Письма в ЖЭТФ, том 117, вып. 12, с. 894 – 900

Глюонная аномалия и нарушение правила Цвейга

А. А. Осипов[1)]

Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Россия

Поступила в редакцию 21 марта 2023 г.
После переработки 5 мая 2023 г.
Принята к публикации 5 мая 2023 г.

Хорошо известно, что глюонная аномалия сообщает массу $U(1)$ голдстоуновскому бозону. Здесь мы обращаем внимание на другую ее особенность, которая проявляется в свойствах псевдоголдстоуновских состояний: глюонная аномалия в следующем порядке $1/N_c$ разложения индуцирует взаимодействия, нарушающие правило Цвейга. Необходимым условием для этого является явное нарушение киральной симметрии массами легких кварков. Одно из физических следствий – вывод, что η-η' смешивание не влияет на амплитуду $\eta \to 3\pi$. Другое – подавление первой $1/N_c$-поправки к углу η-η' смешивания. Подробно обсуждается механизм такого подавления. Наши выводы основываются на $1/N_c$ разложении и эффективном мезонном лагранжиане модели Намбу–Иона–Лазинио. Проводится сравнение с результатами $1/N_c$ киральной теории возмущений.

DOI: 10.31857/S1234567823120042, EDN: evdgis

В физических свойствах псевдоскалярного нонета мезонов η', η, K, π удивительным образом переплетены эффекты спонтанного, явного и аномального нарушения киральной $U(3)_L \times U(3)_R$ симметрии. Спонтанное нарушение симметрии сопровождается появлением кваркового конденсата и, как следствие, возбуждением безмассовых голдстоуновских мод. Благодаря явному нарушению симметрии ненулевыми массами легких u, d и s кварков, голдстоуновские моды приобретают массу. Глюонная аномалия нарушает аксиальную $U(1)_A$ симметрию, в результате в теории отсутствует сохраняющийся $U(1)$ заряд, а также легкая изоскалярная частица L с квадратом массы $m_L^2 \le 3m_\pi^2$ [1]. Для последовательной теоретической картины не менее важно понять каким образом указанные выше процессы взаимосвязаны между собой и как эта взаимосвязь отражается в наблюдаемых свойствах псевдоскаляров.

Известно, что качественно верная картина адронов возникает в квантовой хромодинамике (КХД) в приближении больших значений N_c, где N_c – число цветовых степеней свободы кварк-глюонной системы [2, 3]. Один из способов продвинуться в количественном описании – сформулировать правила N_c-счета внутри конкретной эффективной теории. Это позволяет перейти от рассмотрения предела больших N_c к разложению по степеням $1/N_c$ и, как следствие, классифицировать вершины мезонного лагранжиана по степени их важности, а значит, и отведенной им роли в киральной динамике адронов. Примером такого подхода служит $1/N_c$ киральная теория возмущений ($1/N_c\chi$ТВ) [4–7], где при построении эффективного мезонного лагранжиана предполагается, что массы легких (токовых) кварков m_i ($i = u, d, s$), а также квадраты импульсов имеют порядок $1/N_c$. Первые два шага такого разложения $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)}$ имеют порядок $(1/N_c)^0$ и $(1/N_c)^1$ соответственно и не содержат киральных логарифмов, которые возникают только на следующем шаге разложения лагранжиана псевдоголдстоуновских полей.

Недавно было замечено [8–11], что аналогичное разложение может быть осуществлено в рамках кварковой версии модели Намбу–Иона-Лазинио (НИЛ) [12, 13]. Одной из важных особенностей модели является механизм генерации тяжелых (составляющих) масс кварков M_i ($i = u, d, s$), что позволяет использовать ее в качестве эффективной теории для КХД при низких энергиях. Вершины эффективного мезонного лагранжиана получаются в результате вычисления однопетлевых кварковых диаграмм [14, 15]. Поскольку массы составляющих кварков велики, при вычислении кварковой петли можно ограничиться первыми членами разложения по степеням $1/M_i^2$, что удобнее всего осуществить, воспользовавшись методом собственного времени Фока–Швингера. В случае неравных масс кварков $M_u \neq M_d \neq M_s$, происходит перестройка ряда по степеням собственного времени, что связано с использованием ряда Вольтерры. Последний позволяет последовательно выделить эффекты явного наруше-

[1)]e-mail: aaosipov@jinr.ru

ния киральной симметрии при разложении кварковой петли [16–18]. Таким образом, модель НИЛ позволяет описать взаимосвязь эффектов спонтанного и явного нарушения киральной симметрии важных при построении эффективного мезонного лагранжиана. Такой подход, в частности, автоматически, т.е. без каких-либо дополнительных киральных разложений, позволяет получить результат Гелл–Манна–Оакса–Ренера, утверждающий, что квадрат массы псевдоскалярной частицы пропорционален величине кваркового конденсата и сумме токовых масс кварков (см. [8]).

В данной заметке я хочу обратить внимание на новое интересное проявление аномального нарушения $U(1)_A$ симметрии в спектре нейтральных псевдоскаляров, суть которого заключается в следующем. В теории с явно нарушенной киральной симметрией глюонная аномалия индуцирует вклады, нарушающие правило Окубо–Цвейга–Иизуки (ОЦИ). Как будет показано ниже, это приводит к частичному подавлению эффекта явного нарушения киральной симметрии в амплитуде $\eta \to 3\pi$, а также заметному уменьшению $1/N_c$-поправки к углу η-η' смешивания.

В качестве отправной точки рассмотрим свободный лагранжиан нейтральных членов псевдоскалярного нонета, который возникает из вычислений кварковых однопетлевых диаграмм, и дополнительно учтем вклад аксиальной $U(1)_A$ аномалии

$$\mathcal{L}_{\phi^2} = \sum_{i=u,d,s} \left[\frac{\kappa_{Aii}}{16G_V} (\partial_\mu \phi_i)^2 - \frac{M_i m_i}{4G_S} \phi_i^2 \right] - \frac{\lambda_U}{2} \phi_0^2. \quad (1)$$

Здесь ϕ_i – голые полевые функции, являющиеся диагональными компонентами нелинейного псевдоскалярного поля $U = e^{i\phi}$, $\phi = \sum_r \phi_r \lambda_r$, принадлежащего $u(3)$ алгебре Ли, с базисом λ_r, $r = 0, 1, 2 \ldots, 8$, где $\lambda_0 = \sqrt{2/3}$, а остальные семь составляют стандартный набор $SU(3)$ матриц Гелл–Манна. В дальнейшем, говоря о нейтральных компонентах, мы используем либо октет-синглетный базис $(\lambda_0, \lambda_8, \lambda_3)$, либо флейворный $(\lambda_u, \lambda_d, \lambda_s)$

$$\phi = \sum_{a=0,8,3} \phi_a \lambda_a = \sum_{i=u,d,s} \phi_i \lambda_i. \quad (2)$$

Связь между ними имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda_u &= \frac{\lambda_3}{2} + \frac{\sqrt{2}\lambda_0 + \lambda_8}{2\sqrt{3}} = \mathrm{diag}(1,0,0), \\ \lambda_d &= -\frac{\lambda_3}{2} + \frac{\sqrt{2}\lambda_0 + \lambda_8}{2\sqrt{3}} = \mathrm{diag}(0,1,0), \\ \lambda_s &= \frac{\lambda_0 - \sqrt{2}\lambda_8}{\sqrt{6}} = \mathrm{diag}(0,0,1). \end{aligned} \quad (3)$$

Константы G_S и G_V характеризуют силу $U(3)_L \times U(3)_R$ кирально симметричных четырехкварковых взаимодействий спина 0 и 1 соответственно. Они, в отличие от поля (2), размерны $[G_{S,V}] = M^{-2}$, и при больших значениях N_c убывают, как $\mathcal{O}(1/N_c)$.

Размерный коэффициент $\lambda_U = \mathcal{O}(N_c^0)$ в лагранжиане (1) является топологической проницаемостью чисто глюонной теории $[\lambda_U] = M^4$. Эта часть $\mathcal{L}_{\phi^2}$ следует из выражения, возникающего в результате учета квантовых флуктуаций плотности топологического заряда $Q(x) = \frac{g^2}{32\pi^2} F^a_{\mu\nu} \tilde{F}^a_{\mu\nu}$, которые описываются лагранжианом

$$\mathcal{L}_Q^{(0)} = \frac{3}{\lambda_U} Q^2(x) + \frac{i}{2} Q(x) \mathrm{tr}\left(\ln U - \ln U^\dagger\right). \quad (4)$$

Его причастность к решению $U(1)$ проблемы подробно исследовалась в работах [19–22]. В частности, воспользовавшись уравнением движения поля $Q(x)$ можно исключить плотность топологического заряда в (4) и придти к лагранжиану

$$\mathcal{L}_Q^{(0)} \to \mathcal{L}_{U(1)} = \frac{\lambda_U}{48} \left[\mathrm{tr}\left(\ln U - \ln U^\dagger\right)\right]^2, \quad (5)$$

который явно нарушает $U(1)_A$ симметрию и после подстановки $U = e^{i\phi}$ приводит к последнему слагаемому в (1). В модели НИЛ лагранжиан (5) использовался, например, в работе [14].

Поскольку непротиворечивое решение $U(1)$ проблемы достигается в рамках $1/N_c$ разложения КХД, представляется разумным взглянуть на эффективный мезонный лагранжиан (1), с той же точки зрения. Это возможно, если мы воспользуемся правилами счета, предложенными в работах [4, 5]. Действительно, малые параметры низкоэнергетического лагранжиана (1) удобно объединить в один параметр δ, положив $1/N_c \sim \delta$, $\partial^2 \sim \delta$ и $m_i \sim \delta$. Мы видим, что все три члена в (1) имеют одинаковый порядок по δ (если $\kappa_{Aii}, M_i, \phi_r \sim \delta^0$) и отвечают лидирующему вкладу $\sim \delta^0$.

В этом случае модель НИЛ позволяет продвинуться дальше и извлечь из (1) $1/N_c$-поправку к лидирующему вкладу. Для этого достаточно воспользоваться уравнением щели, которое связывает массы легких токовых кварков m_i с массами тяжелых составляющих кварков M_i. Поскольку решением уравнения щели в данном случае будет ряд Тейлора по степеням δ, вычисление первой поправки сведется к определения линейного по m_i члена в разложении $M_i = M_0 + a m_i + \mathcal{O}(m_i^2)$, где $M_0 = \mathcal{O}(\delta^0)$ – масса конституентного кварка в пределе $N_c \to \infty$, и последующей подстановки данного результата в (1).

Подчеркнем существенное отличие данного подхода от стандартного. При стандандартном рассмотрении предполагается, что $m_i \sim \delta^0$. Решением уравнения щели будет вся функция $M_i(m_i)$, а вычисление $1/N_c$-поправки потребует рассмотрения киральных логарифмов, что подразумевает существенную модификацию модели НИЛ, которая, как было отмечено в [23], может оказаться теоретически необоснованной процедурой. Однако, если $m_i = \mathcal{O}(1/N_c)$, то вклад киральных логарифмов начинается только с порядка $(m_i/N_c)\ln m_i \sim \delta^2$, т.е. с третьего шага разложения по степеням δ. Именно с этим обстоятельством связана возможность гарантированного использования эффективного лагранжиана $1/N_c$-модели НИЛ для оценки масс и других характеристик псевдоскалярного нонета мезонов в приближении $\mathcal{O}(\delta)$. И именно в этом случае ряд Вольтерры играет основную роль в описании эффектов явного нарушения киральной симметрии.

Диагональные элементы матрицы κ_A в (1) имеют вид

$$(\kappa_A)_{ii}^{-1} = 1 + \frac{\pi^2}{N_c G_V M_i^2 J_1(M_i)}, \tag{6}$$

где $J_1(M)$ – логарифмически расходящаяся часть однопетлевой кварковой диаграммы

$$J_1(M) = \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}\right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + M^2}. \tag{7}$$

Здесь используется регуляризация через обрезание интегралов по собственному времени. Ковариантный параметр обрезания Λ входит также и в уравнение щели, и поэтому является характерным масштабом спонтанного нарушения киральной симметрии. Считается, что $\Lambda = 4\pi f_\pi \simeq 1.1$ ГэВ [24]. Более подробную информацию о деталях получения приведенных выше выражений можно найти в работах [9, 11, 18].

Заметим, что если воспользоваться правилами счета, принятыми в $1/N_c\chi$ТВ, лидирующий порядок членов лагранжиана (1) равен $(1/N_c)^0$. В этом порядке наш лагранжиан полностью совпадает с лагранжианом $\mathcal{L}^{(0)}$ в $1/N_c\chi$ТВ, низкоэнергетические константы которого могут быть выражены через параметры модели НИЛ. Второе замечание касается структуры выражения в квадратных скобках. Оно имеет диагональную форму в кварк-флейворном базисе и при отсутствии $U(1)_A$ аномалии нейтральные поля были бы чистыми флейворными состояниями. Присутствие аномалии кардинально меняет ситуацию, а именно, требует диагонализации массовой части лагранжиана, и, как следствие, перехода к новым полевым функциям, которые мы будем ассоциировать с октет-синглетным базисом.

Рассмотрим кинетическую часть лагранжиана (1), которая после переопределения переменных

$$\phi_i = f_i^{-1}\,\phi_i^R \tag{8}$$

примет канонический вид. Новые переменные отмечены индексом R и, как легко видеть, имеют размерность массы, которую константам f_i сообщает размерный параметр G_V

$$f_i = \sqrt{\frac{\kappa_{Aii}}{4G_V}} = \mathcal{O}(\sqrt{N_c}). \tag{9}$$

В результате получаем

$$\mathcal{L}_{\rm kin} = \frac{1}{4}\sum_{i=u,d,s}(\partial_\mu \phi_i^R)^2 = \frac{1}{2}\sum_{a=0,3,8}(\partial_\mu \phi_a^R)^2. \tag{10}$$

где связь компонент $\phi_{u,d,s}$ с компонентами $\phi_{0,3,8}$, так же как и связь между компонентами $\phi_{u,d,s}^R$ и $\phi_{0,3,8}^R$, легко определяется из формулы (2).

Особенностью перехода от голых полей ϕ_a к полям ϕ_a^R, как несложно выяснить, является возникновение примеси, а именно, голые поля представляют суперпозицию из новых полей, и наоборот

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= \frac{\phi_0^R}{f_0} + \left(\frac{1}{f_u} - \frac{1}{f_d}\right)\frac{\phi_3^R}{\sqrt{6}} + \left(\frac{1}{f_u} + \frac{1}{f_d} - \frac{2}{f_s}\right)\frac{\phi_8^R}{3\sqrt{2}},\\
\phi_8 &= \frac{\phi_8^R}{f_8} + \left(\frac{1}{f_u} - \frac{1}{f_d}\right)\frac{\phi_3^R}{2\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{f_u} + \frac{1}{f_d} - \frac{2}{f_s}\right)\frac{\phi_0^R}{3\sqrt{2}},\\
\phi_3 &= \frac{\phi_3^R}{f_3} + \left(\frac{1}{f_u} - \frac{1}{f_d}\right)\frac{\phi_8^R + \sqrt{2}\phi_0^R}{2\sqrt{3}},
\end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}
f_0^{-1} &= \frac{1}{3}\left(f_u^{-1} + f_d^{-1} + f_s^{-1}\right),\\
f_8^{-1} &= \frac{1}{6}\left(f_u^{-1} + f_d^{-1} + 4f_s^{-1}\right),\\
f_3^{-1} &= \frac{1}{2}\left(f_u^{-1} + f_d^{-1}\right).
\end{aligned} \tag{12}$$

Очевидно, что примешивание происходит только за счет явного нарушения киральной симметрии, как изоспиновой, так и $SU(3)_f$ флейворной. Отсюда следует, что при переходе к новым полевым переменным аномальная часть лагранжиана (1), помимо лидирующего вклада $\sim (\phi_0^R)^2$, даст вклады порядка $1/N_c$, которые типичны для взаимодействий, нарушаюших правило ОЦИ.

Действительно, в этом порядке $1/N_c$ разложения присутствует ОЦИ, нарушающее взаимодействие [22]

$$\mathcal{L}_Q^{(1)} = i\sqrt{6}Q(x)\frac{\lambda_Z}{\lambda_U}\mathrm{tr}\left[\chi\left(U - U^\dagger\right)\right], \tag{13}$$

которое после подстановки решения уравнения движения для поля $Q(x)$, найденное из (4), примет следующий вид [25]

$$\mathcal{L}_Q^{(1)} \to \mathcal{L}_{OZI} = \frac{i\lambda_Z}{\sqrt{6}}\,\mathrm{tr}(\phi)\,\mathrm{tr}\big[\chi\left(U-U^\dagger\right)\big]\,, \qquad (14)$$

где $\lambda_Z = \mathcal{O}(N_c^0)$ – размерная константа $[\lambda_Z] = M^2$, а матрица $\chi = 2Bm$ явно нарушает $SU(3)\times SU(3)$ симметрию и имеет вид

$$\chi = \frac{4G_V}{G_S}\mathrm{diag}\left(\frac{M_u m_u}{\kappa_{Auu}}, \frac{M_d m_d}{\kappa_{Add}}, \frac{M_s m_s}{\kappa_{Ass}}\right). \qquad (15)$$

В этом случае лидирующий член разложения по массам легких кварков совпадает с известным выражением киральной теории возмущений $\chi = 2B_0 m + \mathcal{O}(m^2)$. Важно, что взаимодействие (14) не ассоциируется с глюонной аномалией, т.е. имеет самостоятельное значение. Его квадратичная часть ведет к смешиванию синглетной компоненты с диагональными членами октета

$$\mathcal{L}_{OZI} \to -8\lambda_Z\frac{G_V}{G_S}\,\phi_0\sum_{i=u,d,s}\frac{M_i m_i}{(\kappa_A)_{ii}}\,\phi_i, \qquad (16)$$

и поэтому будет интерферировать с соответствующим вкладом глюонной аномалии.

Чтобы установить, как такая интерференция отражается на спектре псевдоголдстоуновских состояний, обратимся к массовой матрице

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2}\sum_{a=0,8,3}\phi_a^R\mathcal{M}_{ab}^2\phi_b^R. \qquad (17)$$

Используя вышеприведенные формулы, представим результат в виде суммы лидирующего вклада и первой $1/N_c$ поправки к нему $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m^{(0)} + \mathcal{L}_m^{(1)}$

$$\mathcal{M}_{ab}^2 = \mu_{ab}^2 + \Delta\mu_{ab}^2 + \mathcal{O}(1/N_c^3). \qquad (18)$$

Обратим внимание, что поля $\phi_a^R = \mathcal{O}(\sqrt{N}_c)$. Это следует из формул (8) и (9). Поэтому разложение (18), содержащее члены порядка $1/N_c^2$, не превышает точности проводимых здесь вычислений.

Основной вклад порядка $1/N_c$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\mu_{00}^2 &= \frac{2}{3}B_0\left(2\hat{m}+m_s\right)+\lambda_\eta^2,\\
\mu_{88}^2 &= \frac{2}{3}B_0\left(\hat{m}+2m_s\right),\\
\mu_{33}^2 &= 2B_0\hat{m},\\
\mu_{08}^2 &= -2\frac{\sqrt{2}}{3}B_0\left(m_s-\hat{m}\right),\\
\mu_{03}^2 &= -\sqrt{\frac{2}{3}}B_0\left(m_d-m_u\right),\\
\mu_{38}^2 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}B_0\left(m_d-m_u\right),
\end{aligned} \qquad (19)$$

где мы ввели обозначение $\lambda_\eta^2 = \lambda_U/F^2$. Величина константы слабого распада пиона в киральном пределе равна $F = \sqrt{\kappa_{A0}/(4G_V)}$, здесь κ_{A0} – киральный предел для константы (6). В формуле также используется стандартное обозначение для среднего значения масс нестранных кварков $\hat{m} = (m_u+m_d)/2$. Константа

$$B_0 = \frac{2G_V M_0}{G_S\kappa_{A0}} = \frac{M_0}{2G_S F^2} = -\frac{\langle\bar{q}q\rangle_0}{F^2} \qquad (20)$$

выражается через массу составляющего кварка M_0 в киральном пределе. Последняя определяется из разложения в ряд по $1/N_c$ нетривиального решения уравнения щели $M_i(m_i)$, где нам требуются только два первых члена $M_i(m_i) = M_0 + am_i + \mathcal{O}(1/N_c^2)$. Коэффициент $a = \pi^2/(N_c G_S M_0^2 J_1(M_0))$ [10]. Величина кваркового конденсата $\langle\bar{q}q\rangle_0$ также отвечает случаю безмассовых токовых кварков. Формулы (19) хорошо известны. В частности, их диагонализация приводит к массе η-мезона $m_\eta = 494$ МэВ, которая значительно ниже феноменологического значения $m_\eta = 548$ МэВ. Поэтому необходимо сделать следующую шаг в разложении по $1/N_c$.

Первая поправка к результату (19) имеет вид

$$\begin{aligned}
\Delta\mu_{00}^2 &= \frac{2B_0}{3}\left[(2\hat{m}^2+m_s^2)\frac{\delta_M}{M_0}-2\Delta_N(2\hat{m}+m_s)\right],\\
\Delta\mu_{08}^2 &= \frac{2\sqrt{2}}{3}B_0(m_s-\hat{m})\left[\Delta_N-(m_s+\hat{m})\frac{\delta_M}{M_0}\right],\\
\Delta\mu_{88}^2 &= \frac{2B_0}{3M_0}(\hat{m}^2+2m_s^2)\delta_M,\\
\Delta\mu_{33}^2 &= \frac{2B_0}{M_0}\hat{m}^2\delta_M,\\
\Delta\mu_{03}^2 &= \sqrt{\frac{2}{3}}B_0(m_d-m_u)\left(\Delta_N-2\hat{m}\frac{\delta_M}{M_0}\right),\\
\Delta\mu_{38}^2 &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{B_0}{M_0}(m_d^2-m_u^2)\delta_M,
\end{aligned} \qquad (21)$$

где

$$\Delta_N \equiv \lambda_U G_S\frac{a-\delta_M}{2M_0^2}-2\sqrt{6}\frac{\lambda_Z}{F^2}, \qquad (22)$$

и

$$a-\delta_M = 2a(1-\kappa_{A0})\left[1-\frac{\Lambda^4 J_1(M_0)^{-1}}{(\Lambda^2+M_0^2)^2}\right]. \qquad (23)$$

Поясним происхождение вкладов в формуле (21). Члены, выживающие в пределе $\Delta_N = 0$, происходят от разложения в ряд по степеням $1/N_c$ массовой части лагранжиана (1), где предварительно необходимо перейти к полевым функциям ϕ_a^R. Этот результат с точностью до общего множителя совпадает с результатом аналогичных вычислений в $1/N_c\chi$ТВ [26]. Связь между множителями имеет вид

$$\frac{\delta_M}{M_0} \leftrightarrow 16\frac{B_0}{F^2}\left(2L_8 - L_5\right). \qquad (24)$$

Поправки, индуцированные аксиальной аномалией, в формуле (21) пропорциональны λ_U и собраны в Δ_N. Вклад в $\Delta\mu_{00}^2$ связан с учетом $1/N_c$ поправки в константу f_0. Другие два вклада в $\Delta\mu_{08}^2$ и $\Delta\mu_{03}^2$ – эффект присутствия октетных компонент ϕ_8^R и ϕ_3^R в голом синглетном поле ϕ_0, что описывается формулой (11). Таким образом аномалия, благодаря явному нарушению киральной симметрии, приводит к дополнительному вкладу в коэффициент Δ_N, который в противном случае определялся бы только взаимодействиями, нарушающими правило ОЦИ. Последние, как мы уже отмечали, не связанны с аксиальной аномалией. Сравнивая полученные здесь выражения $\Delta\mu_{08}^2$, $\Delta\mu_{03}^2$ с аналогичными формулами в [26], можно установить соответствие

$$\Delta_N \leftrightarrow -\rho/2 = \Lambda_1/2 - \Lambda_2 + 4L_5M_0^2/F_0^2, \qquad (25)$$

где в правой части сохранены обозначения работы [26]. Не следует путать используемое там обозначение M_0 для массы синглета (которая у нас обозначена, как λ_η) с массой составляющего кварка в киральном пределе, используемой здесь. В модели НИЛ константа $\Lambda_1 = 0$. Другой параметр Λ_2 совпадает с используемой здесь величиной $2\sqrt{6}\lambda_Z/F^2$. Третьему слагаемому в (25) в точности соответствует наше выражение

$$\frac{4L_5M_0^2}{F_0^2} \leftrightarrow \frac{4\lambda_\eta^2}{F^2}\frac{(a-\delta_M)F^2}{16B_0M_0} = \lambda_U G_S\frac{a-\delta_M}{2M_0^2}. \qquad (26)$$

Отсюда следует, что эффект, обсуждаемый здесь, имеет место и в $1/N_c\chi$ТВ, т.е. генерация посредством аксиальной аномалии вкладов, нарушающих правило ОЦИ, – общее свойство любой эффективной теории с явно нарушенной киральной симметрией.

Чтобы сделать количественные оценки, необходимо диагонализовать массовую матрицу $\mathcal{M}_{ab}^2$. Смешивание ϕ_3^R с полями ϕ_8^R и ϕ_0^R происходит за счет нарушения изоспиновой симметрии. В первом порядке по разности масс $m_d - m_u$ оно устраняется поворотом на малые углы ϵ и ϵ' соответственно. Смешивание компонент ϕ_0^R и ϕ_8^R – результат нарушения $SU(3)_f$ симметрии. Для его устранения необходимо осуществить поворот на угол θ. С точностью до первого порядка по нарушению изотопической симметрии преобразование нейтральных компонент к физическим состояниям π^0, η и η' имеет вид

$$\begin{aligned}
\phi_3^R &= \pi^0 - \epsilon\eta - \epsilon'\eta', \\
\phi_8^R &= (\epsilon\cos\theta + \epsilon'\sin\theta)\pi^0 + \cos\theta\eta + \sin\theta\eta', \\
\phi_0^R &= (\epsilon'\cos\theta - \epsilon\sin\theta)\pi^0 - \sin\theta\eta + \cos\theta\eta'. \qquad (27)
\end{aligned}$$

Поскольку массовая матрица (18) представляет собой сумму двух вкладов, отвечающих лидирующему приближению и первой поправки к нему, углы ортогонального преобразования (27) следует искать в виде такого же разложения: $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$, $\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon$, и $\epsilon' = \epsilon_0' + \Delta\epsilon'$. Здесь углы θ_0, ϵ_0 и ϵ_0' имеют порядок N_c^0. Они отвечают за диагонализацию основного вклада. $1/N_c$ поправки к ним $\Delta\theta$, $\Delta\epsilon$ и $\Delta\epsilon'$ обеспечивают диагональность массовой матрицы, в которой учтены и первые поправки. Очевидно, что и собственные значения массовой матрицы $m_{\eta'}^2$, m_η^2 и $m_{\pi^0}^2$, которые мы получим в результате ортогонального поворота (27), имеют аналогичный вид: $m_\eta^2 = \mu_\eta^2 + \Delta\mu_\eta^2$, $m_{\eta'}^2 = \mu_{\eta'}^2 + \Delta\mu_{\eta'}^2$, и $m_{\pi^0}^2 = \mu_{33}^2 + \Delta\mu_{33}^2$, где

$$\begin{aligned}
\mu_{\eta,\eta'}^2 &= \tfrac{1}{2}\Big[\mu_{00}^2 + \mu_{88}^2 \mp \sqrt{(\mu_{00}^2 - \mu_{88}^2)^2 + 4\mu_{08}^4}\Big], \\
\Delta\mu_{\eta,\eta'}^2 &= \frac{1}{2}\bigg(\Delta\mu_{00}^2 + \Delta\mu_{88}^2 \mp \\
&\mp \frac{(\mu_{00}^2 - \mu_{88}^2)(\Delta\mu_{00}^2 - \Delta\mu_{88}^2) + 4\mu_{08}^2\Delta\mu_{08}^2}{\sqrt{(\mu_{00}^2 - \mu_{88}^2)^2 + 4\mu_{08}^4}}\bigg). \qquad (28)
\end{aligned}$$

Мы не будем останавливаться на всех деталях фиксации параметров модели. Это было сделано в работах [10, 11], исходя из спектра заряженных псевдоскаляров. Результаты собраны в двух приведенных здесь табл. 1, 2. Отметим лишь, что рассмотрение нейтральных псевдоскаляров потребовало привлечения двух новых констант λ_U и λ_Z, величины которых мы определяем исходя из экспериментальных значений масс η и η' мезонов. В результате находим: $\lambda_U = (285\,\text{МэВ})^4$ и $\lambda_Z = (27.7\,\text{МэВ})^2$. Теперь убедимся, что параметр Δ_N, имеющий порядок $1/N_c$, остается малым и при конечном значении $N_c = 3$. Его величина определяется разностью (22), что численно равно $\Delta_N = 0.82 - 0.46 = 0.36$. Это разумная оценка. Заметим, что в $1/N_c\chi$ТВ $\Delta_N = 1$, т.е. наблюдается существенная рассогласованность $1/N_c$-разложения.

Обсудим роль вкладов, связанных с глюонной аномалией, при расчете $1/N_c$ поправок к массам нейтральных псевдоскаляров. Начнем с величины $1/N_c$ поправки к углу η-η' смешивания $\Delta\theta$. Она была вычислена в работе [26] в $1/N_c\chi$ТВ. Оказалось, что результат основного приближения $\theta_0 = -18.6^\circ$, после учета $1/N_c$ поправки уменьшается до величины $\theta_0 + \Delta\theta = -10^\circ$. Такое значительное снижение ставит под сомнение предсказательную силу $1/N_c$ разложения.

Таблица 1. Для фиксации шести параметров модели Λ, G_S, G_V, m_u, m_d, и m_s используются массы π^0, $\pi^{\pm}$, K^0 $K^{\pm}$ мезонов, величина константы распада пиона f_π и обрезание Λ. Электромагнитные поправки к массам заряженных частиц учитывают отклонения от теоремы Дашена, возникающее в следующем порядке $1/N_c$ разложения. С этой целью мы дополнительно использовали экпериментальное значение константы f_K, а также феноменологические данные по ширине распада $\eta \to 3\pi$. Все единицы, за исключением $[\Lambda] =$ ГэВ, $\left[G_{S,V}\right] =$ ГэВ$^{-2}$ и безразмерных констант a и δ_M, приведены в МэВ

Λ	G_S	G_V	m_u	m_d	m_s	M_0	$-\langle\bar{q}q\rangle_0^{1/3}$	M_u	M_d	M_s	F	f_π	f_K	δ_M	a
1.1	6.6	7.4	2.6	4.6	84	274	275	283	290	567	90.5	92.2	111	0.67	3.50

Таблица 2. В первой строке, вариант (a), приводится результат диагонализации лидирующего вклада углами θ_0, ϵ_0 and ϵ_0'. Кварковые массы приведены в МэВ, θ в градусах, а углы ϵ и ϵ' – в радианах. Величина константы λ_η^2 (в ГэВ^2) определена по экспериметальному значению массы η' мезона. Во второй строке, вариант (b), учтены $1/N_c$ поправки (в том числе и при извлечении значений легких масс кварков). Параметры λ_η^2 и Δ_N, фиксируются по феноменологическим значениям масс η и η' мезонов

	m_u	m_d	m_s	λ_η^2	Δ_N	θ	θ_0	$\Delta\theta$	ϵ	ϵ_0	$\Delta\epsilon$	ϵ'	ϵ_0'	$\Delta\epsilon'$
(a)	2.6	4.6	93	0.671	–	–	$-19.7°$	–	–	0.0187	–	–	0.0033	–
(b)	2.6	4.6	84	0.805	0.36	$-15.76°$	$-14.97°$	$-0.79°$	0.0114	0.0177	-0.0063	0.0021	0.0033	-0.0012

Как видно из табл. 2, угол $\theta_0 = -15.0°$, получаемый в модели НИЛ, близок к указанной выше оценке [26]. С другой стороны, $1/N_c$-поправка, полученная нами, мала $\Delta\theta = -0.8°$. Ее небольшая величина – результат вклада аксиальной аномалии. Действительно, из наших вычислений следует, что

$$\begin{aligned}\Delta\theta = \frac{1}{4}\sin 4\theta_0 \Bigg[(m_s+\hat{m})\frac{\delta_M}{M_0}\left(1-\frac{\operatorname{tg}2\theta_0}{2\sqrt{2}}\right) - \\ - \Delta_N\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{m_s+2\hat{m}}{m_s-\hat{m}}\operatorname{tg}2\theta_0\right)\Bigg] = \\ = -0.056+0.042 = -0.014. \qquad (29)\end{aligned}$$

Таким образом, вклад второго слагаемого $\sim \Delta_N$ (где доминирует вклад, связанный с аксиальной аномалией) существенно снижает величину поправки.

В качестве второго примера рассмотрим известную проблему [5], которая возникает при вычислении углов ϵ и ϵ' в лидирующем порядке теории. Сразу заметим, что на этом шаге модель НИЛ приводит к тем же формулам, которые были получены в $1/N_c\chi$ТВ [5]:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= \bar{\epsilon}_0\cos\theta_0\frac{\cos\theta_0-\sqrt{2}\sin\theta_0}{\cos\theta_0+\sin\theta_0/\sqrt{2}}, \\ \epsilon_0' &= \bar{\epsilon}_0\sin\theta_0\frac{\sin\theta_0+\sqrt{2}\cos\theta_0}{\sin\theta_0-\cos\theta_0/\sqrt{2}}, \qquad (30)\end{aligned}$$

где угол π^0-η смешивания $\bar{\epsilon}_0$ был вычислен в работе Гросса, Треймана и Вильчека [27] в пренебрежении η-η' смешиванием

$$\bar{\epsilon}_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{m_d-m_u}{m_s-\hat{m}} = 0.011. \qquad (31)$$

Учет η-η' смешивания значительно увеличивает величину угла ϵ_0 по сравнению с $\bar{\epsilon}_0$. Оценка $\epsilon_0 = 0.018$, которую дают наши вычисления, согласуется с результатом $\epsilon_0 \simeq 2\bar{\epsilon}_0$, полученным Лойтвилером при величине угла смешивания $\theta_0 \simeq -22°$ [5], а также с результатом $\epsilon_0 = 0.017 \pm 0.002$ [28]. Все эти оценки сделаны при одинаковых предположениях: использование теоремы Дашена и учет η-η' смешивания. Такая большая величина ϵ_0 делает теоретическое значение ширины распада $\eta \to 3\pi$ неприемлемо большим. Этот эффект анализировался в работе [5] в рамках лидируещего приближения $1/N_c\chi$ТВ, где, в частности, было высказано предположение, что проблема может быть решена за счет учета $1/N_c$ поправки. Покажем, что это действительно имеет место, причем главную роль здесь опять играет аксиальная аномалия.

Вклад в угол $\Delta\epsilon$ формируется за счет трех слагаемых $\Delta\epsilon = \sum_{i=1,2,3}\Delta\epsilon_i$. Первое пропорционально $\Delta\theta$ и поэтому пренебрежимо мало

$$\Delta\epsilon_1 = -\Delta\theta\epsilon_0'\frac{\sqrt{2}-\operatorname{ctg}\theta_0}{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\theta_0} = 2.0\cdot 10^{-4}. \qquad (32)$$

Вторoе связано с поправками от разложений констант и масс конституентных кварков. Такая поправка пропорциональна δ_M и в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon_2 = -\frac{\delta_M\epsilon_0}{M_0}\left[m_s-\hat{m}+(m_s+\hat{m})\left(\frac{\sin 2\theta_0}{2\sqrt{2}}-\sin^2\theta_0\right)\right] = \\ = -0.145\epsilon_0. \qquad (33)\end{aligned}$$

Третье слагаемое описывает вклад взаимодействия нарушающего правило ОЦИ, а также вклад аксиальной аномалии через явное нарушение киральной симметрии

$$\Delta\epsilon_3 = \sqrt{2}\Delta_N\epsilon_0 \sin\theta_0 \left[\frac{1}{\cos\theta_0 - \sqrt{2}\sin\theta_0} + \cos\theta_0 \times \right.$$
$$\left. \times\left(1 + \frac{3\hat{m}\sin\theta_0}{(m_s - \hat{m})(\sin\theta_0 + \sqrt{2}\cos\theta_0)}\right)\right] =$$
$$= -0.222\epsilon_0. \quad (34)$$

В сумме $\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon$ это ведет к фактору, который восстанавливает результат работы [27]

$$\epsilon = \epsilon_0(1 - 0.367) = 0.011 \simeq \bar{\epsilon}_0. \quad (35)$$

Из приведеннных оценок видно, что основную роль в восстановлении результата [27] играет вклад глюонной аномалии, которая через описанный выше механизм подавляет влияние η-η' смешивания на амплитуду распада $\eta \to 3\pi$, которая, как известно, пропорциональна ϵ. Это объясняет, почему в данном процессе эффект нарушения изоспиновой симметрии мал, хотя рассмотрение лидирующего приближения указывает на обратное.

В заключение хочу подчеркнуть, что описанный здесь механизм подавления глюонной аномалией эффектов, связанных с нарушением флейворной и изотопической симметрий, имеет общий характер, несмотря на то, что все рассуждения здесь проводились в рамках $1/N_c$ модели НИЛ. Это следует из прямой связи между константами рассматриваемой здесь модели и константами $1/N_c\chi$ТВ. При этом численные значения параметров $1/N_c\chi$ТВ, получаемые на основе модели НИЛ, находятся в прекрасном согласии с их феноменологическими значениями (за исключением параметра Λ_1, который отсутствует в модели НИЛ).

1. S. Weinberg, Phys. Rev. D **11**, 3583 (1975).
2. G. ’t Hooft, Nucl. Phys. B **72**, 461 (1974).
3. E. Witten, Nucl. Phys. B **160**, 57 (1979).
4. H. Leutwyler, Phys. Lett. B **374**, 163 (1996).
5. H. Leutwyler, Phys. Lett. B **374**, 181 (1996).
6. R. Kaiser and H. Leutwyler, Eur. Phys. J. C **17**, 623 (2000).
7. P. Herrera-Siklódy, J.I. Latorre, P. Pascual, and J. Taron, Nucl. Phys. B **497**, 345 (1997).
8. A. A Osipov, JETP Lett. **115**(6), 30 (2022).
9. A. A. Osipov, JETP Lett. **115**, 371 (2022).
10. A. A. Osipov, arXiv:hep-ph/2302.14118 (2023).
11. A. A. Osipov, arXiv:hep-ph/2303.01865 (2023).
12. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
13. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **124**, 246 (1961).
14. M. K. Volkov, ЭЧАЯ **17**, 432 (1986).
15. D. Ebert and H. Reinhardt, Nucl. Phys. B **271**, 188 (1986).
16. A. A. Osipov, JETP Lett. **113**(6), 413 (2021).
17. A. A. Osipov, Phys. Lett. B **817**, 136300 (2021).
18. A. A. Osipov, Phys. Rev. D **104**(10), 105019 (2021).
19. G. Veneziano, Nucl. Phys. B **159**, 213 (1979).
20. C. Rosenzweig, J. Schechter, and G. Trahern, Phys. Rev. D **21**, 3388 (1980).
21. P. Di Vecchia and G. Veneziano, Nucl. Phys. B **171**, 253 (1980).
22. P. Di Vecchia, F. Nicodemi, R. Pettorino, and G. Veneziano, Nucl. Phys. B **181**, 318 (1981).
23. G. Cvetic, Ann. Physics **255**, 165 (1997).
24. A. Manohar and H. Georgi, Nucl. Phys. B **234**, 189 (1984).
25. H. Leutwyler, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **64**, 223 (1998).
26. J. L. Goity, A. M. Bernstein, and B. R. Holstein, Phys. Rev. D **66**, 076014 (2002).
27. D. J. Gross, S. B. Treiman, and F. Wilczek, Phys. Rev. D **19**, 2188 (1979).
28. P. Kroll, Mod. Phys. Lett. A **20**, 2667 (2005).