

Изучение уравнения состояния вращающейся глюонной плазмы с помощью решеточного моделирования

В. В. Брагута^(ID+1), И. Е. Кудров^(ID**×1), А. А. Роенко^(ID+o1), Д. А. Сычев^(ID+*1), М. Н. Чернодуб^(ID∇1)

⁺Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова,
Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Россия

*Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия

[×]Институт физики высоких энергий им. А. А. Логунова,
Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, 142281 Протвино, Россия

^oГосударственный университет “Дубна”, 141980 Дубна, Россия

[∇]Institut Denis Poisson UMR 7013, Université de Tours, 37200 Tours, France

Поступила в редакцию 20 марта 2023 г.

После переработки 26 марта 2023 г.

Принята к публикации 26 марта 2023 г.

В этой работе проведено изучение влияния вращения с постоянной угловой скоростью на уравнение состояния глюодинамики методами решеточного моделирования. Для этого мы переходим в систему отсчета, которая вращается вместе с исследуемой системой, где вращение сводится к появлению внешнего гравитационного поля. При достаточно медленном вращении свободная энергия исследуемой системы может быть разложена в ряд по угловой скорости. Методами решеточного моделирования мы вычисляем связанный с моментом инерции квадратичный коэффициент этого разложения, определяем его зависимость от температуры и размеров исследуемой системы. Наши результаты указывают, что момент инерции глюодинамики отрицателен вплоть до температуры $T^* \sim 1.5T_c$, а при температурах $T > T^*$ момент инерции становится положительным, где T_c – критическая температура фазового перехода конфайнмент/деконфайнмент. Мы считаем, что отрицательный момент инерции означает термодинамическую нестабильность глюонной плазмы по отношению к вращению с постоянной угловой скоростью.

DOI: 10.31857/S1234567823090021, EDN: bobjib

Введение. Эксперименты по соударению тяжелых ионов позволяют исследовать влияние экстремальных условий на свойства сильно взаимодействующей кварк-глюонной плазмы (КГП). К таким условиям можно отнести высокую температуру, сильные электромагнитные поля, значительную барионную плотность и др. Среди экстремальных условий, воздействию которых подвергается КГП, особый интерес представляет быстрое вращение. Экспериментальные результаты для поляризации Λ , $\bar{\Lambda}$ гиперонов дают следующую оценку средней завихренности образовавшейся КГП $\omega = (9 \pm 1) \cdot 10^{21} \text{ с}^{-1}$ [1]. Такое большое значение угловой скорости приводит к релятивистскому вращению, что может существенным образом повлиять на свойства КГП.

Существует множество теоретических работ, целью которых является изучение влияния реляти-

вистского вращения на свойства теории сильного взаимодействия – КХД. Эти исследования выполнены с использованием различных моделей, включая модель Намбу–Йона–Лазино [2–9], модель адронного резонансного газа [10], голографического подхода к КХД [11–14] и других методов [15–17]. Несмотря на интересные результаты, полученные в этих работах, аналитические методы изучения КХД обладают серьезными недостатками, связанными с тем, что КХД – чрезвычайно сложная теория, аналитическое изучение которой без дополнительных предположений в настоящее время невозможно. В свою очередь, дополнительные предположения приводят к неконтролируемым систематическим ошибкам в результатах. Поэтому сложно оценить, насколько достоверны полученные предсказания.

Указанная выше проблема отсутствует, если результаты получены в рамках решеточного моделирования КХД. Этот метод позволяет проводить изучение свойств КХД, основываясь на первопринципах квантовой теории поля, при этом контролируя

¹e-mail: vvbraguta@theor.jinr.ru; ilyakudrov@yandex.ru; roenko@theor.jinr.ru; sychev.da@phystech.edu; maxim.chernodub@univ-tours.fr

ошибки таких вычислений. В этой статье будет использован именно такой метод для изучения глюодинамики. Отметим, что первая работа по изучению свойств вращающейся КХД была представлена в статье [18]. Позже, используя метод решеточного моделирования, было исследовано влияние вращения на термодинамические свойства глюодинамики [19–21] и КХД [22, 23].

Наша работа посвящена изучению влияния вращения на свойства КХД методом решеточного моделирования. В частности, будет изучен вопрос, каким образом вращение влияет на уравнение состояния глюодинамики. Для этого мы вычислим первую ненулевую поправку по угловой скорости к свободной энергии изучаемой системы. Стоит упомянуть, что уравнение состояния глюодинамики и КХД, а также влияние на него различных экстремальных условий, интенсивно изучалось в рамках решеточного моделирования (см., например, [24–28]). Уравнение состояния вращающейся глюодинамики ранее изучалось в работе [29]. В нашей работе будет проведено аналогичное исследование, но с использованием другого способа вычислений.

Решеточное моделирование вращающейся глюодинамики. В этом разделе мы кратко опишем, как проводится изучение вращающейся глюодинамики методами решеточного моделирования, а также выведем формулы, необходимые для проведения вычислений. Более детальное описание этого подхода можно найти в работах [19, 20].

Мы переходим во вращающуюся вместе с изучаемой “средой” систему отсчета и вычисляем методами Монте-Карло статистическую сумму равновесной системы. В нашей статье предполагается, что система вращается вокруг оси z . В этой системе отсчета вращение проявляется в виде внешнего гравитационного поля, которое задается известным метрическим тензором

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - r^2\Omega^2 & \Omega y & -\Omega x & 0 \\ \Omega y & -1 & 0 & 0 \\ -\Omega x & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние до оси вращения.

Статистическая сумма глюодинамики, находящейся во внешнем гравитационном поле, в непрерывном пространстве может быть записана в виде интеграла по глюонным степеням свободы [18–20]:

$$Z = \int DA \exp(-S_G), \quad (2)$$

где Евклидово действие глюонного поля во внешнем гравитационном поле

$$S_G = \frac{1}{2g_{YM}^2} \int d^4x \sqrt{g_E} g_E^{\mu\nu} g_E^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha}^a F_{\nu\beta}^a \quad (3)$$

зависит от метрического тензора в Евклидовом пространстве $(g_E)_{\mu\nu}$, который может быть получен из (1) с помощью операции Виковского поворота $t \rightarrow i\tau$. Как и в статистической сумме без гравитации, Евклидово время τ изменяется в диапазоне $\tau \in (0, \beta)$, а на глюонные поля наложены периодические граничные условия в Евклидовом времени $A_\mu^a(0, \mathbf{x}) = A_\mu^a(\beta, \mathbf{x})$. В наших формулах греческие буквы отвечают Лоренцевым индексам, а латинские – цветовым.

Подставляя метрический тензор $(g_E)_{\mu\nu}$ в формулу (3), получаем следующее выражение для действия

$$S_G = \frac{1}{2g_{YM}^2} \int d^4x \text{Tr} [(1 - r^2\Omega^2) F_{xy}^a F_{xy}^a + (1 - y^2\Omega^2) F_{xz}^a F_{xz}^a + (1 - x^2\Omega^2) F_{yz}^a F_{yz}^a + F_{x\tau}^a F_{x\tau}^a + F_{y\tau}^a F_{y\tau}^a + F_{z\tau}^a F_{z\tau}^a - 2iy\Omega(F_{xy}^a F_{y\tau}^a + F_{xz}^a F_{z\tau}^a) + 2ix\Omega(F_{yx}^a F_{x\tau}^a + F_{yz}^a F_{z\tau}^a) - 2xy\Omega^2 F_{xz}^a F_{zy}^a]. \quad (4)$$

Из этой формулы видно, что действие является комплексной величиной, что приводит к проблеме знака. К сожалению, прямое Монте-Карло моделирование таких систем в настоящее время невозможно. Для преодоления этой проблемы можно применить метод, который основан на моделировании системы при мнимой угловой скорости [18, 20–29]. Отметим, что этот метод был использован при изучении уравнения состояния глюодинамики в работе [29]. В нашей работе используется другой подход. Ниже будет показано, что свободную энергию можно разложить в ряд по угловой скорости. Коэффициенты этого разложения являются некоторыми операторами глюонных полей, которые можно вычислить с помощью моделирования системы без вращения. Таким образом, проблемы знака в таком подходе не возникает.

Дискретизация действия (4) с мнимой угловой скоростью проводится аналогично тому, как это сделано в работах [18–20]. В нашей работе мы не показываем явный вид выражения для решеточного действия вследствие его громоздкости. Как было указано выше, для вычисления поправок к свободной энергии по угловой скорости достаточно провести решеточное моделирование невращающейся системы. Для этого мы используем улучшенную на древесном уровне действие Симанчика [30, 31].

При моделировании вращающихся систем особую важность приобретают граничные условия. В наших вычислениях мы накладываем периодические граничные условия в направлениях τ и z . Что же касается граничных условий в направлениях, перпендикулярных к оси вращения, то здесь возможно несколько вариантов: периодические граничные условия, открытые граничные условия и условия Дирихле. Детальное исследование различных граничных условий и их влияния на наблюдаемые было проведено в работе [20]. Вычисления показали, что зависимость различных наблюдаемых от граничных условий несущественна. Это связано с тем, что граничные условия экранируются и их влияние не распространяется на объем исследуемой системы. В данной работе мы используем периодические граничные условия, которые обычно используются при решеточном моделировании калибровочных теорий поля (глюодинамики) без вращения.

Основной целью нашей работы является изучение влияния вращения на уравнение состояния, которое может быть найдено, если известна свободная энергия изучаемой системы F . Поэтому в нашей работе будет проведено изучение влияния вращения на свободную энергию глюодинамики. Для этого мы раскладываем свободную энергию в ряд по угловой скорости

$$F = F_0 - \frac{\Omega^2}{2} F_2 + O(\Omega^4) \quad (5)$$

где F_0 – свободная энергия глюодинамики без вращения, а F_2 – следующий коэффициент разложения. Отметим, что свободная энергия глюодинамики F_0 хорошо изучена (см., например, [24]), а коэффициент F_2 будет вычислен в нашей работе. Свободная энергия может быть разложена и дальше, однако, к сожалению, из-за быстрого роста статистических ошибок вычислений с размером системы, который обусловлен структурой изучаемых операторов, в этой работе мы ограничимся изучением только второго коэффициента разложения. Ниже, помимо F_0 и F_2 , будут использоваться удельные величины $f_0 = F_0/V$ и $f_2 = F_2/V$, где V – объем исследуемой системы.

Для того, чтобы найти выражение F_2 , заметим, что действие (4) можно представить в виде:

$$S_G = S_0 + \Omega S_1 + \frac{\Omega^2}{2} S_2, \quad (6)$$

$$S_1 = \frac{i}{g_{YM}^2} \int d^4x [x F_{yx}^a F_{x\tau}^a + x F_{yz}^a F_{z\tau}^a - y F_{xy}^a F_{y\tau}^a - y F_{xz}^a F_{z\tau}^a], \quad (7)$$

$$S_2 = -\frac{1}{g_{YM}^2} \int d^4x [r^2 (F_{xy}^a)^2 + y^2 (F_{xz}^a)^2 + x^2 (F_{yz}^a)^2 + 2xy F_{xz}^a F_{zy}^a], \quad (8)$$

где S_0 – действие глюонного поля без вращения. Используя эти формулы, выражение для коэффициента F_2 может быть записано в виде:

$$F_2 = T \frac{\partial^2 \log Z}{\partial \Omega^2} \Big|_{\Omega=0} = T (\langle S_2 \rangle_T - \langle S_1^2 \rangle_T), \quad (9)$$

где обозначение $\langle \mathcal{O} \rangle_T = \langle \mathcal{O} \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle_{T=0}$ соответствует вкладу тепловых флуктуаций в среднее значение оператора \mathcal{O} .

Отметим, что первый член $T \langle S_2 \rangle_T$ в этой формуле соответствует среднему квадрату хромагнитного поля в исследуемой среде, а второй член $-T \langle S_1^2 \rangle_T$ учитывает флуктуации углового момента глюонного поля (здесь учтено, что $\langle S_1 \rangle_T|_{\Omega=0} = 0$).

Для вычисления коэффициента F_2 по формуле (9) достаточно провести решеточное моделирование глюодинамики без вращения. Поэтому, как мы уже замечали, проблемы знака в наших вычислениях не возникает. Отметим, что в работе [29] изучалась зависимость свободной энергии от угловой скорости другим методом. При этом вычисление было проведено путем решеточного моделирования глюодинамики, которая вращается с мнимой угловой скоростью. Для исследования свободной энергии была посчитана производная статистической суммы по обратной константе связи $1/g_{YM}^2$. Эта производная связана со средним значением действия глюонного поля $\langle S_G \rangle_T$ (4). Зная производную свободной энергии, путем интегрирования по обратной константе связи была вычислена свободная энергия.

Обычно при изучении уравнения состояния проводится вычитание соответствующего оператора при $T = 0$. Аналогично, при вычислении коэффициента F_2 при конечной температуре в выражении (9) проведено вычитание при нулевой температуре. Физически эта процедура означает, что вакуум глюодинамики при $T = 0$ не вращается.

Формулы (6), (9) позволяют найти разложение свободной энергии по угловой скорости для непрерывной теории. Нетрудно найти решеточную версию этих формул. Для этого заметим, что решеточное выражение для действия во вращающейся системе отсчета может быть представлено в виде разложения (6). Явный вид решеточных операторов S_1 и S_2 можно найти в работе [20]. Здесь мы их не приводим ввиду их громоздкости. Решеточная формула (9) для коэффициента разложения F_2 имеет такой же вид, подразумевая решеточные выражения для операторов S_1 и S_2 .

Коэффициент разложения F_2 связан с моментом инерции системы. Это можно увидеть, если воспользоваться формулой

$$I = \frac{M}{\Omega} = -\frac{1}{\Omega} \frac{\partial F}{\partial \Omega} = F_2, \quad (10)$$

где M – угловой момент системы. Далее воспользуемся нерелятивистским выражением для момента инерции, чтобы оценить зависимость коэффициента F_2 от объема исследуемой системы:

$$\begin{aligned} I &= \int dV r^2 \rho(T, x, \Omega) = \frac{1}{6} \rho_0(T) L_z L_s^4 = \\ &= \frac{1}{6} \rho_0(T) V L_s^2, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\rho(T, x, \Omega)$ – массовая плотность в исследуемой системе, которая имеет геометрию параллелепипеда с размерами $L_s \times L_s \times L_z$, а $V = L_z L_s^2$ – объем исследуемой системы. Ось вращения проходит через центр параллелепипеда и направлена вдоль оси z . Во втором равенстве было учтено, что в лидирующем приближении плотность не зависит от угловой скорости и координат, т.е. задается некоторой функцией $\rho_0(T)$, которая зависит только от температуры.

Выражение (11) позволяет переписать разложение (5) в более удобном для анализа результатов виде

$$F = F_0 \left(1 + \frac{1}{2} K_2 v^2 \right), \quad (12)$$

где введены следующие обозначения: коэффициент $K_2 = -4F_2/(F_0 L_s^2)$, а $v = \Omega L_s/2$ – скорость вращения на границе исследуемой системы (а именно, в центре боковой грани на расстоянии $L_s/2$ от оси вращения). В последнем выражении мы перешли от коэффициента F_2 к коэффициенту K_2 , так как этот коэффициент безразмерен и, как следует из формулы (11), для достаточно большой системы не должен зависеть от ее объема. В следующем разделе мы проверим это утверждение. Отметим также, что F_0 и F_2 зависят от граничных условий, однако, как показывают наши вычисления, в отношении F_2/F_0 эта зависимость в пределах ошибки сокращается.

Результаты вычислений и обсуждение. В этом разделе будет проведено вычисление коэффициента K_2 методами решеточного моделирования. Ниже будут использоваться следующие обозначения для размеров решеток: $N_t \times N_z \times N_s^2$ ($N_s = N_x = N_y$). Для взятия непрерывного предела $1/N_t \rightarrow 0$ (шаг решетки $a \rightarrow 0$) проведено моделирование на решетках $4 \times 16 \times 21^2$, $5 \times 20 \times 25^2$, $6 \times 24 \times 31^2$. Указанные размеры решеток были выбраны так, чтобы

при вариации N_t приблизительно сохранялись величины $N_s/N_t = L_s T$, $N_z/N_t = L_z T$, где $L_z = N_z a$, $L_s = N_s a$, $1/T = N_t a$. Размер решетки в направлениях x, y выбран таким образом, чтобы при вычислении операторов (7), (8) ось вращения проходила через узел решетки и соответствующие решеточные операторы обладали симметрией относительно этой оси. Как было сказано выше, для вычисления коэффициента F_2 при конечной температуре проводится вычитание этого же коэффициента при нулевой температуре. В этой процедуре мы используем решетки с теми же пространственными размерами, но с $N_t = N_z$.

На рисунке 1 представлено отношение $f_2/(T^4 L_s^2)$ как функция температуры для решеток с разным количеством шагов по времени N_t . На графике T_c – критическая температура перехода конфайнмент/деконфайнмент в глюодинамике без вращения.

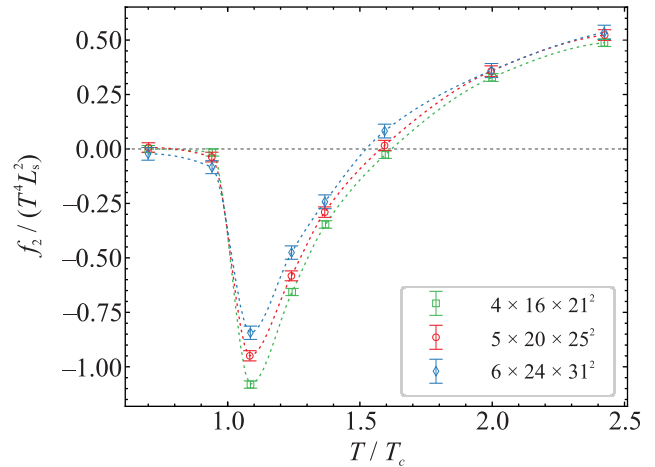


Рис. 1. (Цветной онлайн) Отношение $f_2/(T^4 L_s^2)$ как функция температуры для решеток с разным количеством шагов по времени N_t . T_c обозначает критическую температуру перехода конфайнмент/деконфайнмент в глюодинамике без вращения

Для изучения зависимости наших результатов от размера системы мы провели вычисление отношения $f_2/(T^4 L_s^2)$ на решетках $5 \times 16 \times 25^2$, $5 \times 24 \times 25^2$, $5 \times 20 \times 21^2$, $5 \times 20 \times 31^2$. На рисунке 2 представлено отношение $f_2/(T^4 L_s^2)$ как функция температуры для решеток с разным пространственным объемом в xy - и z -направлениях. Из этого графика видно, что зависимость отношения $f_2/(T^4 L_s^2)$ от размеров системы L_s и L_z слаба, что подтверждает оценку, сделанную в формуле (11).

Для вычисления коэффициента K_2 на решетках $4 \times 16 \times 21^2$, $5 \times 20 \times 25^2$, $6 \times 24 \times 31^2$ мы вычислили F_0 и F_2 . Затем были построены отношения

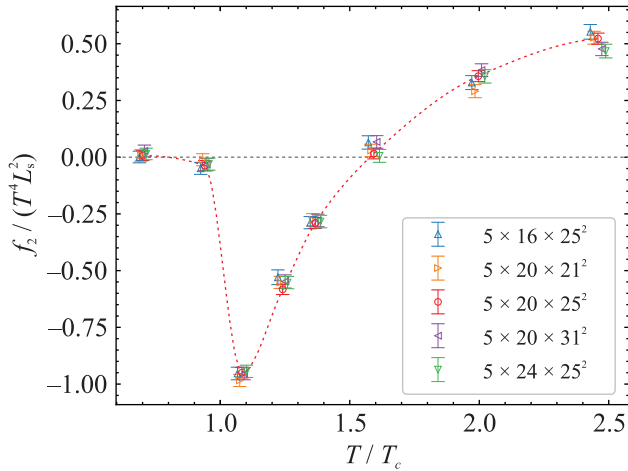


Рис. 2. (Цветной онлайн) Отношение $f_2/(T^4 L_s^2)$ как функция температуры для решеток с разным пространственным объемом в xy - и z -направлениях

$K_2 = -4F_2/(F_0 L_s^2)$, для которых взят непрерывный предел $1/N_t \rightarrow 0$. На рисунке 3 представлен коэффициент K_2 как функция температуры для решеток с различными значениями N_t . Непрерывный предел $1/N_t \rightarrow 0$ показан на рисунке точками в форме звездочек. Результаты непрерывного предела аппроксимированы сплайном. Отметим, что на рис. 3 показан диапазон температур $T > T_c$. Это связано с тем, что при $T < T_c$ значение F_0 близко к нулю, при этом ошибки вычислений значительно возрастают. Поэтому график для коэффициента K_2 ниже критической температуры становится неинформативным. Рисунок 3 является главным результатом нашей работы.

Отметим, что коэффициент K_2 был посчитан в работе [29]. При этом вычисление проводилось методом, который отличается от подхода, использованного в этой работе. Напомним, что в этой работе проведено решеточное моделирование глюодинамики без вращения, и вычисляется непосредственно первая ненулевая поправка к свободной энергии по угловой скорости. В то время как в работе [29] моделируется вращающаяся глюодинамика, вычисляется свободная энергия для различных скоростей вращения, и только в конце вычислений проводится разложение по (мнимой) угловой скорости, после чего результаты аналитически продолжают в область действительных значений Ω . Сравнение показывает, что оба описанных метода дают результаты, которые согласуются между собой.

Как видно из рис. 3, коэффициент K_2 отрицателен для температур $T < T^*$ и становится положительным при $T > T^*$, где $T^* \sim 1.5T_c$. Соглас-

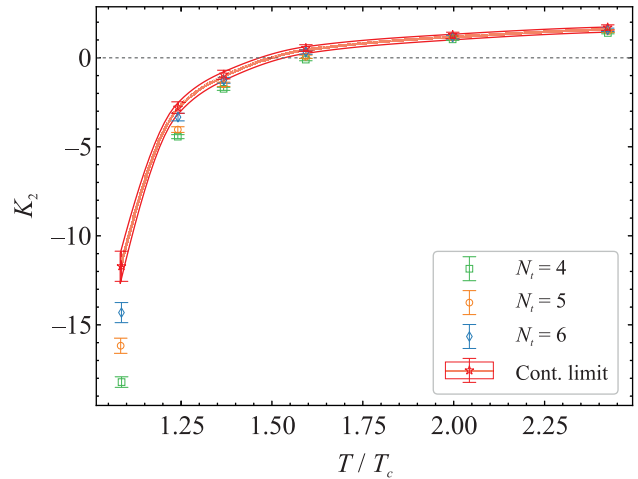


Рис. 3. (Цветной онлайн) Коэффициент K_2 как функция температуры для решеток с различными значениями N_t . Непрерывный предел $1/N_t \rightarrow 0$ показан на рисунке точками в форме звездочек. Результаты непрерывного предела аппроксимированы сплайном

но формуле (10), этот коэффициент связан с моментом инерции исследуемой системы по формуле $I = -K_2 F_0 L_s^2 / 4$. Учитывая тот факт, что $f_0 = -p < 0$, рис. 3 означает, что момент инерции глюодинамики отрицателен вплоть до температуры $T^* \sim 1.5T_c$ и только выше этой температуры становится положительным. Мы предполагаем, что отрицательный момент инерции означает термодинамическую неустойчивость глюонной плазмы по отношению к вращению с постоянной угловой скоростью²⁾. Таким образом, возможно термодинамически равновесное вращение плазмы с постоянной угловой скоростью при температуре выше T^* . При температуре ниже T^* термодинамически стабильным является более сложное движение глюонной плазмы, например, при котором угловая скорость вращения зависит от координат. Однако для понимания физических механизмов этой неустойчивости требуются дополнительные исследования.

Чтобы понять причину возникновения отрицательного момента инерции, рассмотрим формулу (9). Из нее видно, что выражение для F_2 является суммой двух операторов. Первый оператор $\sim \langle\langle S_2 \rangle\rangle_T$ связан с квадратом хромагнитного поля в глюодинамике, который входит в важную физическую величину — глюонный конденсат $\sim \langle\langle (G_{\mu\nu}^a)^2 \rangle\rangle_T \sim \langle\langle (\mathbf{E}^a)^2 \rangle\rangle_T + \langle\langle (\mathbf{H}^a)^2 \rangle\rangle_T$. В глюодинамике этот опера-

²⁾ Стоит упомянуть, что отрицательный момент инерции может быть реализован в некоторых системах [32–34], а термодинамическая неустойчивость, связанная с вращением, реализуется во вращающихся черных дырах [35–37].

тор определяет энергию вакуума при $T = 0$ и нарушение масштабной инвариантности. При увеличении температуры магнитная компонента глюонного конденсата уменьшается от своего значения при $T = 0$, достигает некоторого минимального значения, после чего начинает расти [24]. Вклад тепловых флуктуаций в среднее этого оператора, пропорциональный $\langle\langle(\mathbf{H}^a)^2\rangle\rangle_T$, который и входит в формулу (9), является отрицательным при $T > 0$ и только при температурах выше $T \sim 2T_c$ становится положительным [24]. Второй оператор $\sim \langle\langle S_1^2\rangle\rangle_T$, который связан с флуктуацией углового момента, дает положительный вклад в момент инерции и незначительно смещает его значение в положительную сторону. Таким образом, отрицательный момент инерции глюодинамики в области температур $T < T^*$ объясняется вкладом магнитной компоненты масштабной аномалии.

Как следует из формулы (12) и данных для $K_2(T)$, в окрестности перехода конфайнмент/деконфайнмент вращение уменьшает свободную энергию глюодинамики. Поэтому можно ожидать, что при $\Omega \neq 0$ необходимо дополнительно “нагреть” исследуемую систему, чтобы произошел этот фазовый переход. Более того, чем больше угловая скорость, тем больший разогрев системы требуется. Это простое рассуждение позволяет заключить, что при вращении критическая температура перехода конфайнмент/деконфайнмент должна повышаться и большей угловой скорости должна соответствовать большая критическая температура. Таким образом, результат, полученный в этой работе, находится в качественном согласии с результатами, полученными ранее в работах [19, 20].

Авторы благодарят О. В. Теряева за полезные обсуждения результатов работы. Работа была выполнена с использованием оборудования центра коллективного пользования “Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса” НИЦ “Курчатовский институт”, <http://скр.nrcki.ru/>. Также авторы использовали суперкомпьютер ОИЯИ “Говорун”.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда # 23-12-00072, <https://rscf.ru/project/23-12-00072/>.

1. L. Adamczyk, J. K. Adkins, G. Agakishiev, et al. (STAR), *Nature* **548**, 62 (2017); arXiv:1701.06657 [nucl-ex].
2. S. Ebihara, K. Fukushima, and K. Mameda, *Phys. Lett. B* **764**, 94 (2017); arXiv:1608.00336 [hep-ph].
3. M. Chernodub and S. Gongyo, *JHEP* **01**, 136 (2017); arXiv:1611.02598 [hep-th].

4. Y. Jiang and J. Liao, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 192302 (2016); arXiv:1606.03808 [hep-ph].
5. H. Zhang, D. Hou, and J. Liao, *Chin. Phys. C* **44**, 111001 (2020); arXiv:1812.11787 [hep-ph].
6. X. Wang, M. Wei, Z. Li, and M. Huang, *Phys. Rev. D* **99**, 016018 (2019); arXiv:1808.01931 [hep-ph].
7. M. N. Chernodub, *Phys. Rev. D* **103**, 054027 (2021); arXiv:2012.04924 [hep-ph].
8. X. Chen, L. Zhang, D. Li, D. Hou, and M. Huang, *JHEP* **07**, 132 (2021); arXiv:2010.14478 [hep-ph].
9. N. Sadooghi, S. M. A. Tabatabaee Mehr, and F. Taghinavaz, *Phys. Rev. D* **104**, 116022 (2021); arXiv:2108.12760 [hep-ph].
10. Y. Fujimoto, K. Fukushima, and Y. Hidaka, *Phys. Lett. B* **816**, 136184 (2021); arXiv:2101.09173 [hep-ph].
11. A. A. Golubtsova, E. Gourgoulhon, and M. K. Usova, *Nucl. Phys. B* **979**, 115786 (2022); arXiv:2107.11672 [hep-th].
12. Y.-Q. Zhao, S. He, D. Hou, L. Li, and Z. Li (2022), arXiv:2212.14662 [hep-ph].
13. A. A. Golubtsova and N. S. Tsegel'nik (2022), arXiv:2211.11722 [hep-th].
14. N. R. F. Braga, L. F. Ferreira, and O. C. Junqueira (2023), arXiv:2301.01322 [hep-th].
15. M. N. Chernodub (2022), arXiv:2210.05651 [quant-ph].
16. M. N. Chernodub, (2022), arXiv:2208.04808 [hep-th].
17. S. Chen, K. Fukushima, and Y. Shimada, *Phys. Rev. Lett.* **129**, 242002 (2022); arXiv:2207.12665 [hep-ph].
18. A. Yamamoto and Y. Hirono, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 081601 (2013); arXiv:1303.6292 [hep-lat].
19. V. V. Braguta, A. Y. Kotov, D. D. Kuznetsov, and A. A. Roenko, *JETP Lett.* **112**, 6 (2020).
20. V. V. Braguta, A. Y. Kotov, D. D. Kuznetsov, and A. A. Roenko, *Phys. Rev. D* **103**, 094515 (2021); arXiv:2102.05084 [hep-lat].
21. M. N. Chernodub, V. A. Goy, and A. V. Molochkov, (2022), arXiv:2209.15534 [hep-lat].
22. V. V. Braguta, A. Kotov, A. Roenko, and D. Sychev, *PoS LATTICE2022*, 190 (2023); arXiv:2212.03224 [hep-lat].
23. V. Braguta, A. Y. Kotov, D. Kuznetsov, and A. Roenko, *PoS LATTICE2021*, 125 (2022); arXiv:2110.12302 [hep-lat].
24. G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Lutgemeier, and B. Petersson, *Nucl. Phys. B* **469**, 419 (1996); arXiv:heplat/9602007.
25. C. Bonati, M. D'Elia, M. Mariti, F. Negro, and F. Sanfilippo, *Phys. Rev. D* **89**, 054506 (2014); arXiv:1310.8656 [hep-lat].
26. A. Bazavov, T. Bhattacharya, C. DeTar et al. (HotQCD), *Phys. Rev. D* **90**, 094503 (2014); arXiv:1407.6387 [hep-lat].
27. S. Borsányi, Z. Fodor, C. Hoelbling, S. D. Katz, S. Krieg, and K. K. Szabó, *Phys. Lett. B* **730**, 99 (2014).

28. J. N. Guenther, R. Bellwied, S. Borsanyi, Z. Fodor, S. D. Katz, A. Pasztor, C. Ratti, and K. K. Szabó, Nucl. Phys. A **967**, 720 (2017); arXiv:1607.02493 [hep-lat].
29. V. V. Braguta, M. N. Chernodub, A. A. Roenko, and D. A. Sychev (2023), arXiv:2303.03147 [hep-lat].
30. G. Curci, P. Menotti, and G. Paffuti, Phys. Lett. B **130**, 205 (1983).
31. M. Lüscher and P. Weisz, Phys. Lett. B **158**, 250 (1985).
32. J. Lončar, B. Igrac, and D. Babić, Symmetry **14**, 529 (2022).
33. M. N. Chernodub, Phys. Rev. D **87**, 025021 (2013); arXiv:1207.3052 [quant-ph].
34. A. Flachi and M. Edmonds, Phys. Rev. D **107**, 025008 (2023); arXiv:2212.02776 [hep-th].
35. B. F. Whiting and J. W. York, Jr., Phys. Rev. Lett. **61**, 1336 (1988).
36. T. Prestidge, Phys. Rev. D **61**, 084002 (2000); 10.1103/physrevd.61.084002.
37. H. S. Reall, Phys. Rev. D **64**, 044005 (2001); 10.1103/physrevd.64.044005.