

Энергетический спектр β -электронов в безнейтринном двойном β -распаде с учетом возбуждения электронной оболочки атомов

М. И. Криворученко¹⁾, К. С. Тырин⁺, Ф. Ф. Карпешин^{*}

⁺Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

^{*}Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии имени Д. И. Менделеева (ВНИИМ), 190005 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 29 апреля 2023 г.

После переработки 5 мая 2023 г.

Принята к публикации 5 мая 2023 г.

В двойном β -распаде электронная оболочка дочернего атома с высокой вероятностью оказывается в возбужденном состоянии, в результате чего энергия, уносимая β -электронами, испытывает сдвиг в сторону меньших величин. В модели Томаса–Ферми и в релятивистском формализме Дирака–Хартри–Фока найдены среднее значение и дисперсия энергии возбуждения электронной оболочки дочернего атома в двойном β -распаде германия ${}^{76}_{32}\text{Ge} \rightarrow {}^{76}_{34}\text{Se}^* + 2\beta^- (+ 2\nu\bar{\nu}_e)$. На основании полученных оценок построена двух-параметрическая модель энергетического спектра β -электронов в безнейтринной моде, учитывающая перераспределение энергии реакции между продуктами распада. С вероятностью 90 % сдвиг суммарной энергии β -электронов не превышает 50 эВ. Средняя энергия возбуждения, однако, на порядок выше и равна ~ 400 эВ, в то время как корень из дисперсии равен ~ 2900 эВ, что объясняется, по-видимому, значительным вкладом внутренних электронных уровней в энергетические характеристики процесса. Искажение формы пика $0\nu 2\beta$ -распада необходимо учитывать при анализе данных детекторов с разрешением ~ 100 эВ или выше.

DOI: 10.31857/S1234567823120029, EDN: eutano

В поисках физики за пределами Стандартной Модели (СМ) нейтрино занимают выделенное место. Исследование β -процессов, чувствительных к смешиванию, массе и природе нейтрино (дираковская/майорановская), является перспективным направлением в поиске обобщений СМ [1].

Экспериментальное наблюдение безнейтринного двойного β -распада ($0\nu 2\beta$) однозначно доказало бы существование майорановской массы нейтрино и значительно сузило бы спектр возможностей для обобщения СМ. $0\nu 2\beta$ распад регистрируется по узкому пику при кинетической энергии β -электронов, T , равной энергии распада Q . В β -процессах каналы с электронной оболочкой дочернего атома в основном состоянии не обязательно являются доминирующими [2, 3], что приводит, например, к заметному увеличению вероятности безнейтринного двойного захвата электронов [4–6]. Возбуждения электронной оболочки атомов, так же, как химический сдвиг атомных уровней [7], зависящий от агрегатного состояния вещества, приводят к модификации энергетического спектра, в том числе к размытию и сдвигу $0\nu 2\beta$ пика. Пик при $T = Q$ используется в качестве ин-

дикатора $0\nu 2\beta$ распада, его поиски ведутся коллаборациями CUORE [8], EXO [9], KamLAND-Zen [10]. Многоэлектронные моды могут наблюдаться коллаборацией SuperNEMO [11]. Верхний предел на время полураспада ${}^{76}\text{Ge} \rightarrow {}^{76}\text{Se}^* + 2\beta^-$, установленный коллаборацией GERDA, равен 5.3×10^{25} лет с уровнем достоверности 90 % [12]. Интерпретация данных в терминах майорановской массы нейтрино требует контроля неопределенностей в значении аксиальной константы связи нуклонов [13] и в ядерных матричных элементах [14]. В настоящей работе исследуется влияние возбуждения электронной оболочки атомов на спектр β -электронов в двойном β -распаде.

В β -процессах ядро атома претерпевает изменение заряда $\Delta Z = \pm 1, \pm 2$. Изменение заряда действует на электронную оболочку как внезапное возмущение, “встряхивание”, вынуждая электроны дочернего атома с определенной вероятностью переходить на возбужденные уровни (shake up), либо в ионизационные состояния непрерывного спектра (shake off). Результирующий энергетический β -спектр определяется вкладом канала распада, в котором все электроны конечного атома сохраняют свои квантовые числа, а энергия реакции не изменяется, и каналами распада с возбуждением и ионизацией электронной оболоч-

¹⁾e-mail: mikhael.krivoruchenko@itep.ru

ки. Во втором случае эффективная энергия реакции уменьшается, что влияет на форму энергетического спектра.

Для определения энергетического спектра требуется проводить суммирование по всем каналам с учетом измененной энергии реакции и соответствующей многочастичной амплитуды. Волновая функция электронов родительского атома проектируется на волновую функцию электронов дочернего атома в конфигурации, соответствующей определенному возбуждению оболочки. Каждая такая амплитуда требует, вообще говоря, многочастичного численного моделирования. Число открытых каналов, в частности, бесконечно, что является спецификой кулоновской задачи.

Сравнительно просто вычисляется средняя энергия возбуждения оболочки дочернего атома и ее дисперсия в модели Томаса–Ферми и в релятивистском методе Дирака–Хартри–Фока (ДХФ). Эти значения можно далее использовать для построения простейших вероятностных распределений энергии, уносимой β -электронами.

В нерелятивистской теории гамильтониан N электронов в атоме с зарядом ядра Z записывается в виде:

$$\hat{H}_{Z,N} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}_i^2 - \frac{Z}{|\mathbf{r}_i|} \right) + \sum_{i<j}^N \frac{1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (1)$$

где \mathbf{p}_i – импульсы и \mathbf{r}_i – координаты электронов. В настоящей работе используется система атомных единиц $\hbar = m = e = 1$, $c = 137$, где m – масса электрона, e – заряд протона, c – скорость света. Основное состояние обозначим $|Z, N\rangle$. Полная энергия связи электронов $E_{Z,N}$ является собственным значением $\hat{H}_{Z,N}$.

В $0\nu 2\beta$ -распаде заряд ядра увеличивается на две единицы. Кулоновская добавка к гамильтониану, действующая как внезапное возмущение, переводит состояние $|Z, Z\rangle$ исходного гамильтониана в суперпозицию состояний с определенной энергией гамильтониана

$$\hat{H}_{Z+2,Z} = \hat{H}_{Z,Z} - 2 \sum_{i=1}^Z \frac{1}{r_i}, \quad (2)$$

где $r_i = |\mathbf{r}_i|$. Средняя энергия Z электронов, образующих оболочку родительского атома, в кулоновском поле ядра с зарядом $Z+2$ равна $\langle Z, Z | \hat{H}_{Z+2,Z} | Z, Z \rangle = E_{Z,Z} + 2Z^{-1} E_{Z,Z}^C$, где $E_{Z,Z}^C$ – энергия кулоновского взаимодействия электронов с ядром:

$$E_{Z,Z}^C = -Z \sum_{i=1}^Z \langle Z, Z | \frac{1}{r_i} | Z, Z \rangle. \quad (3)$$

Среднее значение энергии возбуждения электронной оболочки дочернего атома в двойном β -распаде оказывается равным

$$\mathcal{M} = E_{Z,Z} + 2Z^{-1} E_{Z,Z}^C - E_{Z+2,Z}. \quad (4)$$

Энергия связи нейтральных атомов $E_{Z,Z}$ табулирована [15–18], либо находится с помощью программ, предназначенных для расчета структуры электронных оболочек атомов (см., например, [19]). Величина $E_{Z+2,Z}$ отличается от полной энергии связи электронов в нейтральном атоме $E_{Z+2,Z+2}$ на энергию связи двух валентных электронов, которая не превышает 20 эВ. Значения энергии кулоновского взаимодействия $E_{Z,Z}^C$, полученные с помощью релятивистского метода ДХФ, можно найти в работе [18].

В качестве второго момента вероятностного распределения найдем дисперсию энергии возбуждения

$$\mathcal{D} = \langle Z, Z | \hat{H}_{Z+2}^2 | Z, Z \rangle - \langle Z, Z | \hat{H}_{Z+2} | Z, Z \rangle^2. \quad (5)$$

С учетом уравнения (2) и, принимая во внимание, что $E_{Z,N}$ – собственные значения $\hat{H}_{Z,N}$, находим

$$\frac{1}{4} \mathcal{D} = \sum_{i=1}^Z \sum_{j=1}^Z \langle Z, Z | \frac{1}{r_i} \frac{1}{r_j} | Z, Z \rangle - \langle Z, Z | \sum_{i=1}^Z \frac{1}{r_i} | Z, Z \rangle^2.$$

В первом слагаемом матричный элемент $i \neq j$ факторизуется, если пренебречь обменными вкладами: $\langle Z, Z | r_i^{-1} r_j^{-1} | Z, Z \rangle \approx \langle Z, Z | r_i^{-1} | Z, Z \rangle \langle Z, Z | r_j^{-1} | Z, Z \rangle$. Факторизация ведет к сокращению недиагональных членов, в результате чего выражение для дисперсии принимает вид:

$$\frac{1}{4} \mathcal{D} \approx \sum_{i=1}^Z \langle Z, Z | \frac{1}{r_i^2} | Z, Z \rangle - \sum_{i=1}^Z \langle Z, Z | \frac{1}{r_i} | Z, Z \rangle^2. \quad (6)$$

Оценка обменных эффектов с использованием нерелятивистских волновых функций электронов в формализме Рутаана–Хартри–Фока [17] показывает, что вклад обменных слагаемых в дисперсию не превышает 10%.

Заметим, что уравнения (2)–(6) также справедливы в релятивистской теории с гамильтонианом Дирака–Кулона в качестве нулевого приближения и потенциалом Брейта, описывающим взаимодействие электронов в порядке $1/c^2$ [20].

В модели Томаса–Ферми полная энергия связи и энергия кулоновского взаимодействия электронов с ядром для нейтрального атома даются выражениями $E_{Z,Z} = -0.764Z^{7/3}$ и $E_{Z,Z}^C = 7E_{Z,Z}/3$ (см., например, [21]). Связь между $E_{Z,Z}$ и $E_{Z,Z}^C$ устанавливается теоремой вириала. Средняя энергия возбуждения равна

$$\mathcal{M} = \left(1 + \frac{14}{3Z} \right) E_{Z,Z} - E_{Z+2,Z}. \quad (7)$$

В двойном β -распаде германия каждый из двух недостающих $4p$ электронов связан в селене на 9.752 эВ, сумма первых двух энергий ионизации селена составляет 30.948 эВ [22]. С учетом поправки находим $M = 382$ эВ.

Плотность электронов в модели Томаса–Ферми выражается через волновые функции атомных оболочек согласно

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^Z \langle Z, Z | \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) | Z, Z \rangle. \quad (8)$$

Первое слагаемое в уравнении (6) очевидным образом приводится к виду $\int d\mathbf{r} r^{-2} n(\mathbf{r})$. Для вычисления интеграла используется параметризация экранирующей функции нейтральных атомов, приведенная в работе [23]. На малых расстояниях интеграл расходится как $\sim dr/r^{3/2}$. Кроме того, квазиклассическое приближение ограничено расстояниями $1/Z \lesssim r$. Для численных оценок плотность электронов в интервале от $r = 0$ до $1/Z$ считается постоянной и равной $n(r = 1/Z)$.

К второму слагаемому в уравнении (6) применим известное неравенство, согласно которому среднее арифметическое не превосходит среднее квадратичное:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^Z \langle Z, Z | \frac{1}{r_i} | Z, Z \rangle^2 &\geq \left(\frac{1}{Z} \sum_{i=1}^Z \langle Z, Z | \frac{1}{r_i} | Z, Z \rangle \right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{Z} \int d\mathbf{r} \frac{1}{r} n(\mathbf{r}) \right)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что правая часть равна $(Z^{-2} E_{Z,Z}^C)^2$. Неравенство определяет верхнюю границу дисперсии:

$$\frac{1}{4} \mathcal{D} \leq \frac{1}{4} \bar{\mathcal{D}} = \int d\mathbf{r} \frac{1}{r^2} n(\mathbf{r}) - Z^{-1} \left(\int d\mathbf{r} \frac{1}{r} n(\mathbf{r}) \right)^2. \quad (10)$$

Для двойного β -распада германия оценка дает $\bar{\mathcal{D}}^{1/2} = 2160$ эВ.

В релятивистском формализме ДХФ [15] значение первого отрицательного момента в атоме германия равно $\langle r^{-1} \rangle = 4.99$. Расположение основного уровня атома селена относительно германия находится с помощью комплекса программ RAINE [24, 25], реализующих релятивистский метод ДХФ. Подставляя полученные значения в формулу (6), найдем среднее значение энергии возбуждения $M = 300$ эВ, что качественно согласуется с методом Томаса–Ферми. Значения $E_{Z,Z}$ и $E_{Z,Z}^C$, табулированные в работе [18], для двойного β -распада германия дают $M = 400$ эВ.

Аналогично найдем дисперсию (6), выразив ее через первый и второй отрицательные моменты распределения электронов в атоме германия. Воспользовавшись известными значениями вторых моментов распределения электронов в атомах [16], найдем $\mathcal{D}^{1/2} = 2870$ эВ. Сравнение томас-фермиевского значения 2160 эВ с полученным значением также демонстрирует качественное согласие.

Величины M и \mathcal{D} заметно выше ожидаемых для каналов, связанных с возбуждением валентных электронов. Вклад дискретных уровней в M и $\mathcal{D}^{1/2}$, очевидно, не превышает ~ 10 эВ. Сходимость интеграла по непрерывному спектру определяется энергией связи, поэтому вклад континуума в M и $\mathcal{D}^{1/2}$ сравним с вкладом дискретной части спектра. В то же время в вероятности доминируют возбуждения валентных электронов, так как изменение заряда ядра $\Delta Z = 2$ приводит к значительному, в относительных единицах, изменению экранированного потенциала на границе атома.

Электроны на внутренних орбитах возбуждаются с малой вероятностью, однако имеют большую энергию связи и могли бы давать заметный вклад в среднюю энергию возбуждения и дисперсию. Изменение заряда ядра ΔZ много меньше Z , что позволяет применить теорию возмущений для вычисления вероятности возбуждения K электрона в континуум [26, 27] (см. также [21]). В ведущем порядке вероятность, средняя энергия и средний квадрат энергии перехода равны $\Delta \mathcal{P} = 0.65 \Delta Z^2 / Z^2$, $\Delta M = 0.66 \Delta Z^2$ и $\Delta \mathcal{D} = 1.87 \Delta Z^2 Z^2$, соответственно. В двойном β -распаде германия $\Delta \mathcal{P} = 2.6 \times 10^{-3}$, $\Delta M = 72$ эВ и $\Delta \mathcal{D} = (2380 \text{ эВ})^2$. ΔM и $\Delta \mathcal{D}$ имеют порядок величин M и \mathcal{D} . Вклад K электронов в среднюю энергию возбуждения и дисперсию, следовательно, является существенным.

В β -процессах оболочка родительского атома с конечной, отличной от единицы вероятностью переходит в основное состояние дочернего атома [2, 3, 28]. Для определения соответствующей амплитуды $K_Z = \langle \text{Se III} | \text{Ge} \rangle$ в двойном β -распаде германия волновые функции электронов атома германия $|\text{Ge}\rangle$ и волновые функции дочернего иона селена в основном состоянии $|\text{Se III}\rangle$ строились с использованием пакета программ GRASP-2018, реализующих релятивистский метод ДХФ [19, 20]. Величина K_Z оказывается чувствительной к используемым приближениям, что обусловлено заметным отличием энергии связи электронов с одинаковыми квантовыми числами на внешних оболочках германия и селена. Вычисления на основе GRASP-2018 приводят к значению $K_Z = 0.575$.

Суммарная кинетическая энергия β -электронов с учетом потери энергии на возбуждение и ионизацию дочернего атома в окрестности $T = Q$ описывается вероятностным распределением

$$dF(T) = (K_Z^2 \delta(T - Q) + (1 - K_Z^2)w(1 - T/Q)/Q) dT, \quad (11)$$

где K_Z^2 – вероятность электронам родительского атома после распада остаться в основном состоянии. Функция $w(x)$ – плотность вероятности энергии возбуждения электронной оболочки дочернего атома $\epsilon = Q - T$, измеренной в единицах Q . Второе слагаемое приводит к размытию пика.

Средняя величина, дисперсия и амплитуда перекрытия K_Z достаточны, чтобы построить простейшее двух-параметрическое вероятностное распределение энергии β -электронов. В широком круге задач, связанных со случайными процессами, используется бета-распределение [29]

$$w(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad (12)$$

для величин x , принимающих значения на отрезке $[0, 1]$; $\alpha, \beta > 0$ – свободные параметры. В бета-распределении среднее и средний квадрат равны $m = \alpha/(\alpha + \beta)$ и $m_2 = \alpha(\alpha + 1)/((\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1))$, соответственно. В рассматриваемом случае $x = \epsilon/Q$. Равенства $(1 - K_Z^2)m = M/Q$ и $(1 - K_Z^2)m_2 = (\mathcal{D} + M^2)/Q^2$ позволяют определить параметры α и β по известным значениям M , \mathcal{D} и K_Z . В качестве примера рассмотрим изотоп германия-76, использовавшийся в экспериментах коллаборации GERDA. Для $M = 300$ и 400 эВ и дисперсии $\mathcal{D}^{1/2} = 2870$ эВ находим $\alpha = 0.016$, $\beta = 74$ и $\alpha = 0.029$, $\beta = 99$, соответственно. Двух-параметрическое гамма-распределение [29], описывающее случайные величины на полуоси $[0, +\infty)$, также подходит для моделирования, поскольку условие $Q \gg M$, $\mathcal{D}^{1/2}$ позволяет распространить интегрирование по $x = \epsilon/Q$ на всю полуось $[0, +\infty)$. В физически интересной области $T \sim Q$ бета- и гамма-распределения практически совпадают в силу $\beta \gg 1$.

При $T = Q$ плотность вероятности сингулярна, но интегрируема. На рисунке 1 для двух приведенных выше наборов параметров α, β показана функция распределения

$$F(T) = K_Z^2 + (1 - K_Z^2) \int_T^Q w(1 - T'/Q) dT'/Q, \quad (13)$$

которая определяет вероятность двум β -электронам иметь энергию, отличную от величины Q не более, чем на $Q - T > 0$. Для $M = 300$ эВ с вероятностью 90% энергия β -электронов отклоняется от Q

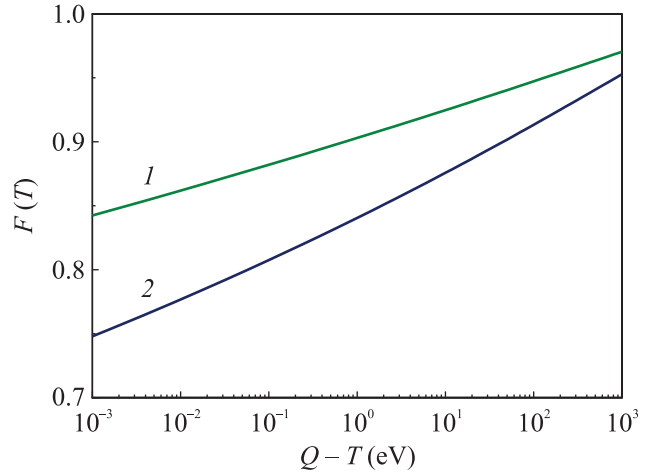


Рис. 1. Функция распределения вероятности кинетической энергии β -электронов, T , с учетом неполного перекрытия электронных оболочек атомов согласно уравнению (13). Линии 1 и 2 отвечают средней энергии возбуждения электронной оболочки $M = 300$ и 400 эВ, соответственно, и значению дисперсии $\mathcal{D}^{1/2} = 2870$ эВ. Численные значения характеризуют двойной β -распад германия, $Q = 2039.061(7)$ кэВ – энергия реакции [12]

не более, чем на 1 эВ. Для $M = 400$ эВ с той же вероятностью отклонение меньше 50 эВ. С увеличением разности $Q - T$ вероятность растет примерно логарифмически, то есть достаточно медленно. Современные детекторы измеряют энергию, выделяемую в двойном β -распаде, с разрешением ~ 1 кэВ, что существенно затрудняет наблюдение эффектов, связанных с возбуждением электронных оболочек. Процессы встряхивания K электронов сопровождаются выделением энергии ~ 10 кэВ, однако, эти процессы маловероятны.

Таким образом, в β -процессах электронная оболочка дочернего атома с высокой вероятностью переходит в возбужденное состояние. В вероятности доминируют переходы валентных электронов на свободные дискретные уровни или в непрерывный спектр. В настоящей работе даны оценки средней энергии возбуждения электронной оболочки дочернего атома M и ее дисперсии \mathcal{D} в модели Томаса–Ферми и в релятивистском формализме Дирака–Хартри–Фока. Найденные значения $M \sim 400$ эВ и $\mathcal{D}^{1/2} \sim 2900$ эВ существенно превышают значения, характеризующие процессы с участием валентных электронов. Оценка энергетических параметров перехода K электронов в непрерывный спектр указывает на то, что заметный вклад в среднюю энергию и ее дисперсию дают редкие процессы встряхивания электронов, заселяющих внутренние орбиты. При увеличении разрешения детекторов до ~ 100 эВ

искажение формы пика в распаде $0\nu 2\beta$, вызванное возбуждением электронных оболочек атомов, становится существенным для анализа данных наблюдений.

Работа выполнена при поддержке гранта # 23-22-00307 Российского научного фонда.

1. S. Bilenky, *Introduction to the Physics of Massive and Mixed Neutrinos*, 2nd ed., Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin (2018), v. 947.
2. W. Bambynek, H. Behrens, M. H. Chen, B. Crasemann, M. L. Fitzpatrick, K. W. D. Ledingham, H. Genz, M. Mutterer, and R. L. Intemann, *Rev. Mod. Phys.* **49**, 77 (1977).
3. M. I. Krivoruchenko and K. S. Tyrin, *Eur. Phys. J. A* **56**, 16 (2020).
4. F. F. Karpeshin, M. B. Trzhaskovskaya, and L. F. Vitushkin, *Yad. Fiz.* **83**, 344 (2020) [*Phys. At. Nucl.* **83**, 608 (2020)].
5. F. F. Karpeshin and M. B. Trzhaskovskaya, *Yad. Fiz.* **85**, 347 (2022) [*Phys. At. Nucl.* **85**, 474 (2022)].
6. F. F. Karpeshin and M. B. Trzhaskovskaya, *Phys. Rev. C* **107**, 045502 (2023).
7. I. Lindgren, *Journal of Electron Spectroscopy and Related Phenomena* **137–140**, 59 (2004).
8. K. Alfonso, D. R. Artusa, F. T. Avignone et al. (CUORE Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **115**, 102502 (2015).
9. G. Anton, I. Badhrees, P. S. Barbeau et al. (EXO-200 Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **123**, 161802 (2019).
10. A. Gando, Y. Gando, T. Hachiya et al. (KamLAND-Zen Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **117**, 082503 (2016); Addendum: *Phys. Rev. Lett.* **117**, 109903 (2016).
11. R. Arnold, C. Augier, J. D. Baker et al. (NEMO-3 Collaboration), *Phys. Rev. D* **92**, 072011 (2015).
12. The GERDA Collaboration, *Nature* **544**, 47 (2017).
13. J. T. Suhonen, *Front. Phys.* **5**, 55 (2017).
14. F. Šimkovic, A. Faessler, V. Rodin, P. Vogel, and J. Engel, *Phys. Rev. C* **77**, 045503 (2008).
15. C. C. Lu, T. A. Carlson, F. B. Malik, T. C. Tucker, and C. W. Nestor, Jr., *At. Data Nucl. Data Tables* **3**, 1 (1971).
16. J. P. Desclaux, *At. Data Nucl. Data Tables* **12**, 311 (1973).
17. E. Clementi and C. Roetti, *At. Data Nucl. Data Tables* **14**, 177 (1974).
18. K.-N. Huang, M. Aoyagi, M. H. Chen, B. Grasmann, and H. Mark, *At. Data Nucl. Data Tables* **18**, 243 (1976).
19. K. G. Dyall, I. P. Grant, C. T. Johnson, F. A. Parpia, and E. P. Blumner, *Comput. Phys. Commun.* **55**, 425 (1989).
20. I. P. Grant, *Relativistic Quantum Theory of Atoms and Molecules: Theory and Computation*, Springer Science + Business Media, N.Y. (2007).
21. L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory. Course of Theoretical Physics*, 3rd ed., Pergamon, London (1977), v. 3.
22. A. Kramida and Yu. Ralchenko, J. Reader and NIST ASD Team (2022), NIST Atomic Spectra Database (ver. 5.10), <https://physics.nist.gov/asd>. National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD; DOI: <https://doi.org/10.18434/T4W30F>.
23. J. C. Mason, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **84**, 357?360 (1964).
24. I. M. Band, M. B. Trzhaskovskaya, C. W. Nestor Jr., P. O. Tikkanen, and S. Raman, *At. Data Nucl. Data Tables* **81**, 1 (2002).
25. I. M. Band and M. B. Trzhaskovskaya, *At. Data Nucl. Data Tables* **35**, 1 (1986).
26. E. L. Feinberg, *J. Phys. (USSR)* **4**, 423 (1941).
27. А. Мигдал, *ЖЭТФ* **11**, 207 (1941) [A. Migdal, *J. Phys. Acad. Sci. USSR* **4**(1–6), 449 (1941)].
28. Z. Ge, T. Eronen, K. S. Tyrin, J. Kotila et al., *Phys. Rev. Lett.* **127**, 272301 (2021).
29. В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин, *Справочник по теории вероятностей и математической статистике*, Наука М. (1985), 640 с.