

## Стекание ручейка неньютоновской жидкости по наклонной супергидрофобной поверхности

А. И. Агеев<sup>1)</sup>, А. Н. Осипцов<sup>1)</sup>

Научно-исследовательский институт механики МГУ имени М. В. Ломоносова, 119192 Москва, Россия

Поступила в редакцию 5 июня 2023 г.

После переработки 19 июня 2023 г.

Принята к публикации 27 июня 2023 г.

Рассматривается стационарное стекание ручейка жидкости степенной реологии от точечного источника по наклонной плоской супергидрофобной поверхности. В приближении тонкого слоя с заданным граничным условием неоднородного проскальзывания (коэффициенты скольжения – степенные функции пространственных координат) получено уравнение для формы поперечного сечения ручейка. В предположении симметрии ручейка относительно его срединной плоскости найдены условия существования класса автомодельных решений, описываемых одним обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Для ряда значений параметров скольжения супергидрофобной поверхности и реологических показателей стекающей жидкости приведены примеры построения аналитических и численных решений из найденного класса, проведен анализ формы поперечного сечения ручейка и геометрии области смачивания.

DOI: 10.31857/S1234567823150053, EDN: hwsynn

**Введение.** За последние десятилетия значительно вырос интерес к моделированию течений жидкости вблизи текстурированных супергидрофобных поверхностей (СГП), в элементах текстуры которых удерживаются микропузырьки газа. Макроскопическое проскальзывание жидкости на СГП, наблюдаемое в экспериментах, приводит к появлению ряда полезных свойств поверхности и эффекту снижения гидродинамического сопротивления, что очень важно для практических приложений (см. обзор [1]). Указанный интерес способствовал пересмотру ряда задач гидродинамики вязкой жидкости с формулировкой условия проскальзывания на СГП вместо классического условия прилипания. Был получен ряд новых практически важных результатов и построены классы автомодельных течений [2, 3], позволяющие определять параметры скольжения СГП из простых экспериментов. В частности, были описаны автомодельные режимы растекания тонкого слоя неньютоновской жидкости вдоль горизонтальной и наклонной СГП. Полученные результаты могут быть использованы как при производстве СГП с заданными свойствами, так и для понимания механизмов снижения трения и самоочистки таких поверхностей.

Для течений неньютоновских жидкостей вблизи СГП опубликованных точных решений существенно меньше, хотя в самые последние годы наблюдается

всплеск интереса к исследованию таких течений. Это связано как с появившейся возможностью производства СГП с заметным проскальзыванием неньютоновских жидкостей [1], так и с обнаружением ряда неожиданных эффектов, в частности, аномально высокого скольжения псевдопластической среды при ее течении в канале с супергидрофобными стенками [4]. Абсолютное большинство опубликованных работ по течениям неньютоновских сред с условиями скольжения посвящено параметрическим исследованиям одномерных течений типа Куэтта–Пуазейля (течения в каналах и плоских слоях), а также линейной теории устойчивости свободной поверхности плоского слоя (см., например, [5–7]).

Для планирования и интерпретации экспериментальных исследований желательнее иметь широкий набор достаточно простых решений, связывающих геометрию течения с реологическими параметрами среды и параметрами скольжения на СГП. Свойства проскальзывания на супергидрофобной поверхности, как правило, различны, в разных точках поверхности. Это обусловлено различием в положениях межфазной поверхности в кавернах (различным сжатием пузырьков, связанным с различием локальных давлений над пузырьками) [2]. Поэтому построение достаточно простых решений для течений неньютоновских сред вдоль неоднородных СГП представляет практический интерес.

Ниже построен класс автомодельных решений, описывающих установившееся стекание ручейка

<sup>1)</sup>e-mail: aaiageev@mail.ru, osipsov@imec.msu.ru

неньютоновской жидкости от локализованного источника с условием проскальзывания на наклонной неоднородной супергидрофобной плоскости (коэффициенты скольжения – степенные функции координат) в поле силы тяжести.

Ранее автомодельные режимы растекания неньютоновской жидкости по обычной горизонтальной поверхности с условием прилипания были исследованы в [8, 9]. Ручейковое стекание неньютоновской жидкости по наклонной и искривленной поверхностям с условием прилипания рассматривалось в [10, 11]. В [12] численно исследованы автомодельные решения задачи о растекании лавы по горизонтальной поверхности как неньютоновской жидкости со степенной реологией.

**Постановка задачи о ручейковом стекании жидкости.** Рассмотрим стекание неньютоновской жидкости от локализованного источника по супергидрофобной плоской поверхности, образующей конечный угол  $0 < \varphi < \pi/2$  с горизонтом (рис. 1) (звездочками отмечены размерные переменные).

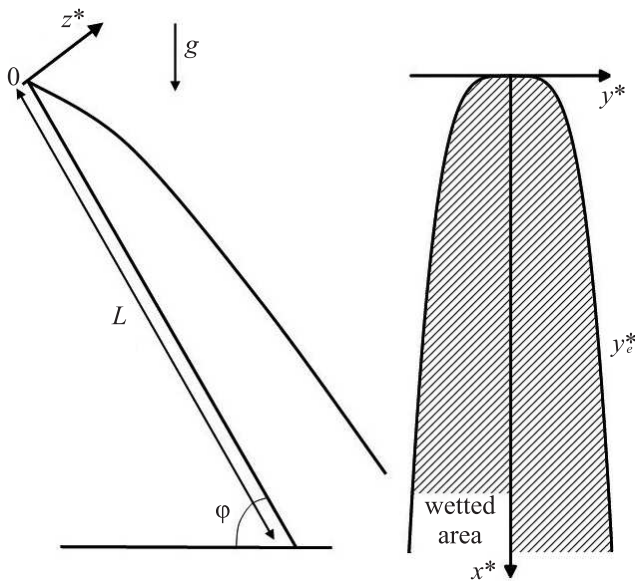


Рис. 1. Схема стекания жидкости по наклонной супергидрофобной плоской поверхности, источник расположен в начале координат

Жидкость задана реологическим соотношением  $\tau_{ij}^* = 2\mu_0^* I^{n-1} e_{ij}^*$ , где  $\tau_{ij}^*$  и  $e_{ij}^*$  – тензоры касательных напряжений и скоростей деформации соответственно,  $I = \sqrt{e_{ij}^* e_{ij}^*}$ ,  $n > 0$ , по повторяющимся индексам выполняется суммирование. При  $n = 1$  коэффициент  $\mu_0^*$  совпадает с динамической вязкостью ньютоновской жидкости. Рассматривается общая ситуация неоднородной СГП, у которой коэффициенты

проскальзывания зависят от координат рассматриваемой точки, при этом предполагается, что СГП имеет два главных взаимно перпендикулярных направления, с максимальным и минимальным проскальзыванием жидкости. Это может соответствовать, в частности, полосчатой структуре СГП, у которой ширина полосчатых микрокаверн с газовыми пузырьками и расстояние между ними изменяются, соответственно, вдоль и поперек потока жидкости. Рассматриваемая ситуация может также соответствовать изотропной текстуре СГП с различными положениями менисков поверхностей пузырьков в кавернах.

Начало декартовой системы координат  $Ox^*y^*z^*$  совпадает с локализованным источником массопотока (рис. 1), объемный расход которого равняется  $Q^*$ ; оси  $Ox^*$  и  $Oy^*$  направлены вдоль указанных выше главных направлений скольжения, а ось  $Oz^*$  направлена по нормали к СГП. Размерные компоненты скорости обозначим  $u^*$ ,  $v^*$  и  $w^*$ ; через  $L$ ,  $l$  и  $h_0$  обозначим характерные линейные масштабы длины, ширины и толщины ручейка соответственно. Предполагается, что толщина ручейка много меньше его ширины, а ширина много меньше длины:  $h_0/l = l/L = \varepsilon \ll 1$ . В дальнейшем  $\varepsilon$  считается малым параметром. Вводятся безразмерные переменные:

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{l}, \quad z = \frac{z^*}{h_0}, \quad u = \frac{u^*}{U},$$

$$v = \frac{v^*}{\varepsilon U}, \quad w = \frac{w^*}{\varepsilon^2 U}, \quad p = \frac{2^{n-1} \varepsilon^{2n} L^n}{\mu_0^* U^n} p^*.$$

Здесь  $U$  – характерная скорость стекания. Считая, что объемная мощность источника  $Q^*$  задана, и выбирая масштаб длины  $L$  (на котором рассматривается решение), можно выразить  $U$ ,  $l$  и  $h_0$  через  $Q^*$ ,  $L$ ,  $\rho^*$ ,  $\mu_0^*$  и  $g^*$ :

$$U = \left( \frac{8^{n-1} \rho^{*3} g^{*3} Q^{*(2n+2)}}{\mu_0^{*3} L^{n+1}} \right)^{1/(5n+2)},$$

$$l = \left( \frac{\mu_0^* U^n L^{n+1}}{2^{n-1} \rho^* g^*} \right)^{1/(2n+2)},$$

$$h_0 = \left( \frac{\mu_0^* U^n}{2^{n-1} \rho^* g^*} \right)^{1/(n+1)}.$$

Данные соотношения получены из условий  $Q^* = h_0 l U$ , соотношения для геометрических масштабов задачи, а также равенства единице коэффициента при силе тяжести в проекции безразмерного уравнения импульса на ось  $z$ . Записав уравнения неразрывности и импульса для неньютоновской жидкости

в выбранных безразмерных переменных и отбрасывая члены, стремящиеся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (предполагается, что  $\varepsilon^2 2^{n-1} \rho^* L^n U^{2-n} / \mu_0^*$  также стремится к нулю), получаем асимптотические уравнения “медленного” трехмерного течения пленки на наклонной плоскости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^n \right) + \sin \varphi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^{n-1} \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\cos \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Задача завершается заданием на СГП условий непротекания и проскальзывания для компонент скорости, которые для неньютоновской жидкости в безразмерной форме принимают вид:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad u &= b_1(x, y) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^m, \\ v &= b_2(x, y) \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^m, \quad w = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $b_1$  и  $b_2$  – коэффициенты пропорциональности, связывающие безразмерную касательную скорость и степени безразмерных нормальных производных продольных скоростей среды, вычисленных на СГП при  $z = 0$ . Следует отметить, что в отличие от ньютоновской среды, для которой в граничном условии всегда имеется линейная связь между скоростью скольжения и вектором касательных напряжений на стенке, для неньютоновской среды может иметь место более общая ситуация (параметр  $m$ , в общем случае, не связан с  $n$  [6]). Случай  $m = 1$  соответствует линейному граничному условию Навье, обычно используемому при стекании ньютоновской ( $n = 1$ ) жидкости по СГП. Для ньютоновской жидкости  $b_{1,2}$  соответствует безразмерным “длинам скольжения” для главных направлений тензора скольжения [2].

На поверхности ручейка ставятся кинематическое (непротекание) и динамические (отсутствие касательных напряжений) граничные условия (поверхностным натяжением пренебрегается):

$$\begin{aligned} z = h(x, y): \quad u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} &= w, \\ p = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В случае стандартной поверхности с условием прилипания  $b_1 = b_2 = 0$  задача имеет класс известных автомодельных решений [10]. При наличии

проскальзывания в постановке задачи появляются дополнительные параметры с размерностью длины, что делает проблематичным существование автомодельных решений. Однако, если предположить определенную функциональную зависимость коэффициентов  $b_{1,2}$  от пространственных координат, автомодельные решения также существуют. Рассмотрим достаточно общую ситуацию неоднородной СГП, для которой зависимость безразмерных коэффициентов  $b_{1,2}$  в условии проскальзывания от координат описывается степенными функциями вида  $B_{1,2} x^\gamma y^\delta$ , где  $B_{1,2}$  – положительные константы. Частный случай  $\delta = \gamma = 0$  соответствует СГП с однородными свойствами.

Решая уравнения (1) с граничными условиями (2) и (3), получаем:  $p(x, y, z) = (h - z) \cos \varphi$ ,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \left[ \frac{n}{n+1} \right] \left( h^{\frac{n+1}{n}} - (h-z)^{\frac{n+1}{n}} \right) \times \\ &\quad \times (\sin \varphi)^{\frac{1}{n}} + b_1(x, y) h^{\frac{m}{n}} (\sin \varphi)^{\frac{m}{n}}, \\ v(x, y) &= \left[ \frac{n}{n+1} \right] \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right) \times \\ &\quad \times \left( (h-z)^{\frac{n+1}{n}} - h^{\frac{n+1}{n}} \right) \frac{\cos \varphi}{(\sin \varphi)^{(n-1)/n}} + \\ &\quad + b_2(x, y) \left( -\frac{\partial h}{\partial y} \right)^m h^{\frac{m}{n}} \frac{(\cos \varphi)^m}{(\sin \varphi)^{m(n-1)/n}}. \end{aligned}$$

После интегрирования уравнения неразрывности по толщине слоя и подстановки полученного результата в кинематическое условие получаем уравнение в частных производных для формы поперечного сечения ручейка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \left[ \frac{n}{2n+1} \right] h^{\frac{2n+1}{n}} (\sin \varphi)^{\frac{1}{n}} + \right. \\ \left. + B_1 x^\gamma y^\delta h^{\frac{m+n}{n}} (\sin \varphi)^{\frac{m}{n}} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left[ \frac{n}{2n+1} \right] \left( -\frac{\partial h}{\partial y} \right) h^{\frac{2n+1}{n}} \frac{\cos \varphi}{(\sin \varphi)^{(n-1)/n}} + \right. \\ \left. + B_2 x^\gamma y^\delta \left( -\frac{\partial h}{\partial y} \right)^m h^{\frac{m+n}{n}} \frac{(\cos \varphi)^m}{(\sin \varphi)^{m(n-1)/n}} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

При  $m = 1$  и  $B_{1,2} = 0$  уравнение принимает известный в литературе вид [10]. Далее для полученного уравнения в предположении постоянного расхода жидкости через поперечное сечение ручейка строятся симметричные относительно оси  $Ox$  автомодельные решения. Для установившегося стекания жидкости расход через поперечное сечение ручейка вычисляется следующим образом:

$$\int_{-y_\varepsilon(x)}^{y_\varepsilon(x)} \int_0^{h(x,y)} u(x, y, z) dz dy = 1,$$

где  $\pm y_e(x)$  на плоскости  $(x, y)$  – заранее неизвестные боковые границы области смачивания жидкости, на которых толщина слоя равняется нулю.

После подстановки в интегральный закон сохранения расхода жидкости выражения для компоненты скорости  $u$  получаем:

$$\int_{-y_e(x)}^{y_e(x)} \left( \left[ \frac{n}{2n+1} \right] h^{\frac{2n+1}{n}} (\sin \varphi)^{\frac{1}{n}} + B_1 x^\gamma y^\delta h^{\frac{m+n}{n}} (\sin \varphi)^{\frac{m}{n}} \right) dy = 1. \quad (5)$$

Задача (4)–(5) является многопараметрической и может описывать широкий класс течений для различных неоднородных СГП и стекающих жидкостей.

Рассмотрим для примера наиболее простой случай  $m = 1$  и исследуем зависимость решения от реологического показателя  $n$ . В этом случае уравнение для поперечного сечения ручейка (4) и условие сохранения расхода (5) принимают вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( \left[ \frac{n}{2n+1} \right] h^{\frac{2n+1}{n}} + B_1 x^\gamma y^\delta h^{\frac{n+1}{n}} \right) \operatorname{tg} \varphi - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \left[ \frac{n}{2n+1} \right] h^{\frac{2n+1}{n}} + B_2 x^\gamma y^\delta h^{\frac{n+1}{n}} \right) \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0, \\ & (\sin \varphi)^{\frac{1}{n}} \int_{-y_e(x)}^{y_e(x)} \left( \left[ \frac{n}{2n+1} \right] h^{\frac{2n+1}{n}} + B_1 x^\gamma y^\delta h^{\frac{n+1}{n}} \right) dy = 1. \end{aligned}$$

Автомодельные решения ищутся в виде, аналогичном [2, 10]:  $h(x, y) = x^\alpha F(\eta)$ ,  $\eta = y/Cx^\beta$ ,  $C = \text{const} > 0$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – некоторые константы. Новая переменная  $\eta$  характеризует автомодельный закон расширения области смачивания жидкости в направлении оси  $OY$ . Значение константы  $C$  выбирается из условия  $\eta = 1$  на боковой границе ручейка. После подстановки автомодельной формы решения в уравнение (4) и закон постоянства расхода (5) получаем условия существования автомодельных решений и уравнение для нахождения константы  $C$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{n}{5n+2}, \quad \beta = \frac{2n+1}{5n+2}, \quad \gamma = -\frac{n+(2n+1)\delta}{5n+2}, \\ C(\sin \varphi)^{\frac{1}{n}} \int_{-1}^1 \left( \left[ \frac{n}{2n+1} \right] F^{\frac{2n+1}{n}} + B_1 C^\delta \eta^\delta F^{\frac{n+1}{n}} \right) d\eta &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Полученные условия показывают, что каждому набору значений  $n > 0$  и  $\delta \geq 0$  соответствует конкретное автомодельное решение, определяемое набором значений параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . После подстановки автомодельной формы решения в уравнение (4)

получаем краевую задачу для автомодельной функции  $F$ :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{n}{2n+1} \right] \frac{d}{d\eta} \left( F^{\frac{2n+1}{n}} \frac{dF}{d\eta} \right) + B_2 C^\delta \frac{d}{d\eta} \left( \eta^\delta F^{\frac{n+1}{n}} \frac{dF}{d\eta} \right) + \\ & + \left[ \frac{C^2 n}{5n+2} \right] \frac{d}{d\eta} \left( \eta F^{\frac{2n+1}{n}} \right) \operatorname{tg} \varphi + \\ & + B_1 C^{\delta+2} \left[ \frac{2n+1}{5n+2} \right] \frac{d}{d\eta} \left( \eta^{\delta+1} F^{\frac{n+1}{n}} \right) \operatorname{tg} \varphi = 0, \\ & F'(0) = F(1) = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя данное уравнение с условием  $F'(0) = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{n}{2n+1} \right] F \frac{dF}{d\eta} + B_2 C^\delta \eta^\delta \frac{dF}{d\eta} + \left[ \frac{C^2 n}{5n+2} \right] \eta F \operatorname{tg} \varphi + \\ & + B_1 C^{\delta+2} \left[ \frac{2n+1}{5n+2} \right] \eta^{\delta+1} \operatorname{tg} \varphi = 0, \quad F(1) = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

Рассмотрим несколько примеров решения уравнения (7). Значение константы  $C$  в законе расширения пятна смачивания вычислялось совместно с решением уравнения (7) методом итераций, продолжавшихся до тех пор, пока с заданной точностью не удовлетворялся закон постоянства расхода (6). Ниже приведены примеры расчетов для некоторых значений параметров, определяющих свойства СГП и неньютоновской жидкости.

**Поверхность, у которой коэффициенты скольжения зависят от одной координаты.** Это соответствует случаю  $\delta = 0$  и  $\gamma = -n/(5n+2)$  в выражениях для коэффициентов скольжения. Для данных значений параметров уравнение (7) имеет аналитическое решение, выраженное неявной функцией:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{n}{2n+1} \right) F + B_2 \ln \left| F + \left( \frac{2n+1}{n} \right) B_1 \right| - \\ & - B_1 \ln \left| F + \left( \frac{2n+1}{n} \right) B_1 \right| = \\ & = \frac{nC^2 \operatorname{tg} \varphi}{(10n+4)} (1 - \eta^2) + B_2 \ln \left| \left( \frac{2n+1}{n} \right) B_1 \right| - \\ & - B_1 \ln \left| \left( \frac{2n+1}{n} \right) B_1 \right|. \end{aligned}$$

На рисунке 2а представлены расчеты автомодельной функции  $F(\eta)$  для СГП, у которой  $B_1 = 0.4$ ,  $B_2 = 0$ , при различных значениях  $n$  и фиксированном  $\varphi$ .

Для СГП, имеющих полосчатую микроструктуру, имеет место приближительное равенство  $B_2 = 2B_1$  [2]

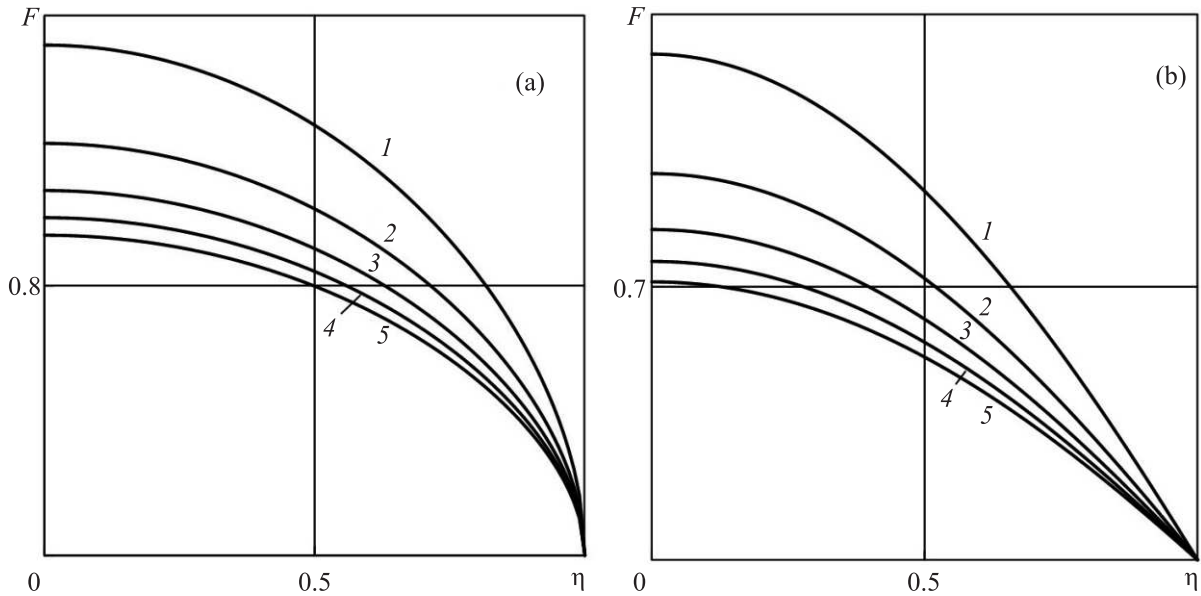


Рис. 2. Автомоделная функция  $F(\eta)$ :  $B_2 = 0$  (а),  $B_2 = 2B_1$  (б),  $B_1 = 0.4$ ,  $\varphi = \pi/6$ ,  $n = \{0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2.0\}$  (1–5)

(направление полос, образующих СГП, перпендикулярно оси симметрии ручейка). На рисунке 2b представлены расчеты для такого случая.

Вычисленные значения  $C$  в законе расширения пятна смачивания и толщина  $F(0)$  на оси симметрии, соответствующие расчетам на рис. 2b, приведены в табл. 1.

**Таблица 1.** Параметр  $C$  в законе расширения пятна смачивания и толщина ручейка на оси симметрии

$n$	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
$C$	4.183	3.715	3.473	3.325	3.225
$F(0)$	1.297	0.990	0.847	0.765	0.713

На рисунке 3 представлена автомоделная форма пятна смачивания  $y_e(x) = C(n)x^{(2n+1)/(5n+2)}$ , вычисленная для тех же значений  $B_{1,2}$ ,  $n$  и  $\varphi$ .

На основе результатов расчетов (рис. 3 и табл. 1), можно заключить, что при увеличении значения  $n$ , определяющего свойства жидкости, область смачивания сужается, что объясняется снижением текучести.

На рисунке 4 представлены результаты расчетов автомоделной функции для двух значений показателя степени  $n$  и  $\varphi$ .

Вычисленные значения  $C$  в законе расширения пятна смачивания, соответствующие расчетам на рис. 4, приведены в табл. 2:

Из представленных на рис. 4 и табл. 2 результатов следует, что угол наклона СГП, наряду с другими параметрами, является существенным определяющим параметром задачи.

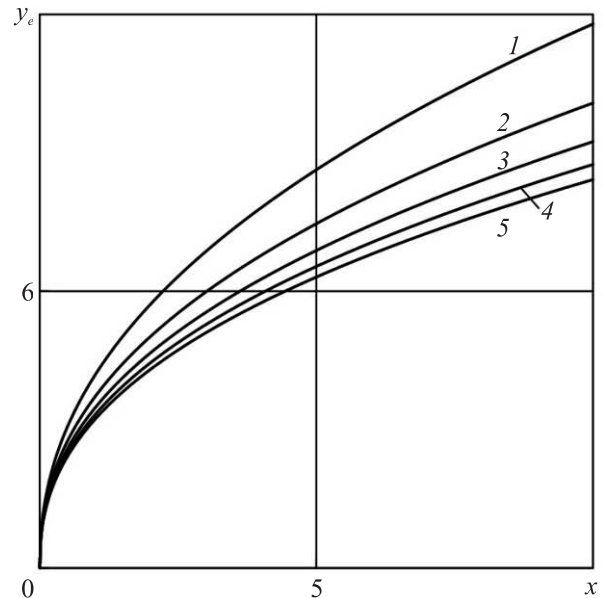


Рис. 3. Форма пятна смачивания на СГП:  $B_1 = 0.4$ ,  $B_2 = 2B_1$ ,  $\varphi = \pi/6$ ,  $n = \{0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2.0\}$  (1–5)

**Таблица 2.** Параметр  $C$  в законе расширения пятна смачивания

$n$	$\varphi = \pi/6$	$\varphi = \pi/4$	$\varphi = \pi/3$
0.5	4.049	2.940	2.202
1.5	3.456	2.645	2.055

Процедура построения более общих автомоделных решений для  $m \neq 1$ , требует численного решения уравнения для формы поверхности ручейка.

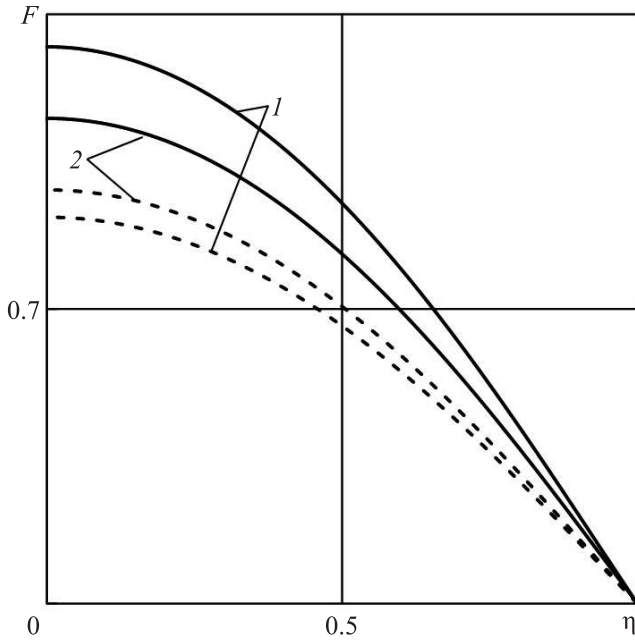


Рис. 4. Автомоделная функция  $F(\eta)$ :  $B_1 = 0.2$ ,  $B_2 = 2B_1$ ,  $\varphi = \pi/6$  (1),  $\pi/3$  (2),  $n = 0.5$  – сплошная линия, 1.5 – пунктир

**Закключение.** В приближении медленного течения пленки найден класс автомоделных решений задачи о ручейковом стекании неньютоновской жидкости степенной реологии по наклонной неоднородной супергидрофобной плоской поверхности. Приведены примеры построения аналитических и численных решений для ряда конкретных примеров коэффициентов скольжения супергидрофобных поверхностей и показателя степени в реологическом соотношении.

Построенные решения для формы пятна смачивания и поперечного сечения ручейка могут быть использованы для экспериментального определения связи между реологическими параметрами среды и параметрами скольжения супергидрофобных поверхностей.

1. J. Jeevahan, M. Chandrasekaran, G. Britto Joseph, R.V. Durairaj, and G. Mageshwaran, *J. Coating Technol. Res.* **15**, 231 (2018).
2. А.И. Агеев, А.Н. Осипцов, *Коллоидный журнал* **84**(4), 380 (2022).
3. А.И. Агеев, А.Н. Осипцов, *Изв. РАН, Механика жидкости и газа* **6**, 35 (2015).
4. S. Patlazhan and S. Vagner, *Phys. Rev. E* **96**, 013104 (2017).
5. G.G. Pereira, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* **157**, 197 (2009).
6. L.L. Ferras, J.M. Nobrega, and F.T. Pinho, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* **175**, 76 (2012).
7. S. Chakraborty, T.W.-H. Sheu, and S. Ghosh, *Phys. Fluids* **31**, 013102 (2019).
8. V.M. Starov, A.N. Tyatyushkin, M.G. Velarde, and S.A. Zhdanov, *J. Colloid Interface Sci.* **257**, 284 (2003).
9. V.D. Federico, S. Malavasi, and S. Cintoli, *Meccanica* **41**, 207 (2006).
10. S.K. Wilson, B.R. Duffy, and R. Hunt, *Q. J. Mech. Appl. Math.* **55**(3), 385 (2002).
11. F.H.H. Al Mukahal, S.K. Wilson, and B.R. Duffy, *J. Non-Newton. Fluid Mech.* **224**, 30 (2015).
12. Е. А. Веденева, *Изв. РАН, Механика жидкости и газа* **1**, 19 (2021).