

Топологическая память на многосвязных планарных магнитных наноэлементах¹⁾

К. Л. Метлов²⁾

Донецкий физико-технический институт им. А. А. Галкина, 283048 Донецк, Россия

Институт вычислительной математики РАН им. Г. И. Марчука, 119333 Москва, Россия

Поступила в редакцию 11 апреля 2023 г.

После переработки 6 июня 2023 г.

Принята к публикации 8 июня 2023 г.

Предложена схема кодирования набора битовых строк в планарных магнитных наноэлементах с отверстиями. Получены аналитические выражения для соответствующих распределений намагниченности с точностью до гомотопии, даны конкретные примеры для двусвязного и трехсвязного случаев. Обсуждаются энергетические барьеры, защищающие эти состояния. По сравнению с набором односвязных наноэлементов такой же общей связности, наноэлементы с отверстиями могут хранить больше информации благодаря возможности задания ссылок между отдельными битами.

DOI: 10.31857/S1234567823140057, EDN: gyzifh

Современная концепция беговой памяти [1] широко используется в скирмионике [2] (на ферромагнитных [3] и, в последнее время, антиферромагнитных скирмионах [4]). Информация в ней кодируется как последовательность магнитных доменных границ/скирмионов в нанополосе. Здесь мы обобщим эту идею на многосвязный случай. Возможность последовательного считывания бит при этом теряется, но состояние элемента все же можно оценить по его частотной характеристике, как это продемонстрировано в [5].

Кодирование является топологическим в том смысле, что записанная информация устойчива к непрерывным деформациям (при выполнении граничных условий) распределения намагниченности. Скирмионная беговая память также топологически защищена, но описанная ниже схема позволяет (для связности > 1) хранить больше информации.

Известно, что состояния намагниченности в бесконечном двумерном ферромагнетике разбиваются на топологические классы [6]. Распределения одного класса эквивалентны с точностью до непрерывной деформации (гомотопии), а преобразование между распределениями разных классов требует создания сингулярности в векторном поле намагниченности, которая имеет бесконечную энергию в континуальной модели ферромагнетика. Классы можно пронумеровать целыми числами, а поле

намагниченности представить при помощи рациональных функций комплексной переменной [6]. Топологический индекс (номер класса) – общее количество пар вихрь-антивихрь в векторном поле (число скирмионов). В конечных наноэлементах могут присутствовать неполные пары (дополнительный вихрь [7] или антивихрь [8]), из-за чего число скирмионов становится полуцелым.

Топологическая защита делает память более надежной, но есть и ограничение, что алгебра целочисленного (или полуцелого) топологического индекса является абелевой. Имеет значение только общее количество вихрей/антивихрей внутри элемента. Если он может содержать от 0 до n скирмионов, то топологически защищено в нем только $\simeq \log_2 n$ бит информации. Обычный способ решения этой проблемы состоит в том, чтобы сделать магнитную среду многосвязной, используя множество (скажем, N) отдельных элементов, содержащих (или нет) вихри/скирмионы. Тогда алгебра топологического индекса перестает быть абелевой, так как помимо общего числа скирмионов становится важным – где именно они расположены. Так можно представить около $(1 + n)^N$ различных состояний. Рассмотренная здесь альтернатива состоит в том, чтобы использовать один наноэлемент с отверстиями. Он также является многосвязным с неабелевым топологическим индексом. Но, помимо хранения самих бит, в таком наноэлементе можно представить и ссылки между ними, что еще больше расширяет набор доступных топологически защищенных состояний.

¹⁾См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru

²⁾e-mail: metlov@donfti.ru

В качестве отправной точки возьмем (нормированную на $\mu_0 M_S^2$) плотность энергии ферромагнетика в континуальном приближении

$$e = L_E^2 \sum_{i=X,Y,Z} |\nabla m_i(\mathbf{r})|^2 + \mathbf{h}_D(\mathbf{r}, \{\mathbf{m}(\mathbf{r})\}) \cdot \mathbf{m}(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $L_E = \sqrt{C/(\mu_0 M_S^2)}$ – обменная длина, $C = 2A$ – обменная жесткость, μ_0 – проницаемость вакуума, M_S – намагниченность насыщения, $\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \mathbf{m}(\mathbf{r})/M_S$ – нормированный вектор локальной намагниченности в точке $\mathbf{r} = \{X, Y, Z\}$, $\nabla = \{\partial/\partial X, \partial/\partial Y, \partial/\partial Z\}$ – оператор градиента и $\mathbf{h}_D = \mathbf{H}_D/M_S$ – размагничивающее поле, созданное распределением намагниченности $\mathbf{m}(\mathbf{r})$. Рассматриваемые наноэлементы имеют форму (конечного) цилиндра, основание которого может содержать отверстия. Плоскость $OX-OY$ декартовой системы координат выберем параллельной основаниям цилиндра, а ось OZ перпендикулярной им. Предположим, что элемент достаточно тонок, чтобы распределение намагниченности можно было считать однородным по его толщине ($\partial \mathbf{m}/\partial Z = 0$). Стороной наноэлемента назовем поверхность, параллельную оси OZ и проходящую между основаниями цилиндра вдоль их границы. Многосвязные наноэлементы имеют количество сторон, равное связности основания.

Метаустойчивые распределения намагниченности $\mathbf{m}(\mathbf{r})$, минимизирующие объемный интеграл от (1), можно приближенно выразить [9] в терминах функции $w(z, \bar{z})$ комплексной переменной $z = X + iY$, $\bar{z} = X - iY$, $i = \sqrt{-1}$, представляя векторы намагниченности фиксированной длины $|\mathbf{m}| = 1$ в виде стереографической проекции $\{m_X + im_Y, m_Z\} = \{2w, 1 - w\bar{w}\}/(1 + w\bar{w})$. Для скирмионов функция w является голоморфной ($\partial w/\partial \bar{z} = 0$). В более общем случае магнитных вихрей (меронов [10]) она выражается через голоморфную функцию $f(z)$ в виде:

$$w(z, \bar{z}) = \begin{cases} f(z)/c_1 & |f(z)| \leq c_1 \\ \sqrt{f(z)/\bar{f}(\bar{z})} & c_1 < |f(z)| < c_2 \\ f(z)/c_2 & |f(z)| \geq c_2 \end{cases}, \quad (2)$$

где вещественные числа c_1 и c_2 задают размеры ядер солитонов. Центрам вихрей (скирмионов) соответствуют нули $f(z)$, а центрам антивихрей (антискирмионов) ее полюса. Чистые скирмионы реализуются при $c_1 = c_2$. В конечном планарном наноэлементе функция $f(z)$ выражается [9] как решение знаменитой задачи Римана–Гильберта о нахождении голоморфной функции без нормальных компонент

к границе области (соответствующей абсолютному минимуму энергии магнитных полюсов на сторонах частицы). Эта (однородная) задача имеет множество решений, которые параметризуются скалярами, связанными с положениями центров вихрей и антивихрей. Для получения конкретного равновесного распределения намагниченности в элементе определенного размера (и из определенного материала) необходимо вычислить полную энергию $E = \iiint e d^3r$ и минимизировать ее по c_1, c_2 , скалярным параметрам в $f(z)$. Такой подход Ритца гораздо проще исходной вариационной задачи.

Все метастабильные магнитные состояния в рамках этой модели состоят из двух типов магнитных вихрей и антивихрей: 1) целых, расположенных внутри наноэлемента и 2) разделенных на две закрепленные на его границе половинки. Предположим пока, что они никогда не смешиваются и что целый вихрь/антивихрь, созданный внутри наноэлемента, остается внутри, а половинки на границе там всегда и остаются.

Тогда информацию можно представить в виде последовательности полувихрей и полуантивихрей на границах многосвязного элемента. Поскольку обход вокруг любой границы должен соответствовать полному (или нескольким) обороту вектора намагниченности, на каждой границе всегда имеется четное число полувихрей и полуантивихрей. Для кодирования произвольных строк удобно представить символ (обозначим его A) парой соседних полувихрей на границе, а анти-символ (\bar{A}) парой полуантивихрей. Тогда на каждой границе (включая внешнюю) можно расположить строку из символов и антисимволов (количество таких строк равно связности элемента). Кроме того, поскольку каждый полувихрь и полуантивихрь на границе представляет собой начало идущей внутрь наноэлемента доменной стенки, есть две возможности: либо стенка начинается и заканчивается на той же границе, либо на другой границе. При помощи стенок второго типа можно представить ссылки между символами, если они начинаются с полувихрей/анти-вихрей из пары, кодирующей символ на одной границе, и заканчиваются на другой паре, кодирующей символ на другой границе.

Этим способом можно хранить битовые строки со ссылками между индивидуальными битами. Благодаря ссылкам, объем информации, содержащейся в многосвязном наноэлементе, больше, чем во множестве отдельных элементов той же общей связности.

Чтобы пояснить приведенную выше схему, рассмотрим пару примеров. Аналитическая функция $f(z)$ со скалярными параметрами, задающими поло-

жения центров магнитных вихрей и антивихрей, может быть выражена через вещественные мероморфные дифференциалы [11] или явно через функции Шоттки–Клейна [12]. При этом нужно учитывать, что в многосвязных наноэлементах существуют дополнительные уравнения связи [13] на положения вихрей и антивихрей, так что не все они независимы.

Рассмотрим двусвязное планарное концентрическое кольцо внешнего радиуса R и внутреннего $r < R$. Мы не будем сейчас минимизировать полную энергию частицы для определения равновесных значений скалярных параметров модели, а выберем их значения произвольно, что соответствует решению задачи с точностью до гомотопии. В таком случае нет смысла задавать и конкретный пространственный масштаб, поэтому расстояния будем измерять в единицах внутреннего радиуса, положив $r = 1$. Рассмотрим конформное отображение $z = Z(u) = \exp(2\pi u/T)$, $T = \pi/\log R$ прямоугольника $0 \leq \text{Re } u \leq 1/2$, $-T/2 \leq \text{Im } u < T/2$ на кольцо $1 \leq |z| \leq R$. Внутренняя граница кольца отображается им на $\text{Re } u = 0$, а внешняя на $\text{Re } u = 1/2$. Распределения намагниченности в таком кольце выражаются при помощи периодической с периодом T вдоль мнимой оси голоморфной функции $f(u)$ (на оригинальной комплексной плоскости $f(z) = f(u)Z'(u)$ при $u = Z^{(-1)}(z)$). Задать ее можно в терминах эллиптических тета-функций [11] через положения нулей (центров вихрей) и полюсов (центров антивихрей). Уравнения связи [13] легко удовлетворить, если разместить вихри и антивихри с фиксированным шагом по азимутальному углу: в точках $\text{Im } u = b_n = iT/2 - iT(n-1)/N$, где $1 \leq n \leq N$ и N – полное количество шагов по азимуту. Точки $u = b_n$ отображаются на внутреннюю границу кольца, а точки $u = a_n = 1/2 + b_n$ – на внешнюю. Введем так же средние точки внутри кольца $c_{n_1 n_2} = 1/4 + (b_{n_1} + b_{n_2})/2$ и несколько сдвинутых (из эстетических соображений) средних точек $d_{n_1 n_2} = 3/20 + c_{n_1 n_2}$, $e_{n_1 n_2} = -1/20 + c_{n_1 n_2}$. Пару соседствующих половинок вихрей на внешней границе обозначим символом A , пару половинок антивихрей на внешней границе – символом \bar{A} , а такие же пары на внутренней границе – символами B и \bar{B} соответственно. Введем 8 функций:

$$F_{n_1 n_2}^{\bar{A}}(u) = \frac{T_1(u - d_{n_1 n_2})T_1(u + \overline{d_{n_1 n_2}})}{T_1(u - a_{n_1})T_1(u - a_{n_2})},$$

$$F_{n_1 n_2}^{\bar{B}}(u) = \frac{T_1(u - e_{n_1 n_2})T_1(u + \overline{e_{n_1 n_2}})}{T_1(u - b_{n_1})T_1(u - b_{n_2})},$$

$$F_{n_1 n_2}^{B\bar{A}}(u) = -\frac{T_1(u - b_{n_1})T_1(u - \overline{b_{n_2}})}{T_1(u - a_{n_1})T_1(u - a_{n_2})},$$

$$F_{n_1 n_2}^{\bar{A}\bar{B}}(u) = -\left(\frac{T_1(u - c_{n_1 n_1})T_1(u + \overline{c_{n_1 n_1}})}{T_1(u - a_{n_1})T_1(u - b_{n_1})}\right) \times \left(\frac{T_1(u - c_{n_2 n_2})T_1(u + \overline{c_{n_2 n_2}})}{T_1(u - a_{n_2})T_1(u - b_{n_2})}\right),$$

$F_{n_1 n_2}^{A} = 1/F_{n_1 n_2}^{\bar{A}}$, $F_{n_1 n_2}^{B} = 1/F_{n_1 n_2}^{\bar{B}}$, $F_{n_1 n_2}^{\bar{B}A} = 1/F_{n_1 n_2}^{B\bar{A}}$, $F_{n_1 n_2}^{AB} = 1/F_{n_1 n_2}^{\bar{A}\bar{B}}$, где $T_1(u) = \theta_1(u, iT)$ и $\theta_1(\nu, \tau)$ – тета функция Ахиезера [14] (ее можно выразить через тета функцию Якоби как $\theta_1(\nu, \tau) = ie^{-i\pi(\nu-\tau/4)}\theta(\nu + (1-\tau)/2, \tau)$). Перемножая эти функции, можно представить произвольную конфигурацию битовых строк на границах кольца и ссылки между ними. Функции $F^A, F^{\bar{A}}, F^B, F^{\bar{B}}$ кодируют несвязанные биты строк, а функции $F^{AB}, F^{\bar{A}\bar{B}}, F^{B\bar{A}}, F^{\bar{B}A}$ кодируют пару бит на разных границах кольца, связанные ссылкой. Пример конфигурации, использующий все определенные выше функции, показан на рис. 1. Он соответствует следующему графу символов:

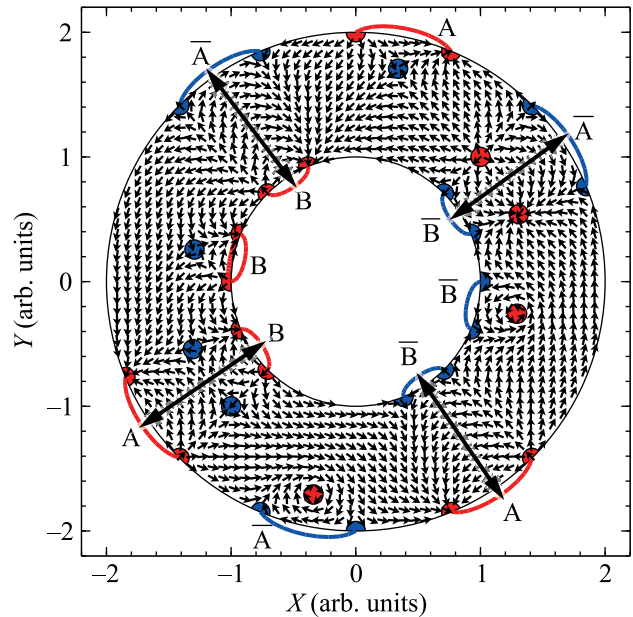


Рис. 1. (Цветной онлайн) Кольцо $R = 2$ с $N = 16$ в конфигурации $f(u) = iF_{1,2}^B F_{3,4}^{B\bar{A}} F_{5,6}^A F_{7,8}^{\bar{A}\bar{B}} F_{9,10}^B F_{11,12}^{\bar{B}A} F_{13,14}^{\bar{A}} F_{15,16}^{A\bar{B}}$. Красными точками отмечены центры вихрей и антивихрей

Записанные строки являются циклическими, что обозначено дополнительными ссылками между их началом и концом. Отметить начало строки можно введя дополнительные центры пиннинга для половинок вихрей на границе. Либо можно просто связать начальные биты строк A и B ссылкой. Тогда метки

на границе не нужны, но возможностей для кодирования информации ссылками становится меньше.

В нанозементах большей связности магнитные состояния можно факторизовать аналогичным образом [12], используя функцию Шоттки–Клейна. Рассмотрим здесь канонические круговые области с вырезанными окружностями. Любые другие области могут быть конформно отображены на одну из таких областей той же связности. Каждое отверстие налагает дополнительное ограничение [13] на положения вихрей и антивихрей, которое также видоизменяется при конформном отображении. Явный вид этих ограничений для связности > 2 еще не известен. К счастью, достаточно управлять только положением и хиральностью вихрей, чтобы построить все необходимые состояния в рамках данной схемы кодирования. Антивихри при этом появляются “автоматически” в правильных положениях, удовлетворяющих всем уравнениям связи. Для этого введем две функции – одну для вихрей внутри наноземента, другую для полувихрей на его границах:

$$B_{z_0}^c(z) = \frac{(\omega(z, z_0)\omega(1/z, 1/z_0))^{-c}}{(\omega(z, 1/\bar{z}_0)\omega(1/z, \bar{z}_0))^{\bar{c}}},$$

$$S_{z_2}^{z_1}(z) = \frac{\omega(z, z_1)}{\omega(z, z_2)}, \quad (4)$$

где $\omega(z, \zeta)$ – функция Шоттки–Клейна [15], z_0 – положение вихря внутри наноземента, параметр c управляет его хиральностью (позволяя вращать все моменты в его окрестности от левостороннего к правостороннему, а также от истока к стоку), z_1 и z_2 – положения полувихрей на границе (внутренней или внешней). Функция ω зависит не только от своих аргументов, но также от связности и формы наноземента. Для односвязной области $\omega = \omega_1 = z - \zeta$. Функцию f , определяющую распределение намагниченности (в рамках модели [9]) в многосвязной области с заданным положением вихрей на границах и в объеме, можно выразить через логарифмическую производную любого произведения P функций (4)

$$\frac{2\pi}{f} = \frac{d \log P}{dz}. \quad (5)$$

Пример такого распределения показан на рис. 2. Обратите внимание, что центральный антивихрь на рисунке не кодирует никакой информации и присутствует лишь потому, что количество антивихрей минус количество вихрей равно [12, 13] связности области минус 2. Изображенное состояние представляет граф

$$\overleftrightarrow{B\bar{B}\bar{B}} \leftrightarrow \overleftrightarrow{C\bar{C}\bar{C}\bar{C}} \leftrightarrow \overleftrightarrow{A\bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A}\bar{A}}. \quad (6)$$

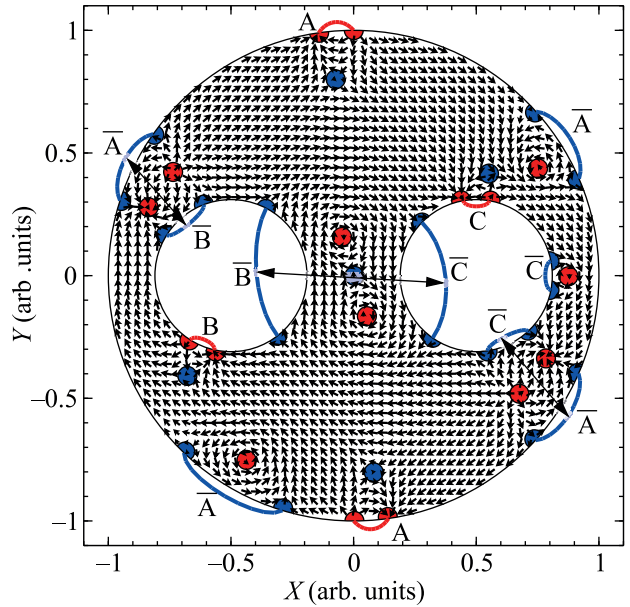


Рис. 2. (Цветной онлайн) Трехсвязный планарный наноземента радиуса $R_3 = 1$ с двумя круговыми отверстиями радиуса $r_3 = 0.3$ с центрами в $Y = 0, X = \pm\delta, \delta = 0.5$. Конфигурация намагниченности определена произведением $P = S_{\delta+r_3e^{i5\pi/9}}^{\delta+r_3e^{i4\pi/9}} S_{-\delta+r_3e^{-i41\pi/72}}^{-\delta+r_3e^{-i49\pi/72}} S_{e^{-i5\pi/11}}^{e^{-i\pi/2}} S_{e^{i\pi/2}}^{e^{i6\pi/11}} B_{0.87}^{0.65i} B_{-0.05+0.16i}^{0.7i} B_{0.05-0.16i}^{0.7i} B_{0.87e^{i\pi/6}}^{-i/2} B_{0.87e^{i4\pi/3}}^{-i/2} B_{0.7e^{-i\pi/12}}^{0.7e^{-i11\pi/12}} B_{0.85e^{i5\pi/6}}^{0.7e^{i11\pi/12}} B_{0.88e^{i9\pi/10}}^{0.7e^{-i\pi/12}} B_{0.85e^{i\pi/5}}^{0.7e^{i11\pi/12}} B_{0.88e^{-i\pi/8}}^{0.7e^{-i\pi/8}}$ и (5)

Нужно отметить, что определенные выше факторизации для магнитных состояний полностью учитывают обменное взаимодействие, задаваемое первым членом в (1). При любых фиксированных положениях вихрей/антивихрей – эти поля намагниченности (в том числе и на рис. 1, 2) удовлетворяют уравнениям Эйлера для функционала обменной энергии. Магнитостатическое взаимодействие учитывается лишь приближенно за счет принципа избегания полюсов.

Поскольку минимизация по скалярным параметрам не проводилась, оба примера показывают распределения намагниченности с точностью до гомотопии (непрерывной деформации). В действительности, если принять во внимание материал и размеры наноземента, вихри и антивихри будут деформироваться и смещаться, прежде чем займут свои равновесные положения. Эта конфигурация может быть рассчитана по методу Ритца на основе приведенных выше пробных функций. Либо, с подходящим выбором начальных положений вихрей и хиральностей, эти функции можно использовать как затравочную конфигурацию для микромагнитного расчета методом конечных элементов.

Если граничные полувихри/полуантивихри остаются на своих границах, а вихри не аннигилируют с антивихрями – нет возможности плавно деформировать векторное поле намагниченности так, чтобы исказить сохраненный граф символов. Ссылки между символами соответствуют магнитным доменам, проходящим от одной границы до другой, число которых тоже топологически защищено. Это потому, что количество полных оборотов вектора намагниченности по любому контуру внутри наноземента сохраняется по отношению ко всем его непрерывным деформациям. При этом, не связанные ссылками символы (пары полувихрей/полуантивихрей на одной границе) не дают полного поворота вектора намагниченности вдоль любого контура, кроме точно лежащего на границе частицы.

Обсудим теперь энергетические барьеры.

Барьер аннигиляции вихря с антивихрем в континуальной модели бесконечен из-за сингулярности векторного поля намагниченности, возникающей при изменении топологического индекса. В реальном дискретном материале этот барьер конечен и определяется балансом обменного и магнитостатического взаимодействий [16]. Он достаточно высок, чтобы доменные стенки с перетяжками (линейные кристаллы вихрей и антивихрей) были статически стабильными при комнатной температуре [17].

Полувихри/полуантивихри не могут просто удалиться от границы (или быть вытолкнуты из наноземента), так как при этом обязательно возникнут боковые магнитные заряды, а их магнитостатическая энергия строго положительна. Соответствующий барьер конечен и достаточно высок, чтобы удерживать боковые полувихри/полуантивихри во встречных доменных стенках (например, вихревых [18]) при комнатной температуре.

Наконец, главный барьер, делающий топологический индекс неабелевым, препятствует слиянию двух полувихрей/полуантивихрей в полный вихрь/антивихрь, входящий внутрь наноземента. Такое слияние возможно без образования боковых магнитных зарядов. Барьер в этом случае формируется за счет взаимодействия торцевых магнитных полюсов в ядрах полувихря/полуантивихря, которые имеют одинаковые полярности и отталкиваются друг от друга. Оценка его высоты дана в Приложении. Известно также, что квазиоднородное состояние намагниченности типа “С” в нанодисках, с подобным балансом энергий, устойчиво в широком диапазоне размеров дисков [19] (что также подтверждается численно и экспериментально при комнатной температуре в работе [20]).

Перечисленные энергетические барьеры существуют не только по отдельности. Недавние эксперименты [21] и моделирование [22] на нанополосках показывают существование и устойчивость при комнатной температуре подобных метастабильных связанных состояний вихрей и антивихрей, включая закрепленные на границе половинки. Односвязная нанополоска является тривиальным предельным случаем настоящего рассмотрения, но энергетические барьеры в ней по существу идентичны. Наблюдения [21, 22] являются убедительным свидетельством того, что описанные состояния с неабелевым топологическим индексом могут быть реализованы на практике.

В целом, энергетический ландшафт сложен и (из-за дальнедействующих магнитостатических сил) зависит от общей формы наноземента. Его точная оценка и оптимизация могут быть интересной задачей для численного моделирования. Чем выше барьеры, тем более длинные цепочки бит может удерживать наноземента.

Подводя итог, можно сказать, что в работе вводится схема кодирования, позволяющая представить набор битовых строк со ссылками в виде магнитных состояний многосвязных планарных наноземента. Благодаря ссылкам, многосвязные наноземента могут содержать больше информации по сравнению с набором изолированных односвязных планарных магнитных наноземента той же общей связности. Построены аналитические выражения для соответствующих распределений намагниченности в двусвязном и общем многосвязном случаях с точностью до гомотопии. Их применение проиллюстрировано для двух конкретных наборов битовых строк со ссылками в двух- и трехсвязном случаях. Обсуждаются энергетические барьеры, защищающие информационные состояния. Оптимизация этих барьеров может стать интересной задачей для дальнейших исследований.

Автор благодарит за поддержку Российский научный фонд в рамках проекта # 21-11-00325.

Приложение. Барьер деления вихря. Оценим энергетический барьер, препятствующий расщеплению магнитного вихря, подталкиваемого к границе наноземента, на две привязанных к границе половинки. Или наоборот – процессу объединения двух половинок вихря на границе в полный вихрь с его входом внутрь наноземента.

Сама по себе обменная энергия не создает энергетического барьера для вихря на границе, она просто пытается вытолкнуть его из наноземента, чтобы сделать конфигурацию максимально однород-

ной. Торцевые заряды внутри двух ядер полуви-
ря/полуантивири имеют одинаковую полярность и
создают силу отталкивания, а объемные заряды име-
ют разную полярность и создают силу притяжения.
Зависимости этих двух противоборствующих сил от
геометрии нанозлемента (в первую очередь от его
толщины), однако, различны, что позволяет созда-
вать и контролировать энергетический барьер.

Для конкретной оценки, рассмотрим простейший
случай нанозлемента в форме диска радиуса R и тол-
щины L с конфигурацией намагниченности, описы-
ваемой комплексной функцией

$$f(z) = s \left(i(1-t)z + \frac{t-z^2\bar{t}}{2} \right), \quad (\text{A.1})$$

где s управляет размером ядра вихря (в него вхо-
дит и параметр c_1 из (2)), так что можно положить
 $c_1 = 1$ и $c_2 \rightarrow \infty$), а $0 \leq t \leq 1$ – смещением его
центра и расстоянием между расщепленными полу-
вихрями. Эта функция по существу такая же, как и
в [9], но с несколько иной параметризацией, позво-
ляющей ограничить изменения размера ядра вихря
при изменении параметра t во всем интервале. При
 $t < 1/2$ вихрь находится внутри диска, при $t = 1/2$ он
лежит точно на границе, а при $t > 1/2$ расщепляет-
ся на два полувири. (Пример с расщеплением анти-
вихря был бы неизбежно более сложным из-за необ-
ходимости вводить дополнительные переменные, но
энергетический баланс между объемными и торце-
выми зарядами половинок антивири аналогичен.)

Полная энергия (1) конфигурации (A.1) в еди-
ницах $\mu_0 M_S^2 V$, $V = \pi R^2 L$ является функцией че-
тырех безразмерных параметров: t , s , $g = L/R$ и
 $\lambda = L/L_E$. Ее зависимость от t , вычисленная прямым
численным интегрированием и минимизацией (от-
дельно для каждого значения t) полной энергии по
 s , для $g = 0.1$ и $\lambda = 0.8$ показана на рис. 1А. Полное
вычисление приведено в дополнительном материале
к статье в виде программы для Wolfram Mathematica
(см. дополнительные материалы).

Видно, что существуют две устойчивые конфигу-
рации, разделенные энергетическим барьером: одна с
магнитным вихрем внутри частицы при $t < 1/2$, дру-
гая с двумя полувириями на границе при $t > 1/2$. Вы-
сота барьера составляет примерно $\Delta e \approx 0.017$ в без-
размерных единицах рис. 1А. Если предположить,
что диск изготовлен из материала, подобного перм-
аллою с намагниченностью насыщения $\mu_0 M_S = 1$ Тл
и обменной длиной $L_E = 5.7$ нм, высота барьера рав-
на $\Delta e \mu_0 M_S^2 \pi L_E^3 \lambda^3 / g^2 \approx 4.0 \cdot 10^{-19}$ Дж, что на два по-
рядка выше $k_B T \approx 4.1 \cdot 10^{-21}$ Дж при комнатной тем-
пературе.

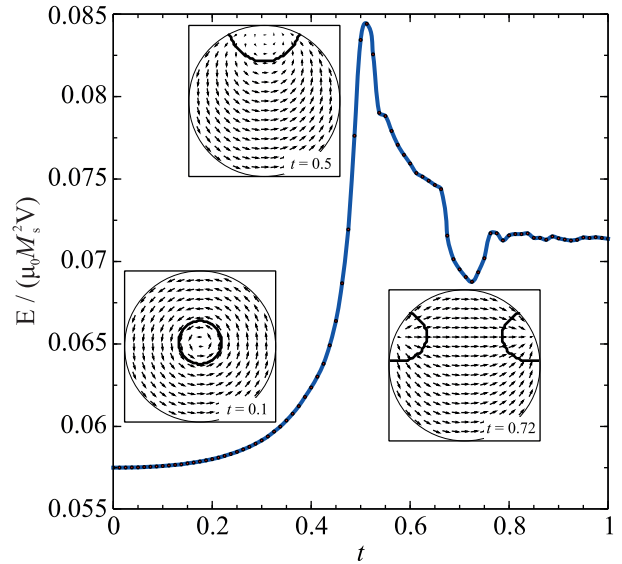


Рис. 1А. (Цветной онлайн) Нормированная полная энергия магнитного диска с $g = L/R = 0.1$ и $\lambda = L/L_E = 0.8$ как функция параметра смеще-
ния/разделения вихря t . На вставках показаны рас-
пределения намагниченности (A.1) при некоторых зна-
чениях t (границы ядер вихрей/полувирием показаны
контурными)

1. S. S. P. Parkin, M. Hayashi, and L. Thomas, *Science* **320**, 190 (2008).
2. A. Fert, V. Cros, and J. Sampaio, *Nat. Nanotechnol.* **8**, 152 (2013).
3. R. Tomasello, E. Martinez, R. Zivieri, L. Torres, M. Carpentieri, and G. Finocchio, *Sci. Rep.* **4**, 6784 (2014).
4. S. Qiu, J. Liu, Y. Chen, X. Qi, and L. Fang, *J. Magn. Magn. Mater.* **554**, 169144 (2022).
5. S. Jain, V. Novosad, F. Fradin, J. Pearson, V. Tiberkevich, A. Slavin, and S. Bader, *Nat. Commun.* **3**, 1330 (2012).
6. A. A. Belavin and A. M. Polyakov, *JETP Lett.* **22**, 245 (1975).
7. A. Wachowiak, J. Wiebe, M. Bode, O. Pietzsch, M. Morgenstern, and R. Wiesendanger, *Science* **298**, 577 (2002).
8. V. L. Mironov, O. L. Ermolaeva, S. A. Gusev, A. Y. Klimov, V. V. Rogov, B. A. Gribkov, O. G. Udalov, A. A. Fraerman, R. Marsh, C. Checkley, R. Shaikhaidarov, and V. T. Petrashov, *Phys. Rev. B* **81**, 094436 (2010).
9. K. L. Metlov, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 107201 (2010).
10. D. J. Gross, *Nucl. Phys. B* **132**, 439 (1978).
11. A. B. Bogatyrev, *Theor. Math. Phys.* **193**, 1547 (2017).
12. A. B. Bogatyrev and K. L. Metlov, *Low Temp. Phys.* **41**, 984 (2015).

13. A. B. Bogatyřev and K. L. Metlov, *Phys. Rev. B* **95**, 024403 (2017).
14. N. Akhiezer, *Elements of the Theory of Elliptic Functions, Translations of mathematical monographs*, American Mathematical Society (1990).
15. D. G. Crowdy and J. S. Marshall, *Comput. Meth. Funct. Theor.* **7**, 293 (2007).
16. M. Potkina, I. Lobanov, H. Jónsson, and V. Uzdin, *J. Magn. Magn. Mater.* **549**, 168974 (2022).
17. E. E. Huber, Jr., D. O. Smith, and J. B. Goodenough, *J. Appl. Phys.* **29**, 294 (1958).
18. A. Bisig, M. Stärk, M.-A. Mawass, C. Moutafis, J. Rhensius, J. Heidler, F. Büttner, M. Noske, M. Weigand, S. Eisebitt, T. Tyliczszak, B. Van Waeyenberge, H. Stoll, G. Schütz, and M. Kläui, *Nat. Commun.* **4**, 2328 (2013).
19. K. L. Metlov and Y. P. Lee, *Appl. Phys. Lett.* **92**, 112506 (2008).
20. M. J. Martínez-Pérez, B. Müller, J. Lin, L. A. Rodriguez, E. Snoeck, R. Kleiner, J. Sesé, and D. Koelle, *Nanoscale* **12**, 2587 (2020).
21. E.-M. Hempe, M. Kläui, T. Kasama, D. Backes, F. Junginger, S. Krzyk, L. J. Heyderman, R. Dunin-Borkowski, and U. Rüdiger, *Phys. Stat. Sol. A* **204**, 3922 (2007).
22. V. Estévez and L. Laurson, *Phys. Rev. B* **91**, 054407 (2015).