Письма в ЖЭТФ, том 118, вып. 4, с. 227 – 233 © 2023 г. 25 августа

Распады $\pi^0, \eta, \eta' \to \gamma\gamma$ и явное нарушение киральной симметрии

А. А. Осипов[1)]

Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Россия

Поступила в редакцию 3 июля 2023 г.
После переработки 3 июля 2023 г.
Принята к публикации 19 июля 2023 г.

Изучаются поправки к аномалии Весса–Зумино–Виттена, обусловленные явным нарушением киральной $SU(3) \times SU(3)$ симметрии. С этой целью используется эффективный мезонный лагранжиан, построенный на базе модели Намбу–Иона–Лазинио, в котором проводится одновременное разложение по производным, массам токовых кварков и степеням $1/N_c$. Вычислены лидирующий вклад и первая поправка для амплитуд распадов $\pi^0/\eta/\eta' \to \gamma\gamma$ и контактного члена в амплитудах $\eta/\eta' \to \pi^+\pi^-\gamma$. Результаты сравниваются с аналогичными вычислениями в $1/N_c$ киральной теории возмущений и имеющимися экспериментальными данными.

DOI: 10.31857/S1234567823160012, EDN: isxawy

Электромагнитные распады нейтральных псевдоскаляров π^0, η и η' на два фотона возможны благодаря нарушению киральной симметрии. Киральная симметрия в квантовой хромодинамике (КХД) нарушается массами легких кварков, а также посредством неабелевой $SU(3)_L \times SU(3)_R$ аномалии Весса–Зумино–Виттена (ВЗВ) [1, 2]. Соответствующий лагранжиан имеет порядок $\mathcal{O}(p^4)$. Здесь мы следуем стандартным правилам счета, принятым в киральной теории возмущений (χТВ) [3, 4]. Согласно этой теории низкоэнергетическая динамика октета псевдоголдстоуновских состояний описывается эффективным лагранжианом, представляющим собой разложение по степеням малых импульсов p_μ и масс $m_{i=u,d,s} = \mathcal{O}(p^2)$ токовых кварков.

Последовательное включение в теорию η'-мезона требует привлечения дополнительных аргументов, связанных с $1/N_c$ разложением КХД [5–9], и, как следствие, расширения группы киральной симметрии до $U(3)_L \times U(3)_R$ преобразований. Добавление еще одного параметра ведет к модификации стандартного разложения χТВ. Модифицированный подход, который для краткости будем называть $1/N_c\chi$ТВ, использует эффективный лагранжиан [6]

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)} + \dots, \qquad (1)$$

где члены ряда классифицируются по степеням δ, указанным в скобках. Введение параметра δ удобно, поскольку позволяет представить разложение, осуществляемое по трем малым величинам $1/N_c = \mathcal{O}(\delta)$, $p^2 = \mathcal{O}(\delta)$ и $m_i = \mathcal{O}(\delta)$ в единой форме. В $1/N_c\chi$ТВ лагранжиан ВЗВ имеет порядок $\mathcal{O}(p^4 N_c) = \mathcal{O}(\delta)$ и таким образом содержится в $\mathcal{L}^{(1)}$.

Данная теория позволяет систематизировать вычисление адронных поправок, связанных с явным нарушением киральной симметрии массами легких кварков, что, в частности, открывает принципиальную возможность для контроля точности теоретических оценок, в том числе и для ширин двухфотонных распадов π^0, η и η' мезонов [10–12]. Альтернативные вычисления основываются на применении техники правил сумм, которые также отличаются высокой точностью теоретических оценок [5, 13, 14].

Современный интерес к проблеме $\pi^0/\eta/\eta' \to \gamma\gamma$ распадов связан с ростом точности экспериментов, проводимых на установках η-фабрики JLab. В частности, на основе данных PrimEx-I и PrimEx-II удалось достичь рекордной 1.5 % точности в измерении ширины распада нейтрального пиона [15]

$$\Gamma(\pi^0 \to \gamma\gamma) = 7.802 \pm 0.052(\text{stat.}) \pm 0.105(\text{syst.})\,\text{эВ}.$$

Обзор физической π^0-η-η' программы JLab, представлен в работе [16]. Там же обсуждаются различные теоретические методы, применяемые для описания распадов псевдоголдстоуновских состояний.

В данной заметке мы приводим результаты вычислений ширин $\pi^0/\eta/\eta' \to 2\gamma$ распадов, полученных на основе $1/N_c$ модели Намбу–Иона-Лазинио (НИЛ) [17–21]. Интерес к использованию модели НИЛ для подобного рода расчетов возник давно [5]. Однако, для реализации данной программы необходимо было развить аппарат, позволяющий учесть, в процессе получения эффективного мезонного лагранжиана модели НИЛ, эффекты явного нарушения киральной

[1)]e-mail: aaosipov@jinr.ru

симметрии, что было сделано сравнительно недавно [22–24]. Подчеркнем, что разложение по степеням масс легких кварков, возникающее в результате принятия правила счета $m_i = \mathcal{O}(\delta)$ в модели НИЛ, делает такой подход близким к $1/N_c\chi$ТВ, но не тождественным ей. Помимо очевидной разницы между методами эффективной теории поля, используемыми в $1/N_c\chi$ТВ, и расчетами в рамках модели, основанной на эффективных четырех-кварковых взаимодействиях, имеется целый ряд отличий, главные из которых мы отметим ниже.

В отсутствие внешних источников лидирующая часть лагранжиана $1/N_c\chi$ТВ имеет вид

$$\mathcal{L}^{(0)} = \frac{F^2}{4}\langle \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger + \chi U^\dagger + \chi^\dagger U\rangle - \frac{\lambda_U}{2}\phi_0^2, \qquad (2)$$

где $F = \mathcal{O}(\sqrt{N_c})$ – константа распада псевдоголдстоуновских бозонов в киральном пределе $m_i = 0$. Нонет псевдоскалярных полей $\phi = \sum_{a=0,\alpha}\phi_a\lambda_a$ принимает значения в алгебре Ли группы $U(3)$, $\lambda_0 = \sqrt{2/3}$, λ_α – матрицы Гелл-Манна. Эффективное поле $U = \exp(i\phi)$ отвечает экспоненциальной параметризации фактор-пространства голдстоуновских мод при $N_c = \infty$. Скобки $\langle \ldots \rangle$ обозначают шпур в ароматическом пространстве; матрица $\chi = 2B_0 m$, $m = \mathrm{diag}(m_u, m_d, m_s)$, а вторая низкоэнергетическая константа $B_0 = -\langle \bar{q}q\rangle/F^2$ связана с кварковым конденсатом. Последнее слагаемое в (2) – массовый член η' мезона. Его появление связано с решением $U(1)$ проблемы [25–30]. Обратим внимание, что в пределе $N_c \to \infty$ масса η' мезона обращается в нуль [31]. В результате в теории возникает девятый голдстоуновский бозон, а киральная группа симметрии расширяется до $U(3)\times U(3)$. Коэффициент $\lambda_U = \mathcal{O}(N_c^0)$ – топологическая проницаемость.

В $1/N_c$ модели НИЛ свободный лагранжиан нейтральных членов псевдоскалярного нонета возникает из вычислений кварковых однопетлевых диаграмм и поэтому зависит от масс конституентных M_i и токовых m_i кварков

$$\mathcal{L}_{\phi^2} = \sum_{i=u,d,s}\left[\frac{\kappa_{Aii}}{16G_V}(\partial_\mu\phi_i)^2 - \frac{M_i m_i}{4G_S}\phi_i^2\right] - \frac{\lambda_U}{2}\phi_0^2. \quad (3)$$

Константы G_S и G_V характеризуют силу $U(3)\times U(3)$ кирально симметричных четырех-кварковых взаимодействий со спином 0 и 1 соответственно. Они размерны $[G_{S,V}] = M^{-2}$ и при больших значениях N_c убывают, как $\mathcal{O}(1/N_c)$. Диагональные элементы матрицы κ_A в (3) имеют вид

$$\kappa_{Aii}^{-1} = 1 + \frac{\pi^2}{N_c G_V M_i^2 J_1(M_i)}, \qquad (4)$$

где $J_1(M)$ – логарифмически расходящаяся часть однопетлевой кварковой диаграммы

$$J_1(M) = \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}\right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + M^2}. \qquad (5)$$

Для устранения расходимости вводится ковариантное обрезание Λ, величина которого ассоциируется с масштабом спонтанного нарушения киральной симметрии $\Lambda = 1.1$ ГэВ $\simeq 4\pi f_\pi$. Более подробную информацию о деталях получения приведенных выше выражений можно найти в работах [18, 20, 24].

Практическое использование лагранжиана (3) в рассматриваемом здесь подходе требует предварительного разложения функции $M_i(m_i)$ в ряд по степеням $m_i = \mathcal{O}(\delta)$

$$M_i(m_i) = M_0 + M'(0)\, m_i + \mathcal{O}(m_i^2), \qquad (6)$$

где $M_0 = \mathcal{O}(\delta^0)$ – решение уравнения щели при $m_i = 0$. Положив $M_i = M_0$ в (3), мы получаем лидирующий вклад $\mathcal{L}_{\phi^2}^{(0)}$, который полностью соответствует свободной части лагранжиана (2). При этом низкоэнергетические константы F и B_0 выражаются через параметры модели НИЛ:

$$F = \sqrt{\frac{\kappa_{A0}}{4G_V}} = \mathcal{O}(\sqrt{N_c}), \qquad (7)$$

$$B_0 = \frac{M_0}{2G_S F^2} = \frac{2G_V M_0}{G_S \kappa_{A0}} = -\frac{\langle\bar{q}q\rangle_0}{F^2} = \mathcal{O}(1). \qquad (8)$$

Здесь и далее индекс 0 у знака функции, зависящей от кварковых масс m_i, означает, что функция вычисляется в пределе $m_i \to 0$, так $\kappa_{A0}^{-1} = \lim_{m_i\to 0}(\kappa_A)_{ii}^{-1}$. В лидирующем приближении три параметра модели НИЛ: G_S G_V и Λ – определяют величины констант F и B_0. Это вызвано тем, что в модели учитываются векторные и аксиально-векторные степени свободы. В частности, благодаря устранению из лагранжиана недиагональных переходов псевдоскаляр – аксиал-вектор, в выражении для константы F присутствует зависимость от константы G_V.

Следующий шаг в разложении (1) имеет порядок $\mathcal{O}(\delta)$. Соответствующий лагранжиан $\mathcal{L}^{(1)}$ содержит четыре безразмерные константы L_5, $L_8 = \mathcal{O}(N_c)$, и Λ_1, $\Lambda_2 = \mathcal{O}(1/N_c)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(1)} &= L_5\langle \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U(\chi^\dagger U + U^\dagger\chi)\rangle + \\ &+ L_8\langle \chi^\dagger U\chi^\dagger U + \mathrm{h.c.}\rangle + \frac{1}{2}\Lambda_1 F^2 \partial_\mu\phi_0\partial^\mu\phi_0 + \\ &+ \frac{i\Lambda_2}{2\sqrt{6}}F^2\phi_0\langle\chi^\dagger U - U^\dagger\chi\rangle + \mathcal{L}_{\mathrm{wzw}}. \end{aligned} \qquad (9)$$

Сделаем несколько замечаний:

(а) Члены с L_5 и L_8 – единственные из десяти известных в стандартной χТВ структур порядка $\mathcal{O}(p^4)$, которые входят в лагранжиан $\mathcal{L}^{(1)}$. Остальные имеют более высокий порядок по δ, что делает $1/N_c\chi$ТВ очень полезной на практике. В $1/N_c$ модели НИЛ низкоэнергетические константы L_5 и L_8 вычисляются путем подстановки разложения (6) в лагранжиан (3) и последующего выделения членов порядка $\mathcal{O}(\delta)$. Это дает

$$L_5 = \frac{\bar{a} G_S F^4}{8M_0^2}, \quad L_8 = \frac{a G_S F^4}{16 M_0^2}, \tag{10}$$

где

$$a = M'(0) = \frac{\pi^2}{N_c G_S M_0^2 J_1^0} = \frac{G_V}{G_S}\left(\kappa_{A0}^{-1} - 1\right), \tag{11}$$

$$\bar{a} = 2a(1-\kappa_{A0})\left[1 - \tfrac{\Lambda^4}{J_1^0(\Lambda^2+M_0^2)}\right] \tag{12}$$

и $J_1^0 \equiv J_1(M_0)$.

(б) Члены с Λ_1 и Λ_2 нарушают правило Окубо–Цвейга–Иизуки (ОЦИ), и поэтому их происхождение связывают с глюонным обменом. В дальнейшем мы полагаем $\Lambda_1 = 0$, что уменьшает число независимых параметров, используемых в нашем анализе. Качественные соображения в пользу такого предположения были приведены в работе [5]. Таким образом, в $1/N_c$ модели НИЛ лагранжиан $\mathcal{L}^{(1)}$ имеет только одну новую низкоэнергетическую константу, а именно, Λ_2, величина которой однозначно фиксируется (вместе с величиной константы λ_U) из экспериментальных значений масс η и η' мезонов.

(в) Киральные логарифмы, возникающие от вычисления однопетлевых диаграмм, построенных на базе лагранжиана $\mathcal{L}^{(0)}$, имеют порядок $m_i/N_c \ln m_i = \mathcal{O}(\delta^2)$, т.е. при вычислениях с точностью $\mathcal{O}(\delta)$ их вкладом можно пренебречь. В $1/N_c$ модели НИЛ такой же порядок имеет и третье слагаемое в (6). Поэтому для его вычисления необходимо изменить стандартное уравнение щели

$$M_i\left(1 - \frac{N_c G_S}{2\pi^2} J_0(M_i)\right) = m_i, \tag{13}$$

где

$$J_0(M_i) = \Lambda^2 - M_i^2 \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{M_i^2}\right), \tag{14}$$

включив в него слагаемые, описывающие вклады мезонных однопетлевых диаграмм – “головастиков”.

(г) Лагранжиан $\mathcal{L}_{\rm wzw}$ отвечает аномалии ВЗВ. Благодаря ему устраняется случайная, не имеющая место в КХД, симметрия лагранжиана $\mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)}$ относительно замены $U \to U^{-1}$. $\mathcal{L}_{\rm wzw}$ нарушает эту дискретную симметрию и однозначно (с точностью до общего множителя N_c) определяется топологией отображения пространства Минковского в фактор-пространство голдстоуновских полей, осуществляемое матрицей $U(x)$. В частности, лагранжиан, отвечающий за двухфотонные распады π^0, η и η' мезонов, имеет вид

$$\mathcal{L}_{\rm wzw} = -\frac{N_c \alpha}{4\pi} F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\langle Q^2\phi\rangle + \ldots, \tag{15}$$

где $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}e^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$, а $\alpha = e^2/4\pi$, $F_{\mu\nu}$ и Q обозначают постоянную тонкой структуры, тензор напряженности электромагнитного поля A_μ и матрицу электрических зарядов кварков $3Q = \mathrm{diag}(2,-1,-1)$. В том, что эти вершины имеют порядок δ легко убедиться, если учесть правило счета электрического заряда $e = \mathcal{O}(\sqrt{\delta})$.

(д) Лагранжиан $\mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)}$ представляет достаточно разумное приближение к полному эффективному лагранжиану $\mathcal{L}_{\rm eff}$. Он позволяет точно описать спектр нонета псевдоголдстоуновских состояний, вычислить отношения масс легких кварков, избежав неопределенности, вносимой преобразованием симметрии Каплана–Манохара [32], получить величины низкоэнергетических констант связи и углов смешивания. В $1/N_c$ модели НИЛ все это достигается при следующих значениях основных параметров модели: $G_S = 6.6\,\text{ГэВ}^{-2}$, $G_V = 7.4\,\text{ГэВ}^{-2}$, $\Lambda = 1.1\,\text{ГэВ}$, $m_u = 2.6\,\text{МэВ}$, $m_d = 4.6\,\text{МэВ}$, $m_s = 84\,\text{МэВ}$, $\lambda_U = (285\,\text{МэВ})^4$ и $\Lambda_2 = 0.46$ [19–21].

После этих замечаний обратимся непосредственно к задаче вычисления ширин двухфотонных распадов в $1/N_c$ модели НИЛ. Для этого в (15) необходимо перейти от затравочного безразмерного поля ϕ к переменным, отвечающим физическим π^0, η и η' состояниям. Подробное решение данной задачи изложено в [20]. Воспользовавшись этим результатом, находим

$$\langle Q^2\phi\rangle = \frac{1}{9}(4\phi_u + \phi_d + \phi_s) = \frac{1}{3f_{\pi^0}}\sum_{P=\pi^0,\eta,\eta'} c_P P, \tag{16}$$

где $c_P = c_P^{(0)} + c_P^{(1)}$. Как следствие, ширина двухфотонного распада принимает вид

$$\Gamma(P\to\gamma\gamma) = \frac{\alpha^2 m_P^3}{64\pi^3 f_{\pi^0}^2} c_P^2. \tag{17}$$

В лидирующем порядке (LO) получаем

$$c_{\pi^0}^{(0)} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\epsilon_0(c_0 - \sqrt{8}s_0) + \epsilon_0'(s_0 + \sqrt{8}c_0)\right],$$
$$c_\eta^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(c_0 - \sqrt{8}s_0\right) - \epsilon_0,$$
$$c_{\eta'}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(s_0 + \sqrt{8}c_0\right) - \epsilon_0', \tag{18}$$

где $c_0 \equiv \cos\theta_0$, $s_0 \equiv \sin\theta_0$, угол η-η' смешивания $\theta_0 = -14.97^\circ$, а углы π^0-η и π^0-η' смешивания равны $\epsilon_0 = 0.0177$ и $\epsilon'_0 = 0.0033$ сответственно.

В следующем порядке (NLO) формулы (18) получают дополнительные вклады $c_P^{(1)}$, возникающие от малых поправок к углам смешивания: $\Delta\theta = -0.79^\circ$, $\Delta\epsilon = -6.3\cdot 10^{-3}$, $\Delta\epsilon' = -1.2\cdot 10^{-3}$, и линейной зависимости констант распада от масс токовых кварков $f_{i=u,d,s} = F\,(1+\bar a m_i/(2M_0))$. Соответствующие выражения имеют вид

$$
\begin{aligned}
c_{\pi^0}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[&(\Delta\epsilon + \Delta\theta\epsilon'_0)(c_0-\sqrt{8}s_0) + (\Delta\epsilon' - \Delta\theta\epsilon_0)\,\times \\
&\times(s_0+\sqrt{8}c_0)\Big] - \frac{\bar a}{6M_0}\Big\{4m_u - m_d\, + \\
&+\frac{5\hat m}{\sqrt{3}}\left[\epsilon'_0(s_0+\sqrt{2}c_0)+\epsilon_0(c_0-\sqrt{2}s_0)\right] + \\
&+\sqrt{\frac{2}{3}}m_s\left[\epsilon'_0(c_0-\sqrt{2}s_0) - \epsilon_0(s_0+\sqrt{2}c_0)\right]\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_\eta^{(1)} = &-\Delta\epsilon - \frac{\Delta\theta}{\sqrt{3}}\left(s_0+\sqrt{8}c_0\right) + \frac{\bar a}{6\sqrt{3}M_0}\Big[3\sqrt{3}\hat m\epsilon_0\, + \\
&+(4m_u+m_d)(\sqrt{2}s_0 - c_0) + \sqrt{2}m_s(s_0+\sqrt{2}c_0)\Big], \\
c_{\eta'}^{(1)} = &-\Delta\epsilon' + \frac{\Delta\theta}{\sqrt{3}}(c_0-\sqrt{8}s_0) + \frac{\bar a}{6\sqrt{3}M_0}\Big[3\sqrt{3}\hat m\epsilon'_0\, - \\
&-(4m_u+m_d)(\sqrt{2}c_0+s_0) - \sqrt{2}m_s(c_0-\sqrt{2}s_0)\Big].
\end{aligned}
\tag{19}
$$

При получении этих вкладов мы систематически пренебрегали малыми членами $(m_d-m_u)^2$, а также воспользовались общепринятым обозначением $\hat m = (m_u+m_d)/2$.

Обсудим полученный результат:

(a) Начнем с формулы (16), где мы заменили общую константу F на $f_{\pi^0} = 92.277 \pm 0.095$ МэВ. Это фиксирует нормировку аномалии. Как известно [1], тождества Уорда определяют эффективные вершины аномальной части лагранжиана с точностью до произвольной константы F, которую обычно связывают с константой распада нейтрального пиона f_{π^0}, а ее численное значение можно извлечь из константы слабого распада заряженного пиона $f_{\pi^\pm}$. Они отличаются от F только в следующем порядке кирального разложения, что несущественно при рассмотрении лидирующего вклада. В частности, отсюда следует известный результат для ширины распада π^0-мезона

$$
\Gamma(\pi^0\to 2\gamma) = \frac{\alpha^2 m_{\pi^0}^3}{64\pi^3 f_{\pi^0}^2} = 7.750\pm 0.016\,\text{эВ}, \tag{20}
$$

который возникает из (18), если пренебречь эффектами смешивания, т.е., при $c_{\pi^0}^{(0)} = 1$. Ошибка в (20) связана с ошибкой в определении величины f_{π^0}.

Учет смешивания дает $c_{\pi^0}^{(0)} = 1.022$, что приводит к увеличению ширины распада на 4.4 %, $\Gamma_{\pi^0\to 2\gamma} = 8.094 \pm 0.017$ эВ. Если говорить о роли отдельных вкладов в (18), то мы наблюдаем доминирование π^0-η смешивания, на долю которого приходится 3.4 % указанного выше роста; смешивание π^0-η' добавляет еще 1.0 %. Точно такая же картина наблюдается и в $1/N_c\chi$ТВ [10]. Альтернативные вычисления, использующие χТВ и учитывающие эффекты кварковых масс и динамических фотонов, дают оценку $\Gamma_{\pi^0\to 2\gamma} = 8.06\pm 0.02\pm 0.06$ эВ [33]. Налицо общая тенденция: учет смешивания в лидирующем приближении ведет к увеличению ширины распада π^0-мезона приблизительно на 4.5 %.

Это противоречит экспериментальным данным, представленным PDG: $\Gamma_{\pi^0\to 2\gamma} = 7.72\pm 0.12$ эВ [34], а также приведенному выше объединенному результату коллабораций PrimEx-I и PrimEx-II. Феноменологические данные с большой точностью подтверждают предсказание киральной аномалии (20). Отсюда следует важность изучения высших поправок в используемых теоретических схемах. Задача становится еще более актуальной, если учесть, что ранее сделанные оценки указывали на стабильность LO-результата, относительно учета NLO поправок [10]. Единственным известным автору исключением является результат совместного использования дисперсионных соотношений и правил сумм. Этот метод позволил получить оценку $\Gamma_{\pi^0\to 2\gamma} = 7.93\pm 0.12$ эВ [13], которая, с одной стороны, обладает точностью, отвечающей точности измерений коллабораций PrimEx, а с другой – указывает на то, что учет эффектов смешивания приводит лишь к небольшому (2.3 %) росту ширины распада (20). В рамках приведенных ошибок здесь наблюдается согласие с экспериментом.

Теперь обратимся к формулам (19) и посмотрим, что к описанной выше картине могут добавить наши вычисления NLO вкладов. Поскольку все параметры модели, входящие в формулу (19), известны, находим

$$
c_{\pi^0}^{(1)} = -\,(6.15+1.66-0.3+8.6)\cdot 10^{-3} = -0.016. \tag{21}
$$

Здесь соответственно приведены вклады, отвечающие поправкам $\Delta\epsilon$, $\Delta\epsilon'$, $\Delta\theta$ к углам смешивания $\epsilon = \epsilon_0+\Delta\epsilon$, $\epsilon' = \epsilon'_0 + \Delta\epsilon'$, $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$, а также вклад явно зависящий от масс токовых кварков, который пропорционален $\bar a$. В совокупности с лидирующим вкладом это дает: $c_{\pi^0} = 1.006$ или

$$
\Gamma(\pi^0\to 2\gamma) = 7.84\pm 0.02\,\text{эВ}. \tag{22}
$$

Важно, что поправка $c_{\pi^0}^{(1)}$ отрицательна и приводит к существенному (3.1 %) подавлению эффектов смешивания в амплитуде распада пиона, ширина распада которого в итоге согласуется, как с экспериментальными данными [15, 34], так и с предсказанием правила сумм [13]. Приведенная в (22) ошибка учитывает только разброс в значении f_{π^0}. Неопределенности в оценке киральных поправок здесь не рассматривались.

Подавление эффектов смешивания не случайно. Помешать этому мог бы вклад $\propto \Delta\theta$, но в $1/N_c$ модели НИЛ поправка к углу η-η' смешивания пренебрежимо мала (напомним, что в $1/N_c\chi$ТВ она составляет около 50 %). Мы уже сталкивались с похожей ситуацией при обсуждении проблемы $\eta \to 3\pi$ распада [21], где отмечалась особая роль $U(1)$ аксиальной аномалии в подавлении эффекта η-η' смешивания. Распад $\pi^0 \to \gamma\gamma$ дает нам еще один пример, когда существенное нарушение изоспиновой симметрии в лидирующем приближении подавляется после учета NLO поправок.

(б) Перейдем к обсуждению результатов, полученных нами для случая двухфотонных распадов η и η' мезонов. Существенным отличием данных процессов от распада пиона с точки зрения теории является иная роль эффектов смешивания. Для распада $\pi^0 \to \gamma\gamma$ они малы, а значит, задача теории – объяснить механизм такого подавления. Наоборот, если пренебречь смешиванием при описании распадов $\eta, \eta' \to \gamma\gamma$, то формулы (18) дают известный отвечающий $U(3)$ симметрии результат: $c_\eta^{(0)} = 1/\sqrt{3} \simeq 0.58$, $c_{\eta'}^{(0)} = \sqrt{8}/\sqrt{3} \simeq 1.63$, который значительно расходится с экспериментальными оценками $c_\eta = 0.997 \pm \pm 0.017$, $c_{\eta'} = 1.243 \pm 0.028$ [34]. Поэтому теоретическое описание двухфотонных распадов η и η' мезонов являются еще одним важным этапом в понимании механизма явного нарушения киральной симметрии в КХД.

В лидирующем порядке формулы (18) дают $c_\eta^{(0)} = = 0.962$ и $c_{\eta'}^{(0)} = 1.425$, т.е., учет η-η' смешивания заметно улучшает результат – наблюдаемые значения амплитуд отличаются от предсказываемых не более чем на 13 %. Если же принять во внимание NLO поправки (19), то согласие станет еще лучше: $c_\eta = 1.10$ и $c_{\eta'} = 1.24$. При этом доминирующий вклад в константы $c_\eta^{(1)} = 0.137$ и $c_{\eta'}^{(1)} = -0.185$ приходится на члены, содержащие множитель $\bar{a}$, которые соответственно дают 0.111 и -0.173. Теоретическая оценка ширины распада $\Gamma_{\eta'\to 2\gamma} = 4.26 \pm 0.01$ КэВ полностью согласуется с усредненным значением, приводимым PDG $\Gamma_{\eta'\to 2\gamma} = 4.28 \pm 0.19$ КэВ, а ширина распада η-мезона $\Gamma_{\eta\to 2\gamma} = 0.626 \pm 0.001$ КэВ оказывается выше экспериментального значения $\Gamma_{\eta\to 2\gamma} = 0.515 \pm 0.018$ КэВ.

Таким образом, $1/N_c$ модель НИЛ дает хороший результат для всех трех двухфотонных распадов. Дальнейший прогресс здесь может быть связан с выходом за рамки NLO приближения [43], или рассмотрением нового взаимодействия, нарушающего правило Цвейга [36]. Последнее возможно при наличии недиагональных членов в кинетической части эффективного лагранжиана, диагонализация которой требует использования уже двух углов η-η' смешивания. В обоих указанных случаях увеличивается число свободных параметров, а значит появляются дополнительные восможности для успешного описания двухфотонных распадов [37].

Обратимся наконец к вычислению контактной части амплитуд $\eta/\eta' \to \pi^+\pi^-\gamma$ распадов, которая описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}_{\rm WZW} = \frac{ieN_c}{24\pi^2} e^{\mu\nu\rho\sigma} A_\mu \langle Q\partial_\nu\phi\partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi\rangle. \qquad (23)$$

Вклад четырехугольной аномалии является предметом постоянного внимания коллабораций, изучающих радиационные распады $\eta/\eta' \to \pi^+\pi^-\gamma$ (WASA-at-COSY, ARGUS, KLOE, MARK II, JADE, CELLO, PLUTO, WA76, TASSO, TPC, Crystal Barrel, BESIII). С одной стороны, данные моды позволяют протестировать контактный член неабелевой аномалии ВЗВ, с другой – при высокой статистике событий возникает возможность изучения эффектов явного нарушения симметрии в контактном взаимодействии. Этот аспект исследований не менее интересен, поскольку способствует более глубокому проникновению в тонкости механизма явного нарушения киральной симметрии в КХД.

Без надежных методов расчета (как аналитических, так и на решетке) здесь трудно ожидать успеха. Задача усложняется, поскольку требует тщательного учета сильных взаимодействий, отвечающих за рождение $\pi^+\pi^-$-пары. Для теоретического описания распадов $\eta/\eta' \to \pi^+\pi^-\gamma$ используют методы киральной теории возмущений [38], а также эффективные мезонные лагранжианы, учитывающие вклад векторных частиц [39, 40]. Предприняты попытки и комбинированного применения дисперсионных методов и аппарата эффективной киральной теории поля [41]. Такой подход позволяет воспроизвести аналитические свойства амплитуды, принять во внимание взаимодействие пионов в конечном состоянии, а также учесть эффекты явного нарушения изоспиновой симметрии за счет ρ-ω смешивания. В результате удается с большой точностью описать данные коллаборации BESIII, обладающие к тому же очень высокой статистикой (9.7×10^5 событий $\eta' \to \pi^+\pi^-\gamma$)

[42]. Наиболее точное теоретическое описание спектральных данных, отвечающих двух-пионным событиям, получается в результате фитирования, при котором контактный вклад α_0 рассматривается, как свободный параметр. Этот фит имеет наименьший $\chi^2 = 1.74$ и дает значение

$$\alpha_0 = 18.41 \pm 0.19\,\text{ГэВ}^{-3} \quad [41]. \tag{24}$$

С другой стороны, величину α_0 можно рассчитать теоретически

$$\alpha_0 = \frac{\sqrt{2}N_c}{18\sqrt{3}\pi^2 f_{\pi^0}^3 \Omega_1^1(4m_\pi^2)} c_{\eta'\pi^+\pi^-}, \tag{25}$$

где $c_{\eta'\pi^+\pi^-} = \sin\theta_P + \sqrt{2}\cos\theta_P$, а θ_P – угол η-η' смешивания. $\Omega_1^1(s)$ – функция Омнеса, которая возникает в результате учета перерассеяния пионов в конечном состоянии. Выбор точки $s = 4m_\pi^2$ – киральная подгонка, которая позволяет уменьшить число параметров в амплитуде, соответственно $\Omega_1^1(4m_\pi^2) = 1.159$. С учетом величины угла смешивания $\theta_P = -21.37°$, из (25) следует, что $\alpha_0 = 14.37\,\text{ГэВ}^{-3}$. Схема с двумя углами смешивания приводит к значению $\alpha_0 = 15.17\,\text{ГэВ}^{-3}$ [41], что ближе к (24). При этом авторы воспользовались параметрами, полученными в NNLO приближении $U(3)$ χТВ [43].

Найдем значение параметра α_0 в $1/N_c$ модели НИЛ, ограничившись, как и раньше, NLO приближением. Соответствующие вклады в коэффициент $c_{\eta'\pi^+\pi^-} = c^{(0)}_{\eta'\pi^+\pi^-} + c^{(1)}_{\eta'\pi^+\pi^-}$ имеют вид

$$\begin{aligned} c^{(0)}_{\eta'\pi^+\pi^-} &= s_0 + \sqrt{2}c_0 - \sqrt{3}\epsilon_0', \\ c^{(1)}_{\eta'\pi^+\pi^-} &= \Delta\theta(c_0 - \sqrt{2}s_0) - \sqrt{3}\Delta\epsilon' + 3\sqrt{3}\frac{\hat{m}\bar{a}}{2M_0}\epsilon_0' - \\ &- \frac{\bar{a}}{2M_0}(2m_u + m_d)(\sqrt{2}c_0 + s_0). \end{aligned} \tag{26}$$

При подстановке в (25) это дает

$$\alpha_0 = (15.60 \mp 0.05)\,\text{ГэВ}^{-3}. \tag{27}$$

С учетом указанных ошибок это на 14 % ниже величины (24), но тем не менее (27) ближе всех из приведенных выше теоретических оценок к данным BESIII. Видно, что NLO поправка уменьшает LO результат, который равен $\alpha_0^{(0)} = 16.69 \mp 0.05\,\text{ГэВ}^{-3}$. Отдельные слагаемые в (26) дают следующие вклады $\alpha_0^{(1)} = (-0.28 + 0.03 + 0.00 - 0.84 = -1.09)\,\text{ГэВ}^{-3}$. Как и можно было ожидать, здесь доминируют вклады отвечающие за нарушение $SU(3)$ симметрии. Поправки от нарушения изоспиновой симметрии невелики, меньше 3 %. NNLO вычисления в $1/N_c$ модели НИЛ могут еще более улучшить согласие с (24).

Для полноты картины приведем результаты аналогичных расчетов для распада $\eta \to \pi^+\pi^-\gamma$. В данном случае $c_{\eta\pi^+\pi^-} = c^{(0)}_{\eta\pi^+\pi^-} + c^{(1)}_{\eta\pi^+\pi^-}$, где

$$\begin{aligned} c^{(0)}_{\eta\pi^+\pi^-} &= c_0 - \sqrt{2}s_0 - \sqrt{3}\epsilon_0, \\ c^{(1)}_{\eta\pi^+\pi^-} &= -\Delta\theta(s_0 + \sqrt{2}c_0) - \sqrt{3}\Delta\epsilon + 3\sqrt{3}\frac{\hat{m}\bar{a}}{2M_0}\epsilon_0 + \\ &+ \frac{\bar{a}}{2M_0}(2m_u + m_d)(\sqrt{2}s_0 - c_0). \end{aligned} \tag{28}$$

Современные экспериментальные данные по распаду $\eta \to \pi^+\pi^-\gamma$ пока не обладают необходимой статистикой, позволяющей с высокой точностью фиксировать величину контактного вклада. Поэтому мы ограничимся вычислением контактного члена (25) (с очевидной заменой $c_{\eta'\pi^+\pi^-} \to c_{\eta\pi^+\pi^-}$ и соответственно $\alpha_0 \to \alpha_{0\eta}$), величина которого будет дополнительным тестом $1/N_c$ модели НИЛ при сравнении с будущими прецизионными измерениями. Из формул (28) находим

$$\alpha_{0\eta} = (19.11 \mp 0.06)\,\text{ГэВ}^{-3}. \tag{29}$$

Здесь результат NLO вычислений оказывается меньше, чем в случае с η'-мезоном, но тенденция остается та же: первая поправка $\alpha_{0\eta}^{(1)} = (0.23 + 0.16 + 0.03 - 1.01 = -0.59)\,\text{ГэВ}^{-3}$ уменьшает лидирующий вклад $\alpha_{0\eta}^{(0)} = (19.70 \mp 0.06)\,\text{ГэВ}^{-3}$. Интересно, что в данном случае оказывается заметным эффект от нарушения изоспиновой симметрии. На его долю приходится около 24 % NLO поправки.

В заключение автор хотел бы поблагодарить Д. И. Казакова и М. К. Волкова за интерес к работе и полезные обсуждения.

1. J. Wess and B. Zumino, Phys. Lett. B **37**, 95 (1971).
2. E. Witten, Nucl. Phys. B **223**, 422 (1983).
3. S. Weinberg, Physica A **96**, 327 (1979).
4. J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl. Phys. B **250**, 465 (1985).
5. B. Moussallam, Phys. Rev. D **51**, 4939 (1995).
6. H. Leutwyler, Phys. Lett. B **374**, 163 (1996).
7. H. Leutwyler, Phys. Lett. B **374**, 181 (1996).
8. P. Herrera-Siklódy, J.I. Latorre, P. Pascual, and J. Taron, Nucl. Phys. B **497**, 345 (1997).
9. R. Kaiser and H. Leutwyler, Eur. Phys. J. C **17**, 623 (2000).
10. J.L. Goity, A.M. Bernstein, and B.R. Holstein, Phys. Rev. D **66**, 076014 (2002).
11. A.M. Bernstein and B.R. Holstein, Rev. Mod. Phys. **85**, 49 (2013).
12. P. Bickert and S. Scherer, Phys. Rev. D **102**, 074019 (2020).

13. B. L. Ioffe and A. G. Oganesian, Phys. Lett. B **647**, 389 (2007).
14. S. Khlebtsov, Y. Klopot, A. Oganesian, and O. Teryaev, Phys. Rev. D **104**, 016011 (2021).
15. I. Larin, Y. Zhang, A. Gasparian et al. (PrimEx-II Collaboration), Science **368**, 506 (2020).
16. L. Gan, B. Kubis, E. Passemar, and S. Tulin, Phys. Rep. **945**, 1 (2022).
17. A. A Osipov, JETP Lett. **115**, 305 (2022).
18. A. A. Osipov, JETP Lett. **115**, 371 (2022).
19. A. A. Osipov, Phys. Rev. D **108**, 016014 (2023).
20. A. A. Osipov, arXiv:hep-ph/2303.01865 (2023).
21. A. A. Osipov, Письма ЖЭТФ **117**, 894 (2023).
22. A. A. Osipov, JETP Lett. **113**, 413 (2021).
23. A. A. Osipov, Phys. Lett. B **817**, 136300 (2021).
24. A. A. Osipov, Phys. Rev. D **104**, 105019 (2021).
25. G. Veneziano, Nucl. Phys. B **159**, 213 (1979).
26. C. Rosenzweig, J. Schechter, and G. Trahern, Phys. Rev. D **21**, 3388 (1980).
27. P. Di Vecchia and G. Veneziano, Nucl. Phys. B **171**, 253 (1980).
28. K. Kawarabayashi and N. Ohta, Nucl. Phys. B **175**, 477 (1980).
29. P. Di Vecchia, F. Nicodemi, R. Pettorino, and G. Veneziano, Nucl. Phys. B **181**, 318 (1981).
30. K. Kawarabayashi and N. Ohta, Prog. Theor. Phys. **66**, 1709 (1981).
31. E. Witten, Nucl. Phys. B **156**, 269 (1979).
32. D. B. Kaplan and A. V. Manohar, Phys. Rev. Lett. **56**, 2004 (1986).
33. B. Ananthanarayan and B. Moussallam, JHEP **05**, 052 (2002).
34. R. L. Workman, V. D. Burkert, V. Crede et al. (Particle Data Group), Prog. Theor. Exp. Phys. **2022**, 083C01 (2022).
35. X.-K. Guoa, Z.-H. Guoa, J. A. Oller, and J. J. Sanz-Cillerod, JHEP **06**, 175 (2015).
36. J. Schechter, A. Subbaraman, and H. Weigel, Phys. Rev. D **48**, 339 (1993).
37. R. Escribano and J-M. Frère, JHEP **0506**, 029 (2005).
38. J. Bijnens, A. Bramon, and F. Cornet, Phys. Lett. B **237**, 488 (1990).
39. M. Benayoun, P. David, L. DelBuono, Ph. Leruste, and H. B. O'Connell, Eur. Phys. J. C **31**, 525 (2003).
40. A. A. Osipov, A. A. Pivovarov, M. K. Volkov, and M. M. Khalifa, Phys. Rev. D **101**, 094031 (2020).
41. L.-Y. Dai, X.-W. Kang, U.-G. Meißner, X.-Y. Song, and D.-L. Yao, Phys. Rev. D **97**, 036012 (2018).
42. M. Ablikim, M. N. Achasov, S. Ahmed et al. (BESIII Collaboration), Phys. Rev. Lett. **120**, 242003 (2018).
43. X. K. Guo, Z. H. Guo, J. A. Oller, and J. J. Sanz-Cillero, JHEP **175**, 1506 (2015).