

Форм-фактор в переходном излучении от полых пучков

Д. Ю. Сергеева¹, А. А. Тищенко^{1*}

¹ Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, 115409 Москва, Россия

* Международная научно-образовательная лаборатория радиационной физики, Национальный исследовательский университет “БелГУ”, 308034 Белгород, Россия

Поступила в редакцию 26 февраля 2023 г.

После переработки 3 марта 2023 г.

Принята к публикации 3 марта 2023 г.

Рассчитан форм-фактор полого электронного пучка для процесса переходного излучения. Показано, что характеристики когерентного излучения существенно различны для обычных сплошных пучков и для полых. Численные оценки проведены для терагерцового диапазона частот и релятивистских энергий электронов.

DOI: 10.31857/S1234567823070029, EDN: jfzodf

1. Введение. Полые электронные пучки – это пучки, имеющие поперечный профиль в виде кольца. Последнее время они активно исследуются. Например, в работах [1–3] была предложена идея использовать полые электронные пучки для коллимации высокоинтенсивных основных протонных или ионных пучков на Большом адронном коллайдере в ЦЕРНе. При этом электронные пучки внедряются в систему коллимации для очистки гало, а основной пучок циркулирует внутри полого электронного пучка. Полый электронный пучок резонансно возбуждает хвосты основного пучка, а его ядро остается невозмущенным. Эти устройства называются полыми электронными линзами. Проблема очистки гало актуальна в связи с ведущимися работами по увеличению интегральной светимости на Большом адронном коллайдере в 10 раз.

При работе с полыми электронными линзами остро встает вопрос о диагностике поперечных размеров обоих пучков – основного и полого электронного. Одна из активно разрабатываемых сейчас идей – использовать флюоресценцию газа [4]. Преимущество этого метода заключается в том, что свойства пучка практически не нарушаются при измерениях. Так как метод новый, то для его перекрестной проверки используется оптическое переходное излучение. Мониторы на оптическом переходном излучении хорошо зарекомендовали себя при измерении поперечных профилей электронных пучков на ускорителях, где сегодня активно используются [5–7].

Ускорение заряженных частиц – еще одно перспективное направление, где используются полые

пучки заряженных частиц. Ускорение позитронов до высоких энергий возможно в кильватерных полях, которые образуются при движении полых электронных пучков в плазме. Эта идея была подтверждена результатами компьютерного моделирования процесса образования кильватерных полей и динамики полых электронных пучков [8–10].

Исследования динамики полых пучков и характеристик излучения, которое они возбуждают, также важны в активно развивающейся в настоящее время области – физике частиц с ненулевым орбитальным угловым моментом (закрученных электронов) [11, 12]. Действительно, закрученные одиночные электроны или электронные пучки описываются функциями распределения, которые в классическом подходе аналогичны функциям распределения электронов в полой пучке.

Несмотря на растущую популярность полых пучков в физике излучения, в большинстве работ используется только одноэлектронный подход. Кратко, отличие многоэлектронного подхода от одноэлектронного состоит в учете форм-фактора пучка. Это функция, зависящая от формы пучка, плотности, размеров и функции распределения электронов внутри пучка $f(\mathbf{r})$. В работах [13, 14] было показано, что форм-фактор имеет разный вид для разных типов излучения. В данной работе мы рассчитываем форм-факторы полого пучка для переходного излучения, см. рис. 1.

2. Форм-фактор пучка. Форм-фактор давно известен в синхротронном излучении и некоторых других видах излучения, но в основном для гауссовского или равномерного распределения электронов внутри пучка [15–17]. Отметим, что известные

¹)e-mail: tishchenko@mephi.ru

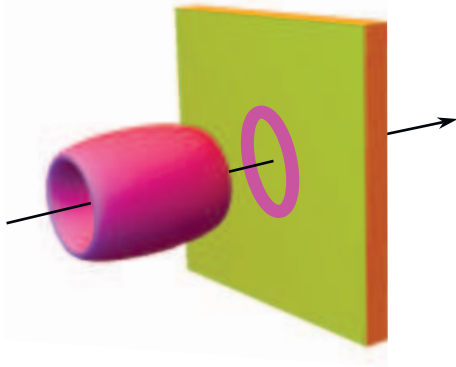


Рис. 1. (Цветной онлайн) Полый электронный пучок (розовый) пересекает мишень (зеленая), генерируя переходное излучение

форм-факторы часто используются некорректно, а иногда и понятие форм-фактора неприменимо, подробнее см. [14, 18].

Для большинства типов излучения интенсивность можно записать как:

$$I_N = I_1 F, \quad (1)$$

где I_1 – интенсивность излучения от одного электрона, F – форм-фактор пучка, который при большом числе электронов в сгустке $N \gg 1$ описывается формулой

$$F = N F_{\text{inc}} + N^2 F_{\text{coh}}. \quad (2)$$

Под интенсивностью можно понимать, например, распределение излученной энергии по углам и частотам [13] или мощность излучения [19]. Первое слагаемое описывает некогерентное излучение, а второе – когерентное излучение. Здесь F_{coh} – когерентный форм-фактор, F_{inc} – некогерентный форм-фактор. Конкретный вид функций F_{coh} и F_{inc} зависит от типа излучения.

Рассмотрим поляризационное излучение, которое возбуждается при взаимодействии заряженной частицы с аморфной безграничной средой. Среда может считаться таковой, когда расстояние от ее границы до электрона в направлении, перпендикулярном его траектории, много больше, чем эффективный радиус убывания собственного поля движущегося электрона $r_{\text{eff}} \approx \gamma\beta\lambda/2\pi$, где λ – длина волны излучения, $\beta = v/c$, v – скорость электрона, c – скорость света в вакууме, γ – Лоренц-фактор электрона. Другими словами, будем считать среду безграничной, когда электрон “не чувствует” края среды, см. рис. 2. К такому типу относятся переходное излучение, излучение Вавилова–Черенкова, рентгеновское параметрическое излучение. Источником такого из-

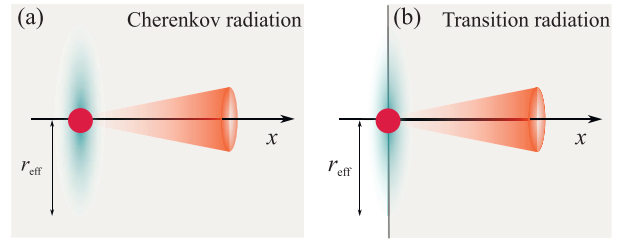


Рис. 2. (Цветной онлайн) Электрон (красный) возбуждает: (a) – излучение Вавилова–Черенкова, двигаясь в среде (серая); (b) – переходное излучение, пересекая границу раздела двух сред (вертикальная линия); r_{eff} – эффективный радиус убывания собственного поля электрона (голубое)

лучения является вещество мишени, которая динамически поляризуется под действием собственного поля движущегося релятивистского электрона. При этом скорость электрона можно считать постоянной, когда кинетическая энергия электрона много больше, чем энергия, затрачиваемая на излучение.

Для такого типа излучения некогерентный форм-фактор равен единице: $F_{\text{inc}} = 1$, см., например, [20]. Это объясняется тем, что все электроны вносят одинаковый вклад в поляризацию в вещества, т.е. положение электрона в поперечном направлении не влияет на характеристики излучения [14]. Когерентный форм-фактор в переходном излучении рассчитывается по формуле [13, 14]:

$$F_{\text{coh}} = \left| \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) e^{-i\frac{\omega}{v}x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z} \right|^2, \quad (3)$$

где $\omega = 2\pi c/\lambda$ – частота излучения, $f(\mathbf{r})$ – нормированная на единицу функция распределения электронов в пучке относительно его центра, \mathbf{r} – радиус-вектор электрона, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ – волновой вектор излучения. При получении формулы (3) предполагалось, что все электроны движутся с постоянной скоростью \mathbf{v} вдоль оси OX , т.е. не учитывалась угловая расходимость пучка и разброс по энергиям. Формулу (3) можно получить, рассчитав поле излучения для всех электронов, вычислив интенсивность излучения, и затем усреднив ее по положениям всех электронов.

3. Полый пучок. Рассмотрим пучок, имеющий гауссово распределение электронов в продольном, т.е. параллельном скорости, направлении, а в поперечном направлении пусть пучок является полым. Будем считать, что продольная и поперечная компоненты радиус-вектора электрона независимы. Тогда, пренебрегая корреляциями в сгустке и считая, что положения электронов не зависят от положения

их соседей, можно представить функцию распределения $f(\mathbf{r})$ в виде:

$$f(\mathbf{r}) = f_{\text{long}}(x)f_{\text{tr}}(y, z), \quad (4)$$

где $f_{\text{long}}(x)$ и $f_{\text{tr}}(y, z)$ – продольная и поперечная функции распределения. Продольный профиль пучка определяет явный вид отдельного множителя в форм-факторе и может быть произвольным.

Для рассматриваемого пучка функции распределения, записанные в цилиндрических координатах, имеют вид:

$$f_{\text{long}}(x) = (\sigma_x \sqrt{\pi})^{-1} \exp[-x^2/\sigma_x^2], \quad (5)$$

$$f_{\text{tr}}(R, \varphi) = A \exp[-(R - r_0)^2/\sigma_{\text{tr}}^2], \quad (6)$$

где для краткости мы ввели безразмерный параметр $\mu = r_0/\sigma_{\text{tr}}$ и нормировочный коэффициент

$$A = (\pi\sigma_{\text{tr}}^2)^{-1} (\sqrt{\pi}\mu[1 + \text{erf}(\mu)] + e^{-\mu^2})^{-1}. \quad (7)$$

Здесь $y = R \cos \varphi$, $z = R \sin \varphi$, σ_x – характерный продольный размер пучка, r_0 – радиус полого пучка, σ_{tr} характеризует толщину кольца пучка, $\text{erf}(\mu)$ – функция ошибок:

$$\text{erf}(\mu) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\mu} dt \exp(-t^2). \quad (8)$$

В данной работе мы не учитываем вращение электронов внутри пучка и не учитываем наличие углового орбитального момента у электронов, что становится важным, например, при рассмотрении квантовых пакетов с угловым моментом. Учет этих эффектов поведет к изменениям не только в описании структуры сгустка, но и требует пересчета интенсивности переходного излучения от одного электрона (см., например, [11]). На рисунке 3 приведены примеры поперечной функции распределения.

Подставляя функции распределения (5)–(6) в формулу (3), получим выражение для когерентного форм-фактора полого пучка в виде:

$$F_{\text{coh}} = F_{\text{long}}F_{\text{tr}}, \quad (9)$$

где F_{long} – продольный когерентный форм-фактор:

$$F_{\text{long}} = \exp(-\omega^2\sigma_x^2/(2v^2)), \quad (10)$$

а F_{tr} – поперечный когерентный форм-фактор:

$$F_{\text{tr}} = 4\pi^2 A^2 |L|^2, \quad (11)$$

и введено обозначение:

$$L = \int_0^{+\infty} dR \text{Re} \left[e^{-\frac{(R-r_0)^2}{\sigma_{\text{tr}}^2}} J_0(Rk_{\text{tr}}) \right], \quad (12)$$

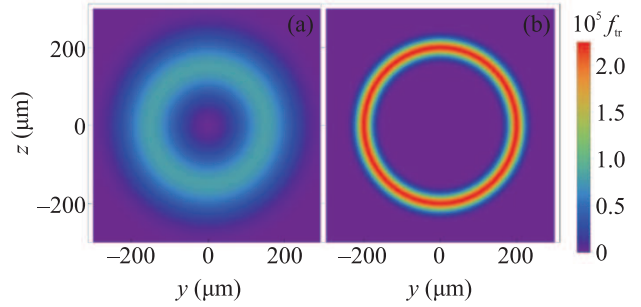


Рис. 3. (Цветной онлайн) Поперечный профиль полого пучка (a) – для $r_0 = 150$ мкм, $\sigma_{\text{tr}} = 75$ мкм ($\mu = 2$); (b) – для $r_0 = 200$ мкм, $\sigma_{\text{tr}} = 20$ мкм ($\mu = 0$)

J_0 – функция Бесселя нулевого порядка, $k_{\text{tr}} = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$. Используя известное разложение [21]

$$J_0(Rk_{\text{tr}}) = \sum_{s=0}^{+\infty} (-1)^s \frac{(Rk_{\text{tr}})^{2s}}{2^{2s}(s!)^2}, \quad (13)$$

вместо формулы (12) получим:

$$L = e^{-\mu^2} \sum_{s=0}^{+\infty} (-1)^s \frac{k_{\text{tr}}^{2s} \sigma_{\text{tr}}^{2(s+1)}}{2^{2s+1}(s!)^2} G_s, \quad (14)$$

где

$$G_s = \Gamma(1+s)\Phi(s+1, 1/2; \mu^2) + 2\mu\Gamma(s+3/2)\Phi(s+3/2, 3/2; \mu^2), \quad (15)$$

$\Phi \equiv {}_1F_1$ – вырожденная гипергеометрическая функция, Γ – гамма-функция. Окончательно выражение для поперечного когерентного форм-фактора полого электронного пучка:

$$F_{\text{tr}} = \pi^2 \sigma_{\text{tr}}^4 A^2 e^{-2\mu^2} \left| \sum_{s=0}^{+\infty} (-1)^s \frac{\sigma_{\text{tr}}^{2s} k_{\text{tr}}^{2s}}{2^{2s}(s!)^2} G_s \right|^2. \quad (16)$$

Из выражения (16) видно, что форм-фактор зависит от угла наблюдения излучения. Другими словами, форма сгустка влияет на характеристики излучения по-разному в зависимости от направления распространения излучения.

Для пучка с обычным гауссовым поперечным распределением электронов, т.е. для $r_0 = 0$ или $\mu = 0$, из формулы (16) получаем:

$$F_{\text{tr}} = \exp(-\sigma_{\text{tr}}^2 k_{\text{tr}}^2/2) \quad (r_0 = 0, \mu = 0). \quad (17)$$

Это выражение совпадает с классическим, см., например, монографию Г. М. Гарибяна [20].

Выражение (14) можно преобразовать. Пользуясь известными рекуррентными соотношениями для

вырожденных гипергеометрических функций, получим:

$$L = \frac{\sigma_{\text{tr}}^2}{2} e^{-\mu^2} \sqrt{\pi} \sum_{s=0}^{+\infty} \left(\frac{\mu^{2s} \Phi[s+1, 1, -(\sigma_{\text{tr}} k_{\text{tr}}/2)^2]}{\Gamma(s+1/2)} + \mu^{2s+1} \Phi[s+3/2, 1, -(\sigma_{\text{tr}} k_{\text{tr}}/2)^2] / \Gamma(s+1) \right). \quad (18)$$

Преобразуем вырожденные гипергеометрические функции. Разложим в конечный ряд первую из них:

$$\Phi \left[s+1, 1, -\frac{\sigma_{\text{tr}}^2 k_{\text{tr}}^2}{4} \right] = e^{-\frac{\sigma_{\text{tr}}^2 k_{\text{tr}}^2}{4}} \sum_{m=0}^s \frac{(-1)^m s! (\sigma_{\text{tr}} k_{\text{tr}})^{2m}}{2^{2m} (m!)^2 (s-m)!}. \quad (19)$$

Для того чтобы преобразовать второе слагаемое, воспользуемся формулой, полученной в работе [22]. После несложных преобразований получим:

$$\Phi \left[s+3/2, 1, -\left(\frac{\sigma_{\text{tr}} k_{\text{tr}}}{2} \right)^2 \right] = e^{-\frac{\sigma_{\text{tr}}^2 k_{\text{tr}}^2}{8}} \left(I_0 \left[\frac{\sigma_{\text{tr}}^2 k_{\text{tr}}^2}{8} \right] + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} {}_3F_2 \left(-m, m, s + \frac{3}{2}; 1, \frac{1}{2}; 1 \right) I_m \left[\frac{\sigma_{\text{tr}}^2 k_{\text{tr}}^2}{8} \right] \right), \quad (20)$$

где ${}_3F_2$ – обобщенная гипергеометрическая функция, которая в данном случае не зависит от параметров задачи и представляет собой просто численный коэффициент; $I_{0,m}$ – модифицированные функции Бесселя. Заметим, что I_m с помощью рекуррентных формул сводится к комбинации функций I_0 и I_1 .

Окончательно, поперечный форм-фактор (16) примет вид:

$$F_{\text{tr}} = \pi^3 A^2 \sigma_{\text{tr}}^4 e^{-2\mu^2} e^{-\frac{\sigma_{\text{tr}}^2 k_{\text{tr}}^2}{4}} \left| \mu e^{\mu^2} I_0 \left[\frac{\sigma_{\text{tr}}^2 k_{\text{tr}}^2}{8} \right] + e^{-\frac{\sigma_{\text{tr}}^2 k_{\text{tr}}^2}{8}} \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{\mu^{2s} s!}{\Gamma(s+1/2)} \sum_{m=0}^s \frac{(-1)^m (\sigma_{\text{tr}} k_{\text{tr}}/2)^{2m}}{(m!)^2 (s-m)!} + \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{2\mu^{2s+1}}{s!} \times \sum_{m=1}^{+\infty} {}_3F_2 \left(-m, m, \frac{3}{2} + s; 1, \frac{1}{2}; 1 \right) I_m \left[\frac{\sigma_{\text{tr}}^2 k_{\text{tr}}^2}{8} \right] \right|^2. \quad (21)$$

Формула (21) выглядит несколько сложнее формулы (16), однако в ней выделен физически содержательный множитель $\exp[-\sigma_{\text{tr}}^2 k_{\text{tr}}^2/4]$, полезный для качественного понимания поведения решения (например, см. ниже асимптотику при больших частотах на рис. 4а, 5а).

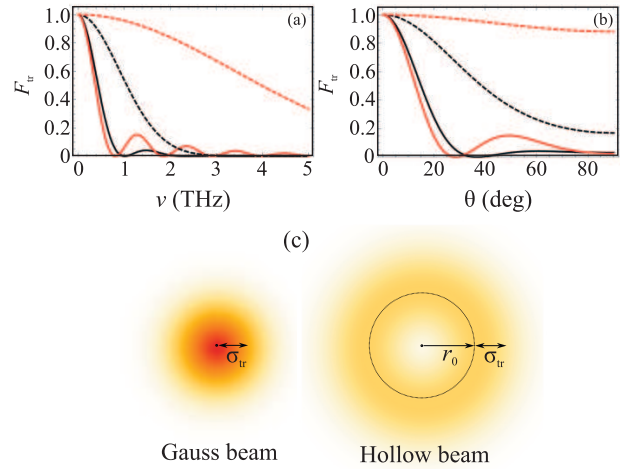


Рис. 4. (Цветной онлайн) Зависимость поперечного форм-фактора: (а) – от частоты излучения при $\theta = 45$ градусов и (б) – от угла наблюдения излучения при $\nu = 1.2 \text{ ТГц}$ для полого пучка (сплошные кривые) и гауссова пучка (пунктирные кривые). Для черной сплошной кривой – $\mu = 2, \sigma_{\text{tr}} = 75 \text{ мкм}$; для красной сплошной кривой – $\mu = 10, \sigma_{\text{tr}} = 20 \text{ мкм}$; для черной пунктирной кривой – $\mu = 0, \sigma_{\text{tr}} = 75 \text{ мкм}$; для красной пунктирной кривой – $\mu = 0, \sigma_{\text{tr}} = 20 \text{ мкм}$. Для всех кривых – $\gamma = 16$. (с) – Визуализация профилей гауссова и полого пучка с одинаковой дисперсией σ_{tr}

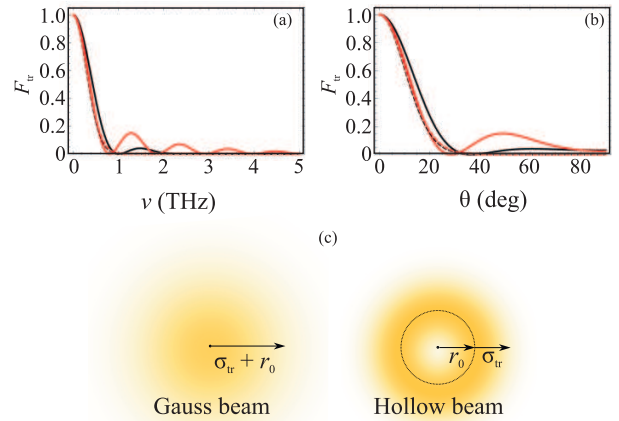


Рис. 5. (Цветной онлайн) То же, что на рис. 4, но для одинакового внешнего радиуса пучков

Введем углы наблюдения излучения θ и ϕ следующим образом:

$$n_x = \cos \theta, \quad n_y = \sin \theta \sin \phi, \quad n_z = \sin \theta \cos \phi. \quad (22)$$

Заметим, что полученный поперечный форм-фактор сгустка зависит от полярного угла наблюдения излучения θ , но не зависит от азимутального угла ϕ . Это связано с симметрией сгустка в поперечном направлении. При нарушении азимутальной

симметрии, например, при учете закрученности траектории электронов внутри пучка, в форм-факторе может появиться зависимость от угла ϕ . Этот случай требует дополнительных расчетов, которые выходят за рамки данной статьи.

Для построения графиков зависимостей форм-фактора (16) от различных переменных необходимо оборвать бесконечные ряды, например, исходя из условия, что при добавлении следующих слагаемых графики перестают меняться. При этом следует учитывать, что достаточное число слагаемых может зависеть от размеров сгустка.

На рисунке 4 приведены графики зависимостей поперечного форм-фактора (16) от частоты $\nu = \omega/(2\pi)$ и полярного угла наблюдения θ (сплошные кривые). Графики приведены для параметров пучков, профили которых изображены на рис. 3. Из графиков видно, что, как и ожидалось, максимальное значение форм-фактора – единица, которая достигается при наименьших углах наблюдения и наименьших частотах излучения. Частотный и угловой диапазоны вблизи нуля, в которых форм-фактор близок к единице, соответствуют полной поперечной (пространственной) когерентности излучения. Эти диапазоны интересны с точки зрения создания источника излучения с высокой интенсивностью, но интерес с точки зрения диагностики электронных сгустков эти диапазоны могут представлять только для измерения продольных размеров. Действительно, в этой области характеристики излучения не зависят от поперечных размеров пучков. Это, с одной стороны, не позволяет измерить поперечный размер пучка, а с другой, убирает лишний фактор (поперечный размер), который заметно усложняет решение обратной задачи о восстановлении продольного размера/профиля пучка по измеренному излучению.

Сравним спектральные и угловые характеристики поперечного форм-фактора для полых пучков и пучков с гауссовым распределением электронов (для краткости ниже будем называть такие пучки гауссовыми).

Сравнение возможно в двух вариантах. Первый: сравнивать полый и гауссов пучок с одинаковыми дисперсиями σ_{tr} , см. рис. 4с. В таком случае поперечное распределение электронов описывается одинаковой формулой (6), в которой для гауссова пучка $r_0 = 0$, для полого пучка $r_0 \neq 0$. Тогда форм-фактор гауссова пучка описывается формулой (17), а форм-фактор полого пучка описывается формулой (16). Результаты сравнения форм-факторов показаны на рис. 4, где пунктирные кривые соответствуют гауссовым пучкам.

Из рисунка 4 видно, что, в отличие от гауссова пучка, форм-фактор полого пучка осциллирует с ростом частоты и полярного угла. Это приводит к выделению набора конкретных частот в полной интенсивности излучения. Такая картина обычно наблюдается в продольном форм-факторе (при временной, т.е. продольной, когерентности) для периодически модулированных пучков [23–25]. Это дает дополнительную возможность монохроматизации спектра за счет модуляции полого пучка, когда совпадают частоты, при которых наблюдаются максимумы продольного и поперечного форм-факторов.

Также, из рис. 4 видно, что область полной пространственной когерентности излучения от полого пучка существенно меньше, чем для гауссова пучка. Это означает, что в тех условиях, когда для гауссова пучка при обработке экспериментальных данных можно пренебречь влиянием поперечных размеров на распределение полной интенсивности по углам и частотам, для полых пучков этого делать нельзя.

Возможен второй вариант сравнения спектральных и угловых характеристик поперечного форм-фактора для полых и гауссовых электронных пучков. В этом случае внешний радиус пучков одинаков, а разница заключается в степени заселенности электронами внутренней части пучка, см. рис. 5с. Математически это означает, что сумма радиуса r_0 и дисперсии σ_{tr} полого пучка равна дисперсии для гауссова пучка σ_{tr}^g : $\sigma_{tr} + r_0 = \sigma_{tr}^g$. Тогда поперечный форм-фактор полого пучка по-прежнему описывается формулой (16), а для гауссова пучка в аргументе экспоненты в формуле (17) появится дополнительный множитель:

$$F_{tr} \rightarrow \exp(-\sigma_{tr}^2 k_{tr}^2 (\mu + 1)^2 / 2). \quad (23)$$

Сравнение приведено на рис. 5. Сплошные кривые для полых пучков точно такие, как на рис. 4. Из графиков рис. 5 видно, что в таком случае области полной пространственной когерентности полого и гауссова пучка становятся практически одинаковыми. Это можно объяснить тем, что одинаковое количество электронов распределено внутри одной и той же области, определяемой внешним радиусом сгустка.

Заселенность внутренней части сгустка/пучка и в этом случае сильно сказывается на поведении форм-фактора при больших частотах и углах наблюдения: для полого пучка есть осцилляции, для гауссова – их нет.

4. Заключение. Выше мы показали, что для полых пучков важную роль играет поперечный форм-фактор, который определяется поперечным размером пучка. Это может быть важно для генерации

рентгеновских фотонов в рентгеновских лазерах на свободных электронах и синхротронах, включая генерацию излучения электронными пучками, несущими угловой орбитальный момент. Результаты особенно важны ввиду того, что для обычных (не полых) электронных пучков значение поперечного форм-фактора часто мало отличается от единицы, так что влиянием поперечных размеров пучка пренебрегают.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, грант # 21-72-00113 (ДС, части 3, 4), и, частично, при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, проект # FZWG-2020-0032 (2019-1569) в конкурсной части госзадания по созданию и развитию лабораторий (АТ, части 1, 2).

1. G. Stancari, A. Valishev, G. Annala, G. Kuznetsov, V. Shiltsev, D. A. Still, and L. G. Vorobiev, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 084802 (2011).
2. S. Redaelli, R. B. Appleby, R. Bruce, O. Brüning, A. Kolehmainen, G. Ferlin, A. Foussat, M. Giovannozzi, P. Hermes, D. Mirarchi, D. Perini, A. Rossi, and G. Stancari, *J. Instrum.* **16**, P03042 (2021).
3. X. Gu, W. Fischer, Z. Altinbas et al. (Collaboration), *Phys. Rev. Accel. Beams* **23**, 031001 (2020).
4. A. Salehilashkajani, H. D. Zhang, M. Ady et al. (Collaboration), *Appl. Phys. Lett.* **120**, 174101 (2022).
5. C. Behrens, C. Gerth, G. Kube, B. Schmidt, S. Wesch, and M. Yan, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **15**, 062801 (2012).
6. L. G. Sukhikh, G. Kube, S. Bajt, W. Lauth, Yu. A. Popov, and A. P. Potylitsyn, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **17**, 112805 (2014).
7. A. Potylitsyn, L. Sukhikh, T. Gusvitskii, G. Kube, and A. Novokshonov, *Phys. Rev. Accel. Beams* **23**, 042804 (2020).
8. N. Jain, *Phys. Plasmas* **26**, 023107 (2019).
9. J. Vieira and J. T. Mendonca, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 215001 (2014).
10. N. Jain, T. M. Jr. Antonsen, and J. P. Palastro, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 195001 (2015).
11. I. P. Ivanov and D. V. Karlovets, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 264801 (2013).
12. S. S. Baturin, D. V. Grosman, G. K. Sizykh, and D. V. Karlovets, *Phys. Rev. A* **106**, 042211 (2022).
13. D. Yu. Sergeeva, A. A. Tishchenko, and M. N. Strikhanov, *Nucl. Instrum. Methods B* **309**, 189 (2013).
14. A. A. Tishchenko and D. Yu. Sergeeva, *JETP Lett.* **110**, 638 (2019).
15. Y. Shibata, S. Hasebe, K. Ishi, S. Ono, M. Ikezawa, T. Nakazato, M. Oyamada, S. Urasawa, T. Takahashi, T. Matsuyama, K. Kobayashi, and Y. Fujita, *Phys. Rev. E* **57**, 1061 (1998).
16. Y. Shibata, T. Takahashi, T. Kanai, K. Ishi, and M. Ikezawa, *Phys. Rev. E* **50**, 1479 (1994).
17. G. P. Williams, C. J. Hirschmugl, E. M. Kneeder, P. Z. Takacs, M. Shleifer, Y. J. Chabal, and F. M. Hoffmann, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 261 (1989).
18. D. Yu. Sergeeva and A. A. Tishchenko, *JETP Lett.* **115**, 713 (2022).
19. J. S. Nodvick and D. S. Saxon, *Phys. Rev.* **96**, 180 (1954).
20. Г. М. Гарибян, Я. Ши, *Рентгеновское переходное излучение*, Изд-во АН АрмССР, Ереван (1983).
21. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, 4-е изд., Государственное издательство физико-математической литературы, М. (1963.)
22. Y. Luke, *Math. Comput.* **13**, 261 (1959).
23. D. Y. Sergeeva, A. P. Potylitsyn, A. A. Tishchenko, and M. N. Strikhanov, *Opt. Express* **25**, 26310 (2017).
24. G. A. Naumenko, A. P. Potylitsyn, D. Yu. Sergeeva, A. A. Tishchenko, M. N. Strikhanov, and V. V. Bleko, *JETP Lett.* **105**, 553 (2017).
25. G. A. Naumenko, A. P. Potylitsyn, P. V. Karataev, M. A. Shipulya, and V. V. Bleko, *JETP Lett.* **106**, 127 (2017).