТМ<sup>(2)</sup> отличаются по симметрии относительно главной оси эллипса; четные моды с одинаковыми квантовыми числами  $(m, r)$  находятся ниже по энергии, чем нечетные, по аналогии с уровнями квантования в квантовой яме. Первое пересечение с  $y = 0$  для мод с  $(m = 1, r = 1)$  происходит при больших длинах волн сопоставимых с главной осью эллипса  $\lambda^{(1)} \approx \approx 2b_1 n_{\text{GaAs}} = 7000$  нм для ТМ<sub>11</sub><sup>(1)</sup>, и  $\lambda^{(2)} \approx 2b_2 n_{\text{GaAs}} = = 4200$  нм для ТМ<sub>11</sub><sup>(2)</sup>. Оптические моды с большими

$(m > 1, r = 1)$  стремятся к границе эллипса и при увеличении  $m$  длину волны обеих оптических мод можно оценить как  $\lambda_{m \rightarrow \infty}^{(1,2)} = n_{\text{GaAs}} L / m$ , где  $L$  – периметр эллипса, а расстояние между этими модами будет уменьшаться. Такой подход позволяет распознать расщепленные оптические моды и определить их квантовые числа  $(m, r)$ , тогда как численный расчет позволяет определить только энергию оптических мод и картину распределения электромагнитного поля.

**2.2. Задача поиска степени сплюсненности.** Обратная задача по поиску нужной геометрии (степени сплюсненности) для оптической моды на выделенной частоте показана на рис. 2. Цветом изображены

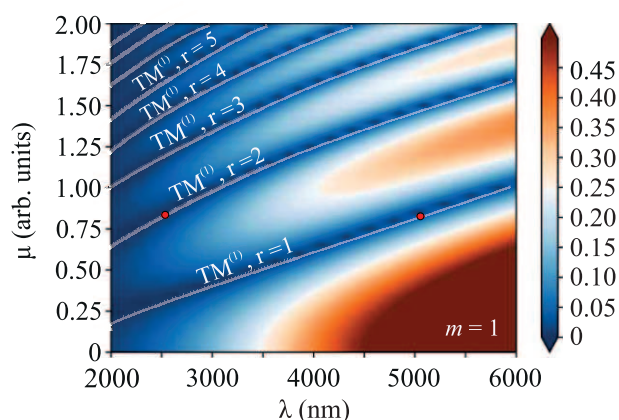


Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость длины волны симметричной оптической моды ТМ<sub>mr</sub><sup>(1)</sup> для углового момента  $m = 1$  и нескольких радиальных квантовых чисел  $r = 1 - 5$  от степени сплюсненности  $\mu$  в трансцендентном уравнении (14). Красными точками указаны точки пересечения линий трансцендентного уравнения с осью  $x$  для  $\mu_0 = 0.867$ , что соответствует  $b_1 = 1000$  нм и  $b_2 = 700$  нм, показанным на рис. 1

значения модуля модифицированной функции Маттье  $Se = Ce(\mu, \lambda)$  как функции двух переменных  $\mu$  и  $\lambda$  для частного случая симметричной оптической моды ТМ<sub>rm</sub><sup>(1)</sup> и  $m = 1$ . Мы считаем, что  $k_z = 0$  и выражаем в (11) частоту  $\omega$  через  $\lambda$ . Оптические моды с квантовыми числами  $(m, r)$  в таком резонаторе соответствуют нулям функции  $Se$ , которые для наглядности выделены тонкой белой линией для нескольких первых мод. Красными точками отмечен частный случай резонатора с  $b_1 = 1000$  нм и  $b_2 = 700$  нм, по аналогии с рис. 1. Видно, что при уменьшении  $\mu$  энергия каждой оптической моды растет. При увеличении  $\mu$  эллипс становится похожим на цилиндр и дисперсионные кривые расщепленных мод стремятся друг к другу. Таким образом, в эллиптическом

резонаторе поле представляет из себя произведение функции, зависящей от одной переменной  $\mu$  (аналог радиуса в цилиндрическом случае) и функцию, зависящей от второй переменной  $\nu$  (аналог угла в цилиндрическом случае).

Сравнение с численными расчетами показывает, что в диэлектрическом резонаторе в воздухе для поиска требуемой оптической моды нужно корректировать начальное значение частоты для моды с малыми  $(m, r)$  на 20–30 % относительно частоты такого резонатора с металлическими стенками, либо делать соответствующие поправки в диэлектрической функции. Более того, описываемая процедура быстрого нахождения оптических мод становится верна для диэлектрического резонатора с большим  $n$ , поскольку по известной теореме электродинамики решения уравнений Максвелла в диэлектрических средах переходят в решения с металлическими граничными условиями при стремлении разности показателей преломления на границах к бесконечности.

**2.3. Случай вырожденных частот.** Для создания наиболее эффективного ИОФ при резонансной накачке хорошим способом является использование оптических мод при почти вырожденной частоте. При таком подходе лазерная накачка может производиться через одну оптическую моду, а детектирование в силу небольшого перекрытия исследуемых оптических мод, происходит через другую оптическую моду на сдвинутой частоте. Кроме того, использование мод разной природы: ТЕ – ТМ, Се-Се и прочие несимметричные комбинации при различных  $(m, r)$  позволяет естественным образом отфильтровать свет по поляризации. На рисунке 3 представлены для наглядности несколько дисперсионных зависимостей оптических мод с малыми  $(m, r)$  различной поляризации в зависимости от геометрии эллиптического резонатора  $TM_{mr}^{(1)}$  и  $TM_{mr}^{(2)}$ . Энергия оптических мод сильно зависит от степени сплюсненности резонатора. В частном случае при  $\mu > 1$  эллипс становится слабо отличим от окружности. Отличие полюсов связано с отличием  $\text{sh } x$  от  $\text{ch } x$ , и это оно становится малым при  $x > 1$ . Поэтому кривые, соответствующие, например,  $TM_{41}^{(1)}$  и  $TM_{41}^{(2)}$ , плавно подходят друг к другу при увеличении  $\mu$ . Красными точками на рис. 3 отмечены области длин волн, при которых ортогональные моды становятся двукратно вырожденными. При создании ИОФ следует теоретически находить области вырождения и слегка отстраиваться от них в случае, если требуется создать слабое перекрытие для, например, оптической фильтрации. Также необходимо отметить, что в таких структурах возникают близкие к трехкратному

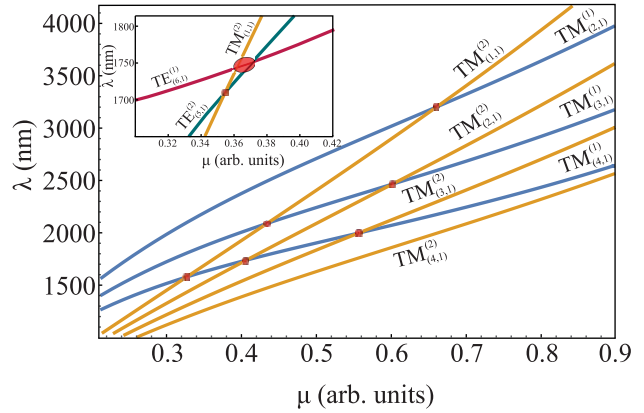


Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимости собственных длин волн от сплюсненности для выборочных (для наглядности) расщепленных мод  $TM_{mr}^{(1)}$  и  $TM_{mr}^{(2)}$  с квантовыми числами  $m = 1 - 4$  и  $r = 1$  для разной степени сплюсненности  $\mu$  диэлектрического резонатора с металлическими стенками.  $\mu = 0.9$  соответствует сплюсненности в 20 %. Красными точками показаны области 2х-кратного вырождения оптических мод. На вставке показан случай 2х-кратного вырождения оптических мод и близко расположенного третьего состояния

вырожденные состояния (двукратно вырожденное и близкое третье). Так, на вставке показан пример области, где близко по частоте одновременно могут существовать три попарно ортогональные оптические моды друг другу ( $TE_{51}^{(2)}$ ,  $TE_{61}^{(1)}$ ,  $TM_{11}^{(2)}$ ). Такие состояния можно использовать для оптической накачки через близко расположенную моду, возбуждая тем самым двукратно вырожденное запутанное состояние.

**3. Заключение.** Таким образом, в представленной работе была построена теория оптических мод в эллиптических микрорезонаторах на основе функций Матье в диэлектрических микрорезонаторах с металлическими стенками и показано, что полученные таким способом оценки могут быть использованы в качестве нулевого приближения при расчете диэлектрических резонаторов. Ключевым отличием от классического цилиндрического резонатора является расщепление двукратно вырожденных мод. Для большой разницы показателей преломления резонатора и его окружения классификацию мод в металлическом резонаторе можно приближенно использовать для диэлектрических резонаторов, как это делается для круглых волноводов, где в первом приближении можно не учитывать гибридизацию мод. Мы продемонстрировали способ подбора параметров резонатора для задач квантовой фотоники, такие как близко вырожденные моды для ИОФ или многократно запутанные состояния.

Работа частично поддержана госкорпорацией “Росатом” в рамках Дорожной Карты Квантовые Вычисления (контракт # 868-1.3-15/15-2021 от 5.10.2021 и контракт # R2152 от 19.11.2021). Д. Р. Казанов выражает благодарность стипендии президента СП-5068.2022.5.

1. M. Arcari, I. Söllner, A. Javadi, S.L. Hansen, S. Mahmoodian, J. Liu, H. Thyrrstrup, E.H. Lee, J.D. Song, S. Stobbe, and P. Lodahl, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 093603 (2014).
2. R. Uppu, F.T. Pedersen, Y. Wang, C.T. Olesen, C. Papon, X. Zhou, L. Midolo, S. Scholz, A.D. Wieck, A. Ludwig, and P. Lodahl, *Sci. Adv.* **6**, 50 (2020).
3. I. Friedler, C. Sauvan, J.P. Hugonin, P. Lalanne, J. Claudon, and J.M. Gérard, *Opt. Express* **17**, 2095 (2009).
4. М. А. Бобров, С. А. Блохин, Н. А. Малеев, А. Г. Кузьменков, А. А. Блохин, А. П. Васильев, Ю. А. Гусева, М. В. Рахлин, А. И. Галимов, Ю. М. Серов, С. И. Трошков, В. М. Устинов, А. А. Торопов, *Письма в ЖЭТФ* **116**(9), 592 (2022).
5. P. Senellart, G. Solomon, and A. White, *Nat. Nanotechnol.* **12**, 1026 (2017).
6. Y.-J. Wei, Y.-M. He, M.-C. Chen, Y.-N. Hu, Y. He, D. Wu, C. Schneider, M. Kamp, S. Höfling, C.-Y. Lu, and J.-W. Pan, *Nano Lett.* **14**(11), 6515 (2014).
7. H. Wang, Y.-M. He, T.-H. Chung et al. (Collaboration), *Nat. Photon.* **13**, 770 (2019).
8. U.M. Gür, M. Mattes, S. Arslanagić, and N. Gregersen, *Appl. Phys. Lett.* **118**, 061101 (2021).
9. X. Chen, R. Su, J. Liu, J. Li, and X.-H. Wang, *Photonics Research* **10**, 2066 (2022).
10. B. Gayral, J.M. Gérard, B. Legrand, E. Costard, and V. Thierry-Mieg, *Appl. Phys. Lett.* **72**, 1421 (1998).
11. N. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*, Oxford University Press, Oxford (1947).
12. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, М. (1979).
13. Л. А. Вайнштейн, *Электромагнитные волны*, АСТ, М. (1988), 440 с.