

# Резонансы для явно решаемой модели ультразвукового рассеяния мембраной клетки

И. Ю. Попов<sup>1)</sup>, Т. С. Юрова<sup>1)</sup>

Университет ИТМО, 197101 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 7 мая 2023 г.

После переработки 11 июня 2023 г.

Принята к публикации 13 июня 2023 г.

Мы изучаем резонансы при рассеянии акустических волн клеточной мембраной. В связи с тем, что мы имеем дело только с этим явлением, мы используем простейшую модель мембраны как потенциала, сосредоточенного на поверхности. Получена асимптотика функции Грина с особенностью на поверхности. Исследовано влияние кривизны поверхности на резонансы. Обсуждается применение полученного результата для объяснения избирательного разрушения мембран раковых клеток в ультразвуковом поле.

DOI: 10.31857/S1234567823140124, EDN: hacawb

**1. Вступление.** Это исследование мотивировано биофизическими проблемами, связанными со сравнением мембран нормальных и раковых клеток. Мембрана является важной разделительной структурой в эукариотических клетках. Хотя мембрана тонкая (7–8 мкм), она имеет сложную структуру, состоит из липидного бислоя, в состав которого входят белковые молекулы [1]. Мембрана играет защитную роль, разделяя внутреннюю часть клетки и окружающую среду, а также выполняет транспортную функцию. Существуют различные модели клеточных мембран (см., например, [1–6]). Одной из наиболее часто используемых модельных мембранных систем является мультислойная липосома [7]. Она состоит из множества концентрических слоев липидного двойного слоя, напоминающего в поперечном сечении луковицу. Мембранные модельные системы широко использовались для выявления свойств липидов в мембранах. В настоящей работе мы изучаем только один аспект проблемы: воздействие ультразвука на клеточную мембрану. Исследование было мотивировано экспериментальной работой [8], связанной с разрушением клеток акустическим полем. Было известно, что клеточная мембрана меняет свои свойства в ультразвуковом поле [9]. Авторы [8] выявили интересное явление, связанное с внедрением наночастиц в клетку. Они показали, что интенсивное ультразвуковое излучение приводит к разрушению раковых и нормальных клеток, в результате чего выживает около 65 % клеток обоих типов. С другой стороны, добавле-

ние наночастиц золота приводит к тому, что из нормальных клеток выжили 60 %, а из раковых - 30 %, т.е. мембраны раковых клеток разрушаются быстрее. Это открывает путь селективного разрушения раковых клеток. Для успешного технологического применения необходимо понять поведение клетки в акустическом поле. Однако на данный момент нет теоретического объяснения и математической модели наблюдаемых явлений. В этой статье мы представляем математическую основу модели. Начнем с известного факта, что раковая клетка имеет неровную границу в отличие от нормальной клетки, которая имеет гладкую границу. Если на клетку воздействовать ультразвуковым полем, то внедренные наночастицы играют роль точечных источников для акустического поля. Для выяснения их влияния следует исследовать функцию Грина (т.е. поле точечного источника) для задачи, точнее, асимптотику функции Грина вблизи точечного источника. Это тема нашей статьи. Нас интересуют только акустические явления. Именно поэтому мы рассматриваем простейшую модель клеточной мембраны – потенциал, сосредоточенный на поверхности. Точнее, мы имеем дело с оператором Лапласа, возмущенным потенциалом с носителем на поверхности. Такие операторы широко исследуются в последнее время [10–19]. Нас интересует влияние точечного источника, расположенного на поверхности, на рассеяние плоской волны. Точнее, вопрос: изменится ли ситуация, если кривизна поверхности в точке вблизи источника стала больше? Для ответа на вопрос найдем асимптотику функции Грина вблизи точки источника. Следующим шагом является исследование резонансов для задачи рассеяния. Мы изу-

<sup>1)</sup> e-mail: popov1955@gmail.com;  
tatiana.yurova@metalab.ifmo.ru

чаем влияние кривизны границы на положение резонансов на комплексной плоскости, влияющее на локальное усиление акустического поля.

**2. Асимптотика функции Грина.** Пусть  $\Omega$  – ограниченная область,  $\Omega = \{x : \Phi(x) < 0\}$ , с гладкой границей  $\Gamma \in C^\beta, \beta > 3$ ,  $\Phi \in C^\beta$ . Мы рассматриваем оператор Лапласа в  $L_2(\mathbf{R}^3)$ , возмущенный потенциалом, сосредоточенным на  $\Gamma$  (т.е. с полупрозрачной границей  $\Omega$ ). Таким образом, область определения оператора состоит из функций из пространства Соболева  $W_2^2(\mathbf{R}^3)$ , удовлетворяющих следующему граничному условию на  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} v|_{\Gamma_+} &= v|_{\Gamma_-}, \\ \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\Gamma_+} - \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\Gamma_-} &= \alpha v|_{\Gamma_-}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\alpha$  – некоторый вещественный параметр. Этот оператор самосопряжен. Чтобы ввести точечное взаимодействие, являющееся моделью наночастицы в точке  $x_0$ , мы используем стандартную процедуру “сужения–расширения” (см., например, [20–22]). А именно, мы сужаем исходный оператор на множество гладких функций, обращающихся в нуль в точке  $x_0$ . Замыкание этого оператора есть симметрический оператор с индексами дефекта  $(1, 1)$ . Функция Грина исходного самосопряженного оператора с особенностью в точке  $x_0$  играет роль дефектного элемента. Самосопряженное расширение суженного оператора дает нам модельный оператор, описывающий точечное взаимодействие (потенциал нулевого радиуса). Расширение неединственно. Его выбор реально означает, что фиксируется значение логарифмической производной волновой функции, умноженной на радиальную координату  $r$ , по  $r$  [20, 23]. В результате приходим к явно решаемой модели, позволяющей получить решение задачи рассеяния в явном виде:

$$\Psi(x) = \psi(x) + aG(x, x_0, k), \quad (2)$$

где  $\psi(x)$  – решение задачи рассеяния без точечного возмущения. При прочих равных условиях именно функция Грина дает эффект присутствия наночастицы. Соответственно, необходимо изучить поведение функции Грина около точки  $x_0$  для раковой и нормальной клеток, т.е. асимптотики функции Грина в окрестности  $x_0$  в случаях большой и малой кривизны поверхности в точке  $x_0$ . Рассмотрим эту задачу.

Функция Грина  $G(x, x_0, k)$  с особенностью в точке  $x_0 \in \Gamma = \partial\Omega$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} G(x, x_0, k) &= (4\pi|x-x_0|)^{-1} e^{ik|x-x_0|} + \\ &+ v(x, x_0, k), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $v(x, x_0, k)$  – решение следующей краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta v + k^2 v &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\Gamma_+} - \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\Gamma_-} &= \alpha v + \alpha \frac{e^{ik|x-x_0|}}{4\pi|x-x_0|}. \end{aligned} \quad (4)$$

Функцию  $v(x, x_0, k)$  ищем как потенциал простого слоя

$$\begin{aligned} v(x, x_0, k) &= \\ &= \int_{\Gamma} \rho(s, x_0) (4\pi|x-s|)^{-1} \exp(ik|x-s|) ds. \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая вид предельного значения нормальной производной потенциала простого слоя на границе, преобразуем граничное условие для функции  $v$  (14) к следующему интегральному уравнению для функции  $\rho(x, x_0)$

$$\begin{aligned} \rho(x, x_0) + \int_{\Gamma} \rho(s, x_0) \\ \left( \left( ik - \frac{1}{|x-s|} \right) \cos(n_x, x-s) - \alpha \right) \\ \frac{e^{ik|x-s|}}{8\pi^2|x-s|} ds = \alpha \frac{e^{ik|x-x_0|}}{8\pi^2|x-x_0|}, \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы найти главный член асимптотики функции Грина, мы решаем уравнение (6) методом итераций. Оценка показывает, что поверхностный интеграл имеет следующее асимптотическое поведение при  $|x-x_0| \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} I = \int_{\Gamma} \frac{ds}{|x-s||s-x_0|} &= 2\pi\sqrt{1+L^2+N^2} \ln \frac{1}{|x-x_0|} + \\ &+ O(|x-x_0|^0), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $L, N$  – главные кривизны поверхности  $\Gamma$  в точке  $x_0$ . Следовательно, функция Грина  $G(x, x_0, k)$  с особенностью в точке  $x_0 \in \Gamma = \partial\Omega$  для оператора Лапласа в  $L_2(\mathbf{R}^3)$ , возмущенного потенциалом, сосредоточенным на  $\Gamma$ , имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} G(x, x_0, k) &= \frac{e^{ik|x-x_0|}}{4\pi|x-x_0|} + \\ &+ \frac{\alpha\sqrt{1+L^2+N^2}}{16\pi^2} \ln \frac{1}{|x-x_0|} + O(|x-x_0|^0). \end{aligned} \quad (8)$$

**3. Исследование резонансов в задаче рассеяния.** Теперь обратимся к вычислению и оценке резонансов, которые в этой задаче появляются как полюса матрицы рассеяния. Решение задачи рассеяния для оператора Лапласа имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Psi(x, \nu, k) &= \psi(x, \nu, k) + \\ &+ c\psi(x_0, \nu, k) G(x, x_0, k) \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\psi(x, \nu, k)$  – проходящая волна,  $c\psi(x_0, \nu, k)G(x, x_0, k)$  – рассеянная волна на нерегулярности границы в точке  $x_0$ . Чтобы найти резонансы, решаем следующее уравнение

$$S(k)e = 0, \tag{10}$$

где  $S(k)$  – матрица рассеяния для нашей задачи. При данной матрице рассеяния задача ставится так: требуется найти такие значения спектрального параметра  $k$ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$\int_{\Sigma_1} S(\nu, \nu', k) e(\nu') d\nu' + \frac{ik}{2\pi} c\psi(x_0, \nu, k) \times \int_{\Sigma_1} \psi(x_0, \nu', k) e(\nu') d\nu' = 0 \tag{11}$$

т.е. найти соответствующие  $e, e \in L_2(\Sigma_1), \Sigma_1 = \{v : |v| = 1\}$ . Следуя [21], можно преобразовать уравнение (11) следующим образом

$$e(\nu'') = -\frac{ik}{2\pi} \int_{\Sigma_1} d\nu [S]^{-1}(\nu'', \nu, k) \times \int_{\Sigma_1} c\psi(x_0, \nu, k) \psi(x_0, \nu'', k) e(\nu') d\nu', \tag{12}$$

где  $[S]^{-1}(\nu'', \nu, k)$  – ядро оператора  $[S]^{-1}$ . Так как клетка – замкнутый звездный рассеиватель, оператор-функция  $S(k)$  с обобщенным ядром  $S(\nu, \nu', k)$  невозмущенной задачи не имеет корней в полосе  $0 \leq \text{Im } k \leq \delta$  в верхней полуплоскости  $k$ . Поэтому по принципу симметрии этот оператор может быть продолжен в полосу  $|\text{Im } k| \leq \delta$  и является обратимой ограниченной оператор-функцией. Используя следующее соотношение

$$([S]^{-1}(k)\psi)(x, \nu'', k) = \overline{\psi(x, \nu'', \bar{k})}, \tag{13}$$

получаем

$$e(\nu'') = -\frac{ik}{2\pi} c\overline{\psi(x_0, \nu'', \bar{k})} \times \int_{\Sigma_1} d\nu' \psi(x_0, \nu', k) e(\nu') d\nu'. \tag{14}$$

Пусть  $k_{n_0}^2 = \lambda_{n_0}$  – собственные значения рассеивателя. Рассмотрим уравнение (14) в окрестности одного из этих значений. Обратим внимание на коэффициент  $c$  в (9). Он выражается в терминах функции  $D(k)$  следующим образом:

$$D(k) = \lim_{x \rightarrow x_0} (G(x, x_0, k) - \text{Re } G(x, x_0, k_0)). \tag{15}$$

Коэффициент  $c$  пропорционален  $(D(k))^{-1}$ . При нашем выборе точечного взаимодействия имеем  $c = (D(k))^{-1}$ . Следовательно, необходимо рассмотреть

поведение этой функции в окрестности  $k_m$ . Для этого используем формулу Рисса–Герглотца и преобразование Фурье

$$D(k) = (k^2 - k_0^2) \sum_n \frac{|\psi_n(x_0)|^2}{(\lambda_{n_0} - \lambda)(\lambda_{n_0} - k_0^2)} + \int \left( \frac{1}{s - \lambda} - \left( \frac{1}{s - \lambda_0} + \frac{1}{s - \bar{\lambda}_0} \right) \right) d\xi_s(x_0, x_0), \tag{16}$$

где первый член связан со спектральным проектором, соответствующим дискретному спектру,  $\psi_n(x)$  – собственная функция, соответствующая собственному значению  $\lambda_{n_0}$ ,  $\xi_s(x_0, x_0)$  – ядро спектрального проектора, соответствующего непрерывному спектру, которое допускает представление

$$\xi(x, y) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{|\mathcal{x}| < s} \varphi(x, \mathcal{x}) \overline{\varphi(y, \mathcal{x})} d^3\mathcal{x}. \tag{17}$$

Таким образом, уравнение (16) преобразуется к виду

$$D(k) = (k^2 - k_0^2) \sum_n \frac{|\psi_n(x_0)|^2}{(\lambda_{n_0} - \lambda)(\lambda_{n_0} - k_0^2)} + \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \sqrt{s} ds \left[ \frac{1}{s - \lambda} - \frac{s}{(s - \sigma_0)^2 + \delta_0^2} \right] \times \int_{\Sigma_1} |\varphi(x_0, \nu, \sqrt{s})|^2 d\nu, \quad \lambda_0 = \sigma_0 + i\delta_0. \tag{18}$$

Поэтому для спектрального параметра  $k^2$ , близкого к собственному значению  $k_{n_0}^2$ , имеем

$$\frac{c}{k^2 - k_{n_0}^2} = c_{n_0} + o\left((k^2 - k_{n_0}^2)^0\right), \tag{19}$$

$$c_m = \lim_{k \rightarrow k_{n_0}} \frac{c}{k^2 - k_{n_0}^2}.$$

Тогда, принимая во внимание (19), уравнение (14) преобразуем к форме

$$e(\nu'') = \frac{-ik}{2\pi} (k^2 - k_{n_0}^2) \int_{\Sigma_1} c(k^2 - k_{n_0}^2) \times \overline{\psi(x_0, \nu'', \bar{k})} \psi(x_0, \nu', k) e(\nu') d\nu'. \tag{20}$$

Нетривиальное решение уравнения (20) существует, только если определитель Фредгольма равен нулю. Значит, если  $k - k_{n_0}$  мало, то можно получить представление

$$1 = -\frac{ik}{2\pi} (k^2 - k_{n_0}^2) \int_{\Sigma_1} c_{n_0} \overline{\psi(x_0, \nu, \bar{k})} \psi(x_0, \nu, k) d\nu. \tag{21}$$

Мы хотим найти решение  $k = k_n$  уравнения (21) в

окрестности  $k = k_{n_0}$ , где  $k \approx k_n$  и, соответственно,  $k + k_n \approx 2k_n$ . Учитывая это, получаем

$$k_n = k_{n_0} + \frac{i\pi}{k_{n_0}^2 c_n \int_{\Sigma_1} |\psi^{ex}(x_0, \nu, k_{n_0})|^2 d\nu} + o\left((k^2 - k_{n_0}^2)^0\right). \quad (22)$$

Обратимся теперь к оценке модуля волновой функции. Волновая функция задачи может быть представлена как сумма падающей и рассеянной волн

$$\psi^{ex}(x, \nu, k) = e^{ik(x, \nu)} + \psi_0^{ex}(x, \nu, k). \quad (23)$$

Мы ищем рассеянную волну в виде потенциала простого слоя

$$\psi_0^{ex}(x, \nu, k) = \int_{\Gamma} \rho(s, \nu) \frac{e^{ik|x-s|}}{4\pi|x-s|} ds. \quad (24)$$

Эта функция удовлетворяет следующей краевой задаче

$$\begin{aligned} \Delta \psi_0^{ex} + k^2 \psi_0^{ex} &= 0, \\ \frac{\partial \psi_0^{ex}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_+} - \frac{\partial \psi_0^{ex}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_-} &= \alpha \psi_0^{ex} + \alpha e^{ik(x, \nu)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда, используя значение нормальной производной потенциала простого слоя на границе, мы приходим к следующему интегральному уравнению для  $\rho(x, \nu)$ :

$$\begin{aligned} \rho(x, \nu) + \int_{\Gamma} \rho(s, \nu) \times \\ \times \left( \cos(n_x, x-s) \left( ik - \frac{1}{|x-s|} \right) - \alpha \right) \frac{e^{ik|x-s|}}{4\pi|x-s|} ds = \\ = \alpha e^{ik(x, \nu)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Решаем уравнение с помощью итераций. Рассмотрим уравнение на гладкой поверхности  $\Gamma$ ,  $x_0 \in \Gamma$ :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma} \frac{ds}{|x-s|} ds = \\ &= \sqrt{1+L^2+N^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\epsilon \frac{|s|d|s|}{|x-s|} + O(|x|^0) = \\ &= \sqrt{1+L^2+N^2} \text{const} + O(|x|^0), \end{aligned} \quad (27)$$

где  $L, N$  – коэффициенты второй квадратичной формы на касательной плоскости в точке  $x_0$ . Значит, решение задачи рассеяния имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi^{ex}(x, \nu, k) &= e^{ik(x, \nu)} + \\ &+ \alpha \sqrt{1+L^2+N^2} \text{const} + O(|x|^0). \end{aligned} \quad (28)$$

Видно, что увеличение кривизны приводит к локальному увеличению рассеянного акустического поля около точки, где кривизна велика. Обсудим это в следующем разделе.

**4. Результаты моделирования.** Чтобы проиллюстрировать эффект, мы провели вычислительные эксперименты на модельных областях. В вычислительной модели брались следующие значения параметров:

- Частота падающей волны – 4 МГц;
- размер клетки – 10 микрон;
- скорость звука в среде:
  - в воде – 1470 м/с,
  - в клетке – 1540 м/с.

Что касается геометрии модельной задачи, здоровая клетка представлена сферой, а раковая – правильными многогранниками (додекаэдром, икосаэдром, октаэдром, в порядке возрастания кривизны в некоторых точках). Материал клеток легких был использован при расчетах как материал клетки. Клетка окружена водой. Наночастицы внутри клетки представлены точечными источниками акустических волн.

Ожидалось, что значение давления в случае раковой клетки, т.е. для одного из правильных многогранников, будет больше для сферы (т.е. у здоровой клетки), из-за большей кривизны поверхности многогранника в некоторых точках. Рисунок 1 показы-

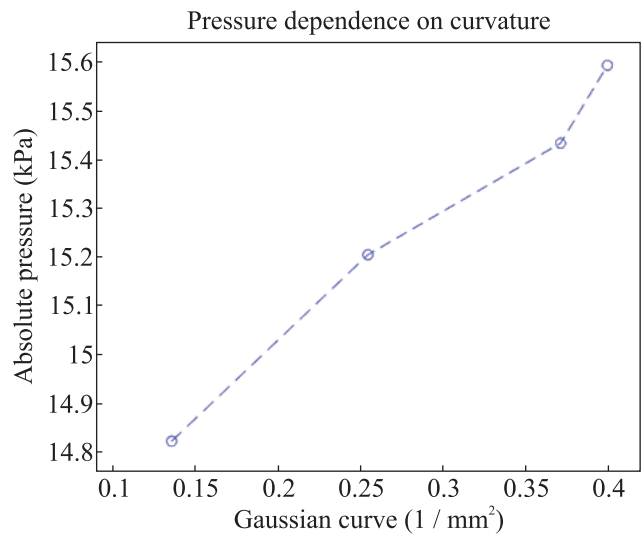


Рис. 1. (Цветной онлайн) Зависимость абсолютного давления от гауссовой кривизны, используя сферу, додекаэдр, икосаэдр, октаэдр

вает зависимость абсолютного давления от гауссовой кривизны для всех случаев. Рисунки 2, 3 показывают вычисление полного акустического давления для нормальной и раковой клеток, соответственно. Приведенные на рис. 2, 3 результаты подтверждают,

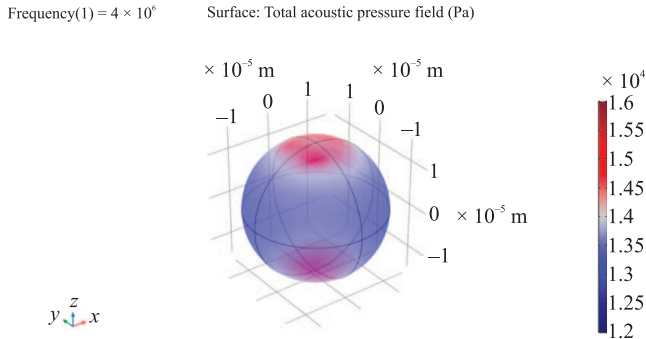


Рис. 2. (Цветной онлайн) Полное акустическое давление в здоровой клетке

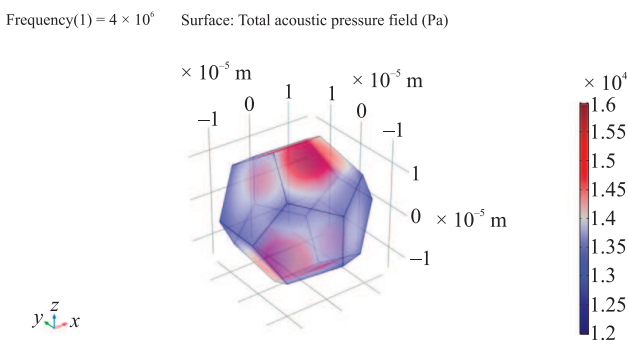


Рис. 3. (Цветной онлайн) Полное акустическое давление в раковой клетке

что при прочих равных условиях полное акустическое давление в случае раковой клетки больше, чем в случае нормальной клетки, если наночастица находится вблизи точки большей кривизны границы (на рис. 2, 3 это верхняя точка тела).

**5. Заключение.** Сравним рассеяние плоской акустической волны клеточной мембраной раковой и нормальной клеток в случае, когда клеточная мембрана содержит наночастицы. В соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля, наночастица становится дополнительным точечным источником вторичных акустических волн. Соответственно, решение задачи рассеяния имеет вид (2). Мы хотим сравнить рассеяние для мембран раковой и нормальной клеток, т.е. для негладкой поверхности  $\Gamma$  с большой кривизной в точке  $x_0$  и для гладкой поверхности  $\Gamma$  с малой кривизной в точке  $x_0$ . Мы предполагаем, что первый член (2), т.е. решение  $\psi(x)$  задачи рассея-

ния в случае отсутствия наночастицы, одинаково в обоих случаях. Что касается следующего члена (2), видна разница. Формула (8) показывает, что главный член асимптотики не зависит от кривизны, а вот второй член (с логарифмической сингулярностью) существенно больше для случая большой кривизны. Что касается соответствующей физической системы, это означает, что в окрестности наночастицы акустическое поле существенно больше в случае раковой клеточной мембраны.

Что касается резонансов, необходимо вернуться к уравнению (22) и проанализировать эффект для волновой функции при акустическом рассеянии клеточной мембраной раковой и здоровой клеток.

Во-первых, рассмотрим решение задачи рассеяния (28), т.е. мы сравниваем решения в случае гладкой поверхности  $\Gamma$  с малой кривизной и в случае негладкой поверхности  $\Gamma$  с большой кривизной в точке  $x_0$ . Из постановки задачи (23) видно, что первый член в падающей волне не различается в обоих случаях, однако следующий член (28) становится значительно больше при увеличении кривизны поверхности.

Во-вторых, анализируем итоговую формулу для резонансов и вклад волновой функции в это значение. В этой формуле (22), мнимая часть резонанса  $k_n$  обратно пропорциональна модулю волновой функции. Соответственно, для случая большой кривизны, т.е. раковой клетки, мнимая часть резонанса становится меньше, чем для случая малой кривизны, т.е. для случая нормальной клетки. Если мнимая часть резонанса уменьшается, его время жизни растет, а поэтому такое состояние вызывает больший деструктивный эффект.

Соответственно, предпочтительное разрушение ультразвуковым полем раковых клеток по сравнению с нормальными. Этот вывод соответствует результатам работы [8]. Этот эффект открывает возможность разработки нового пути разрушения раковых клеток, который безопасен для пациента – внедрение в клетку инертных наночастиц (т.е. золотых наночастиц как в экспериментах [8]) и облучение ультразвуковым полем.

Работа частично поддержана грантом # 22-11-00046 Российского научного фонда.

1. B. Alberts, A. Johnson, J. Lewis, M. Raff, K. Roberts, and P. Walter, *Molecular Biology of the Cell*, fourth edition, Garland Science, N.Y. (2002).
2. T. Baumgart, S. T. Hess, and W. W. Webb, *Nature* **425**, 821 (2003).

3. K. Bacia, P. Schwille, and T. Kurzchalia, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **102**, 3272 (2005).
4. I. F. Melikhov and I. Y. Popov, Chin. J. Phys. **65**, 334 (2020).
5. I. F. Melikhov and I. Y. Popov, Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics **9**(4), 447 (2018).
6. S. J. Marrink, V. Corradi, P. C. T. Souza, H. I. Ingolfsson, D. P. Tieleman, and M. S. P. Sansom, Chem. Rev. **119**(9), 6184 (2019).
7. P. L. Yeagle, *The Membranes of Cells*, third edition, Academic Press, N.Y. (2016).
8. O. K. Kosheleva, T.-C. Lai, N. G. Chen, M. Hsiao, and C. H. Chen, Journal of Nanobiotechnology **14**, 46 (2016).
9. T. A. Tran, J. Y. L. Guennec, P. Bougnoux, F. Tranquart, and A. Bouakaz, IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control **55**, 43 (2008).
10. I. Yu. Popov, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **118**, 555 (1995).
11. I. Yu. Popov, J. Math. Phys. **33**(5), 1685 (1992).
12. T. Ikebe and S. Shimada, J. Math. Kyoto Univ. **31**(1), 219 (1991).
13. I. Yu. Popov, Proc. Royal Soc. London A **452**, 1505 (1996).
14. P. Exner and D. Kreicirik, Rev. Math. Phys. **13**, 307 (2001).
15. J. Behrndt, M. Langer, and V. Lotoreichik, Nanosystems: Phys. Chem. Math. **7**(2), 290 (2016).
16. A. Mantile and A. Posilicano, Nanosystems: Phys. Chem. Math. **7**(2), 315 (2016).
17. P. Exner, S. Kondej, and V. Lotoreichik, J. Math. Phys. **59**, 013051 (2018).
18. A. M. Vorobiev, A. S. Bagmutov, and A. I. Popov, Nanosystems: Phys. Chem. Math. **10**(4), 415 (2019).
19. J. Behrndt, P. Exner, M. Holzmann, and V. Lotoreichik, Math. Nachr. **290**, 12151248 (2017).
20. B. S. Pavlov, Russ. Math. Surv. **42** (6), 127 (1987).
21. I. Yu. Popov, Matematicheskii sbornik, **181**(10), 1366 (1990) [English: Mathematics of the USSR-Sbornik **71**(1), 209 (1992)].
22. A. S. Melikhova, M. P. Faleeva, and I. Y. Popov, Nanosystems: Phys. Chem. Math. **12**(2), 115 (2021).
23. Yu. N. Demkov and V. N. Ostrovskii, *Zero-Range Potentials and Their Applications in Atomic Physics*, Springer, Berlin (1988).