Письма в ЖЭТФ, том 118, вып. 4, с. 297 – 304 © 2023 г. 25 августа

Квазиклассическое квантование движения частицы в присутствии силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости

С. В. Сазонов[1)]

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), 125993 Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 июня 2023 г.
После переработки 19 июля 2023 г.
Принята к публикации 19 июля 2023 г.

С использованием подхода типа Калдиролы–Канаи рассмотрена квазиклассическая версия одномерного движения частицы в среде, где сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости частицы. Исследовано когерентное состояние частицы в случае, когда, помимо силы сопротивления, присутствует постоянная консервативная сила. Показано, что волновой пакет плотности вероятности испытывает квантовое расплывание до определенного предела, образуя стационарный распространяющийся профиль. Таким образом, сила сопротивления подавляет квантовые свойства частицы, все больше выделяя с течением времени классические черты в ее движении. Данное обстоятельство позволяет рассматривать такую среду как классический прибор, непрерывно измеряющий состояние частицы. В этой связи ограничение пространственного расплывания волновой функции можно интерпретировать как одно из проявлений квантового эффекта Зенона.

DOI: 10.31857/S1234567823160127, EDN: iwmsgm

1. Введение. Процедуры квантования консервативных систем хорошо разработаны и к настоящему времени являются общепринятыми, приводя к согласиям с различными экспериментальными данными. Что же касается квантового описания открытых диссипативных систем, то здесь не все так однозначно. На сегодняшний день существует множество подходов к квантованию движения диссипативных объектов, приводящих к физически разумным результатам [1–14]. Данный вопрос представляется весьма важным. Следует отметить, что корректный учет диссипативных процессов должен согласовываться со вторым началом термодинамики [15, 16]. Кроме того, встречаются ситуации, когда диссипативные процессы играют принципиальную роль в реализации когерентных явлений [17, 18].

Подход, предложенный в [1, 2], обладает тем преимуществом, что при нем оператор эволюции является унитарным. Следовательно, сохраняется квадрат нормы вектора состояния. Как результат, физическая интерпретация волновой функции остается той же, что и в консервативном случае.

С помощью подхода Калдиролы–Канаи совершено квантовое описание движения частицы в вязкой среде, в которой при классическом рассмотрении на частицу действует сила вязкого трения, пропорциональная скорости. В то же время хорошо известно, что данный закон справедлив при относительно малых скоростях. При больших же скоростях становится существенной сила сопротивления среды, пропорциональная квадрату скорости. Настоящая работа посвящена исследованию движения квантовой частицы на основе обобщения метода квантования Калдиролы–Канаи при учете данной силы.

2. Модифицированная модель Калдиролы–Канаи. Вначале рассмотрим одномерное движение классической частицы массы m, описываемое лагранжианом вида

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} e^{\gamma t + 2\beta x \mathrm{sgn}(\dot{x})}, \tag{1}$$

где x – координата частицы, γ и β – положительные постоянные, соответствующие классической силе вязкого сопротивления, $\mathrm{sgn}(\dot{x})$ – функция сигнатуры скорости, точкой над координатой, как обычно, обозначена производная по времени.

Записав для (1) уравнение Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ с учетом равенств $d\,\mathrm{sgn}(\dot{x})/d\dot{x} = 2\delta(\dot{x})$, $\dot{x}\delta(\dot{x}) = \dot{x}^2\delta(\dot{x}) = 0$, $\dot{x}\,\mathrm{sgn}(\dot{x}) = |\dot{x}|$, где $\delta(\dot{x})$ – дельта-функция Дирака, получим

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \beta|\dot{x}|\dot{x} = 0. \tag{2}$$

Таким образом, лагранжиан (1) порождает классическое уравнение движения (2) частицы при дей-

[1)]e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

ствии сил вязкого трения и сопротивления, описываемых соответственно вторым и третьим слагаемыми в левой части (2).

Пусть теперь в положительном направлении оси x к классической частице приложена также постоянная сила F. При этом выполняется условие неотрицательности скорости частицы: $\dot{x} \geq 0$.

Тогда из лагранжиана

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} e^{\gamma t + 2\beta x} + F e^{\gamma t} \frac{e^{2\beta x} - 1}{2\beta} \tag{3}$$

будем иметь

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \beta \dot{x}^2 = F/m. \tag{4}$$

Данное уравнение справедливо для классической частицы, скорость $v_c = \dot{x}$ которой остается положительной на протяжении всего ее движения. Из (4) легко видеть, что это условие выполняется, если положительна начальная скорость v_0 частицы.

Перейдем к построению гамильтониана $H = p\dot{x} - L$, где канонический импульс

$$p = \partial L / \partial \dot{x} = m\dot{x} e^{\gamma t + 2\beta x}. \tag{5}$$

Тогда отсюда и из (3) найдем

$$H = e^{-\gamma t} \frac{p^2}{2m} e^{-2\beta x} - F e^{\gamma t} \frac{e^{2\beta t} - 1}{2\beta}. \tag{6}$$

Следуя процедуре канонического квантования и работе [2], заменим канонический импульс p и координату x соответствующими эрмитовыми операторами $\hat{p}$ и $\hat{x}$ со стандартным коммутационным соотношением $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, где $\hbar$ – постоянная Планка. Тогда в координатном представлении имеем, как обычно, $\hat{p} = -i\hbar \partial / \partial x$ и $\hat{x} = x$.

Так как импульс, а вместе с ним и скорость теперь стали операторами, то из-за квантовых флуктуаций классическое условие положительности скорости частицы может нарушаться. Однако, если сразу пользоваться квазиклассическим приближением Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) [19], то условие $v_c > 0$ следует дополнить неравенством

$$v_c \gg \Delta v_c, \tag{7}$$

где Δv_c – квантовая неопределенность скорости.

Ниже мы еще вернемся к данному неравенству.

При построении с помощью (6) оператора Гамильтона $\hat{H}$ необходимо учесть, что оператор $\hat{p}$ не коммутирует с функцией $e^{-2\beta x}$. Следовательно, возникает проблема упорядочения операторов в (6). Здесь необходимо удовлетворить двум условиям: эрмитовости оператора $\hat{H}$ и унитарности оператора эволюции. Условию эрмитовости удовлетворяет замена $p^2 e^{-2\beta x} \to \hat{p} e^{-2\beta x} \hat{p}$. Отсюда и из (6) приходим к оператору Гамильтона

$$\hat{H} = \frac{e^{-\gamma t}}{2m} \hat{p} e^{-2\beta x} \hat{p} - F e^{\gamma t} \frac{e^{2\beta t} - 1}{2\beta}. \tag{8}$$

Соответствующее уравнение Шредингера для волновой функции $\psi(x,t)$ в координатном представлении имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} e^{-\gamma t} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-2\beta x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - F e^{\gamma t} \frac{e^{2\beta x} - 1}{2\beta} \psi. \tag{9}$$

Уравнение (9) соответствует квантовому описанию движения частицы, классическая динамика которой описывается уравнением (4). Если заранее считать выполненным условие (7), то можно сказать, что уравнение (9) в квазиклассическом смысле соответствует движению классической частицы в положительном направлении оси x. При этом уравнение движения классической частицы совпадает с уравнением (2).

Легко видеть, что из (9) следует уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \tag{10}$$

где

$$\rho = |\psi|^2, \quad j = \frac{\hbar}{2mi} e^{-\gamma t - 2\beta x} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right). \tag{11}$$

В результате имеем условие унитарности, усиленное нормировкой, характерной для квантовой механики консервативных систем: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx = 1$. Таким образом, модифицированный подход Калдиролы–Канаи позволяет сохранить интерпретацию функции $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ как плотности вероятности обнаружения частицы в точке с координатой x.

Полагая в (9) $\beta = 0$, приходим к уравнению Шредингера при наличии только силы вязкого трения [11, 20].

3. Квазиклассический волновой пакет. Пусть в начальный момент времени, при $t = 0$, частица, попавшая в среду с сопротивлением, обладает начальной скоростью v_0, совпадающей по направлению с внешней постоянной силой F. Исследуем динамику квантового волнового пакета $\psi(x,t)$ данной частицы с течением времени. В целях простоты будем считать, что скорость частицы в течение всего процесса настолько велика, что силой вязкого трения можно пренебречь по сравнению с силой сопротивления. Тогда в (9) можно положить $\gamma = 0$.

В силу условия (7) будем искать приближенное решение уравнения (9) с помощью метода ВКБ. Для этого представим волновую функцию в виде [19]

$$\psi = e^{iS/\hbar}, \tag{12}$$

где $S(x,t)$ – комплексное действие, которое в соответствии с методом ВКБ представимо в виде разложения в ряд по степеням постоянной Планка

$$S = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hbar^k S_k. \tag{13}$$

Подставляя (12) и (13) в (9) и приравнивая в левой и правой частях коэффициенты при равных степенях $\hbar$, придем к бесконечной цепочке уравнений

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 e^{-2\beta x} - F\frac{e^{2\beta x}-1}{2\beta} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial S_k}{\partial t} + \frac{1}{m}\frac{\partial S_0}{\partial x}e^{-2\beta x}\frac{\partial S_k}{\partial x} = \\ = \frac{1}{2m}\left[i\left(\frac{\partial^2 S_{k-1}}{\partial x^2} - 2\beta\frac{\partial S_{k-1}}{\partial x}\right) - Q_k\right]e^{-2\beta x}, \tag{15}$$

где $k = 1, 2, \ldots$, для нечетных и четных значений k функции Q_k имеют соответственно вид

$$Q_k = 2\sum_{l=0}^{(k-3)/2} \frac{\partial S_{(k+1)/2+l}}{\partial x}\frac{\partial S_{(k-1)/2-l}}{\partial x}, \tag{16}$$

$$Q_k = \left(\frac{\partial S_{k/2}}{\partial x}\right)^2 + 2\sum_{l=0}^{(k-4)/2} \frac{\partial S_{(k+2)/2+l}}{\partial x}\frac{\partial S_{(k-2)/2-l}}{\partial x}, \tag{17}$$

$Q_1 = 0$, $Q_2 = (\partial S_1/\partial x)^2$.

Полагая в (14) $S_0(x,t) = \Phi_0(t)e^{2\beta x} + f_0(t)$, будем иметь

$$\left(\dot{\Phi}_0 + 2\beta^2\Phi_0^2/m - F/2\beta\right)e^{2\beta x} + \left(\dot{f}_0 + F/2\beta\right) = 0.$$

Приравнивая по отдельности к нулю выражения в скобках, после интегрирования получим

$$S_0 = m\frac{v_c e^{2\beta x} - v_0}{2\beta} - \frac{Ft}{2\beta}. \tag{18}$$

Здесь классическая скорость v_c определяется выражением

$$v_c = v_\infty \frac{v_0 + v_\infty \tanh\beta v_\infty t}{v_\infty + v_0\tanh\beta v_\infty t}, \tag{19}$$

величина

$$v_\infty = \sqrt{\frac{F}{m\beta}} \tag{20}$$

имеет смысл скорости установившегося движения.

После подстановки (18) в (15) для $k = 1$ придем к уравнению $\partial S_1/\partial t + v_c\partial S_1/\partial x = 0$, которое имеет общее решение в виде произвольной функции переменной $x - x_c$, где классическая координата частицы

$$x_c = \frac{1}{\beta}\ln\left(\cosh\beta v_\infty t + \frac{v_0}{v_\infty}\sinh\beta v_\infty t\right). \tag{21}$$

Пусть при $t = 0$ волновой пакет плотности вероятности частицы имеет вид гауссовой функции. Тогда в соответствии с (12) и (13) положим

$$S_1 = i\frac{(x-x_c)^2}{2l_0^2} + b_{10}, \tag{22}$$

где l_0 имеет смысл начальной ширины волнового пакета, а b_{10} – некоторая постоянная.

Теперь сделаем естественное для приближения ВКБ предположение о сильной локализации волнового пакета [21, 22] в окрестности классической траектории частицы. В данном случае это условие запишем в виде

$$\beta l \ll 1, \tag{23}$$

где l – характерная ширина волнового пакета в произвольный момент времени $t \geq 0$.

Смысл условия сильной локализации состоит в том, что плотность вероятности обнаружения частицы отлична от нуля в малой окрестности: $|x - x_c| \sim l$. Очевидно, что в силу квантового расплывания волнового пакета справедливо неравенство $l > l_0$.

Приведенные выше рассуждения позволяют нам пренебречь вторыми слагаемыми в круглых скобках (15). Кроме того, благодаря условию (23), в правых частях (15) совершим приближенную замену

$$e^{-2\beta x} \approx Z_c = e^{-2\beta x_c} = \\ = [\cosh\beta v_\infty t + (v_0/v_\infty)\sinh\beta v_\infty t]^{-2}. \tag{24}$$

Здесь мы также использовали выражение (21).

Резюмируя, перепишем (15) для $k \geq 2$ следующим образом

$$\frac{\partial S_k}{\partial t} + v_c\frac{\partial S_k}{\partial x} = \frac{Z_c}{2m}\left(i\frac{\partial^2 S_{k-1}}{\partial x^2} - Q_k\right). \tag{25}$$

Будем искать решение уравнений (25) в виде

$$S_k = a_k(t)(x-x_c)^2 + b_k(t). \tag{26}$$

Подставляя (26) в (25) с учетом (16), (17) и равенства $\dot{x}_c = v_c$, придем к уравнениям

$$\dot{a}_k = -\frac{4}{m}Z_c\sum_{l=0}^{(k-3)/2} a_{(k+1)/2+l}\,a_{(k-1)/2-l} \tag{27}$$

для нечетных k,

$$\dot{a}_k = -\frac{4}{m} Z_c \left(\frac{a_{k/2}^2}{2} + \sum_{l=0}^{(k-4)/2} a_{(k+2)/2+l} a_{(k-2)/2-l} \right) \tag{28}$$

для четных k,

$$\dot{k} = \frac{i}{m} Z_c a_{k-1} \tag{29}$$

для всех $k \geq 2$.

Интегрируя последовательно правые части (27)–(29), будем иметь для всех $k \geq 2$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{i}{2l_0^2 \hbar^{k-1}} (-ig)^{k-1}, \\ b_k &= \frac{i}{2(k-1)\hbar^{k-1}} (-ig)^{k-1} + b_{k0}, \end{aligned} \tag{30}$$

где b_{k0} – постоянные интегрирования, а безразмерный параметр

$$g = \frac{\hbar}{m l_0^2 \beta} \frac{\tanh \beta v_\infty t}{v_\infty + v_0 \tanh \beta v_\infty t}. \tag{31}$$

Из (13), (22), (26) и (30), после суммирования рядов, получим

$$i\frac{S}{\hbar} = i\frac{S_0}{\hbar} - \frac{(x-x_c)^2}{2l_0^2(1+ig)} - \frac{1}{2}\ln(1+ig) + \ln A, \tag{32}$$

где постоянная A определяется из условия нормировки.

Подставляя (32) в (12), после использования условия нормировки будем иметь выражение для волновой функции

$$\psi = \frac{1}{\pi^{1/4}} \sqrt{\frac{l_0}{l_0^2 + iq}} e^{i(S_0 - Ft/2)\hbar} \exp\left[-\frac{(x-x_c)^2}{2(l_0^2 + iq)} \right], \tag{33}$$

где

$$q = g l_0^2 = \frac{\hbar}{m\beta} \frac{\tanh \beta v_\infty t}{v_\infty + v_0 \tanh \beta v_\infty t}. \tag{34}$$

Таким образом, в приближении сильной локализации (23) волновая функция частицы сохраняет автомодельный гауссовский вид во все моменты времени.

С помощью (33) стандартным способом [20] легко вычислить неопределенности координаты Δx и канонического импульса Δp частицы в рассматриваемом состоянии: $\Delta x = l/\sqrt{2}$ и $\Delta p = \hbar/\sqrt{2}l$. Тогда для соотношения неопределенностей "координата – канонический импульс" имеем

$$\Delta x \cdot \Delta p = \hbar/2. \tag{35}$$

Итак, в квазиклассическом состоянии (33) данное соотношение неопределенностей принимает минимально возможное значение. Следовательно, можно сказать, что частица находится в когерентном состоянии.

В частном случае, когда сопротивление среды отсутствует ($\beta = 0$), из (34) следует, что $q = \hbar t/m$. Это в точности совпадает с хорошо известным выражением для свободной частицы, распространяющейся в пустоте [19, 23], волновая функция которой неограниченно расплывается в пространстве с течением времени. Данное обстоятельство является важным аргументов в пользу использованного здесь подхода.

Здесь уместно сделать еще одно замечание, касающееся выражения (33). При его выводе суммировались ряды по степеням безразмерного параметра g. Радиус сходимости данных рядов определяется неравенством $g < 1$. Однако рассмотренный выше частный случай $\beta = 0$ показывает, что выражение (33) справедливо для любых положительных значений g. Ситуации, когда сделанные приближения хорошо работают за первоначально очерченными рамками их применимости, не так редки. Например, такое встречается в квантовой теории многочастичных систем, когда суммируются ряды теории возмущений, описываемые фейнмановскими диаграммами различных порядков [24].

Из (33) для плотности вероятности находим

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\pi} l} \exp\left[-\frac{(x-x_c)^2}{l^2} \right], \tag{36}$$

где ширина волнового пакета

$$l = \sqrt{l_0^2 + q^2/l_0^2}. \tag{37}$$

Рассмотрим асимптотический случай больших времен $\beta v_\infty t \gg 1$. В этом пределе для ширины волнового пакета имеем

$$l_\infty = \sqrt{l_0^2 + \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\beta l_0} \right)^2}, \tag{38}$$

где приведенная дебройлевская длина волны $\tilde{\lambda}$ частицы определяется через ее начальную $\lambda_0 = \hbar/mv_0$ и конечную λ_∞/mv_∞ дебройлевские длины соотношением

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda_0 \lambda_\infty}{\lambda_0 + \lambda_\infty}. \tag{39}$$

При наличии внешней силы F, как видно из (19) и (21) при $\beta v_\infty t \gg 1$, имеем $v_c = v_\infty$ и $x = v_\infty t$.

Таким образом, при больших временах волновой пакет плотности вероятности представляет собой стационарный (нерасплывающийся) солитоноподобный домен, который распространяется с постоянной скоростью v_∞ в направлении внешней консервативной силы.

В случае равенства нулю начальной скорости частицы имеем $\lambda\!\!\!^{-}_0 = \infty$. Тогда, как видно из (39), в (38) справедлива замена $\tilde{\lambda\!\!\!^{-}} \to \lambda\!\!\!^{-}_\infty$.

Нетрудно показать, что при $\beta = 0$, т.е. в присутствии только силы вязкого трения, уравнение (9) обладает точным решением, из которого следуют уже точные, а не приближенные выражения вида (36) и (37). Только теперь в этих выражениях $x_c = (F/m\gamma)(t-\tau)$ и $q = \hbar\tau/m$, где $\tau = (1-e^{-\gamma t})/\gamma$. При больших временах $\gamma t \gg 1$ имеем приближенно $x_c = Ft/m\gamma$ и $q = \hbar/m\gamma$. Следовательно, здесь, как и в случае силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости частицы, при больших временах для плотности вероятности имеем солитоноподобный домен. При этом его установившаяся ширина $l_\infty = \sqrt{l_0^2 + (\hbar/m\gamma)^2/l_0^2}$.

Как результат, можно констатировать, что силы вязкого трения и сопротивления по отдельности препятствуют квантовому расплыванию волновой функции микрочастицы. В настоящей работе основное внимание уделено именно силе сопротивления, так как процедура канонического квантования типа Калдироль–Канаи для этого случая, в отличие от случая присутствия силы вязкого сопротивления, насколько известно автору, ранее не проводилась.

Прекращение расплывания волнового пакета при больших временах говорит о том, что сила сопротивления подавляет квантовые свойства частицы, которая с течением времени все больше начинает вести себя, как классический объект. Вязкость и вязкое сопротивление являются понятиями, присущими классической физике. С микроскопической точки зрения сила сопротивления появляется в результате столкновений рассматриваемой частицы с большим количеством других частиц среды. Каждое зафиксированное столкновение можно рассматривать как своеобразный акт измерения, сопровождаемый коллапсом волновой функции. Затем, до следующего столкновения, следует квантовое расплывание волнового пакета и т.д. Регистрация столкновений неявно обеспечивается введением макроскопических (усредненных по большому числу столкновений) понятий вязкости и силы сопротивления. Таким образом, столкновения, порождающие силу сопротивления, препятствуют квантовому расплыванию волновой функции. На макроскопических временных масштабах процесс препятствия квантовому расплыванию волнового пакета является непрерывным и описывается выражениями (34), (36) и (37).

Суммируя сказанное в предыдущем абзаце, распространение микрочастицы в вязкой среде следует рассматривать как непрерывный процесс измерения ее параметров. В частности, речь можно вести об измерении координаты. В результате непрерывное измерение, проводимое над частицей вязкой средой, препятствует неограниченному пространственному расплыванию волновой функции. Это приводит к "замораживанию" квантовой неопределенности координаты частицы. Такое поведение может быть интерпретировано как одно из проявлений квантового эффекта Зенона [25–28].

Пользуясь терминологией, принятой в [29], окружающую вязкую среду можно рассматривать как квазиклассический прибор, измеряющий параметры распространяющейся в ней микрочастицы.

Полагая в (38) $l_\infty \gg l_0$, придем к выражению

$$l_\infty = \frac{\hbar}{m\beta l_0(v_0 + v_\infty)}. \quad (40)$$

Уменьшение установившейся неопределенности l_∞ координаты частицы с увеличением коэффициента сопротивления β (см. (40)) подтверждает вывод о том, что сила сопротивления подавляет квантовые свойства частицы. С увеличением массы и скорости нерелятивистской частицы отчетливее должны проявляться ее классические свойства, что также отражено в выражении (40). Уменьшение начальной неопределенности l_0 координаты частицы приводит, вследствие соотношения Гейзенберга, к увеличению начальной неопределенности импульса, что способствует росту скорости расплывания волнового пакета. Этим качественно объясняется обратно пропорциональная зависимость в (40) установившейся неопределенности l_∞ координаты от ее начальной неопределенности l_0.

Таким образом, согласно (40), в установившейся ширине l_∞ волнового пакета плотности вероятности содержится память о начальных условиях.

Условие (23) сильной локализации волновой функции использовалось на каждой стадии разложения при суммировании рядов по степеням постоянной Планка. Данный прием позволил аналитически просуммировать ряды и привел в результате к выражению (33) для волновой функции. При этом неучтенными оказались слагаемые, на каждой стадии разложения, удовлетворяющие (23), но которые могли оказаться значимыми на более высоких стадиях. В квантовой теории поля аналогичный метод суммирования фейнмановских диаграмм называется “лестничным приближением” [24, 30]. В нашем случае данный подход можно оправдать тем, что учет отброшенных слагаемых не может изменить принципиального вывода о формировании стационарных локализованных доменов плотности вероятности. Действительно, переписывая (37) в виде $\beta l_\infty = \sqrt{(\beta l_0)^2 + (\tilde{\lambda}/l_0)^2}$, заметим, что условие (23) аналогично неравенству

$$\tilde{\lambda} \ll l_0. \tag{41}$$

Здесь полезно вернуться к неравенству (7), которое должно выполняться в каждый момент времени. Полагая $v_c = v_0$ и $\Delta v_c = \Delta v_0 \sim \hbar/ml_0$ при $t = 0$, снова придем к условию (41). Пусть теперь $t \to \infty$ и $v_0 \ll v_\infty$. Тогда $v_c = v_\infty$ и $\Delta v_c = \Delta v_\infty \sim \hbar/ml_\infty$. Отсюда, а также из (40) будем иметь $\beta l_0 \ll 1$, что представляет собой частный случай условия (23), эквивалентного неравенству (41).

Таким образом, условия (7), (23) и (41) хорошо согласуются между собой и с квазиклассическим приближением.

Согласно (41), можно утверждать, что в квазиклассическом когерентном состоянии (33) длина волны де Бройля рассматриваемой частицы значительно меньше неопределенности ее положения в пространстве в начальный момент времени. Это утверждение совпадает с аналогичным выводом, приведенным в [23] для свободной частицы, распространяющейся в вакууме, а также для частиц, рассеивающихся на внешнем потенциале [31], и для частиц в магнитном поле [32].

Таким образом, условие (23) равносильно определению (41) квазиклассического когерентного состояния и является для такого состояния вполне естественным. Данное обстоятельство является еще одним важным аргументом в пользу физической обоснованности вида волновой функции (33), а значит, и в пользу сделанного выше вывода о том, что сила сопротивления препятствует квантовому расплыванию волновой функции частицы.

Заметим, что условие квазиклассичности (7) с учетом (20) можно переписать в виде $F \gg \hbar^2\beta/ml^2$. Из простых физических соображений для β имеем оценку $\beta \sim \sigma n$, σ – эффективное сечение столкновений рассматриваемой молекулы с молекулами среды, n – концентрация молекул среды. Естественно считать, что $\sigma \sim l^2$. Тогда последнее условие запишем в виде

$$F \gg F_{\text{quant}}, \tag{42}$$

где

$$F_{\text{quant}} = \hbar^2 \frac{n}{m}. \tag{43}$$

Неравенство (43) можно рассматривать как еще одно условие применимости к рассмотренной задаче квазиклассического приближения.

Квантовая сила (43) пропорциональна концентрации молекул среды, поэтому она имеет коллективную природу. Это и понятно, так как эта сила связана с сопротивлением движению пробной частицы коллективом молекул среды.

Попадающие в пузырьковые камеры заряженные частицы в отсутствие внешних сил оставляют за собой треки в виде прямолинейных отрезков [33]. Поэтому проведенное выше исследование может рассматриваться как эмпирическая модель, описывающая работу таких классических приборов.

Взяв для концентрации молекул в пузырьковой камере $n \sim 10^{19}\,\text{см}^{-3}$, а для массы влетающей в нее α-частицы $m \sim 10^{-23}\,\text{г}$, найдем из (43) $F_{\text{quant}} \sim \sim 10^{-11}\,\text{мкН}$. С такой силой на α-частицу действует электрическое поле напряженностью $E \sim 10^2\,\text{В/м}$. Это поле порядка электрического поля Земли на ее поверхности. Таким образом для корректности квазиклассического описания напряженность электрического поля, разгоняющего α-частицу в пузырьковой камере, должна значительно превышать напряженность электрического поля Земли.

Неопределенность координаты влетевшей в среду α-частицы после первых столкновений становится порядка атомных размеров. Поэтому положим $l_0 \sim 10^{-8}\,\text{см}$. Пусть скорость α-частицы перед ее попаданием в среду $v_0 \sim 10^7\,\text{см/с}$, а длина ее трека $x_c \sim 1\,\text{мм}$ [33]. Тогда дебройлевская длина волны на входе $\lambda\!\!\!^{-}_0 \sim 10^{-11}\,\text{см}$. Взяв $x_c \sim 1/\beta$, для неопределенности координаты у окончания трека из (40) будем иметь оценку $l_\infty \sim x_c\lambda\!\!\!^{-}_0/l_0 \sim 10^{-4}\,\text{см}$. При этом условие (23) и равносильное ему в рассмотренном случае условие (41) выполняются с хорошей точностью.

Помимо классических сил сопротивления, порождаемых большим количеством атомов среды, существуют силы трения, имеющие сугубо квантовое происхождение. Это касается, например, силы трения Казимира–Лифшица, возникающей между проводящими пластинами при динамическом эффекте Казимира [34]. Не исключена возможность описания движения пластин с помощью рассмотренной здесь процедуры.

4. Заключение. В настоящей работе предложена каноническая процедура квазиклассического описания одномерного движения частицы в среде, обладающей силами вязкого трения и сопротивления. При этом сила вязкого трения пропорциональна скорости частицы, а сила сопротивления – квадрату скорости. Данная квазиклассическая процедура обобщает подход Калдиролы–Канаи на случай присутствия силы сопротивления и оставляет незыблемым постулат унитарности оператора эволюции, справедливый в квантовой механике консервативных систем. Соответствующее уравнение Шредингера в координатном представлении при учете постоянной консервативной силы имеет вид (9). С использованием квазиклассического приближения рассмотрено движение частицы при учете только силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости, и внешней консервативной силы. В результате найдена приближенная квазиклассическая волновая функция (33) и показано, что она соответствует когерентному состоянию частицы.

Сила сопротивления препятствует квантовому расплыванию волновой функции. На асимптотической стадии это приводит к конечным установившимся значениям квантовой неопределенности координаты частицы. В результате волновой пакет плотности вероятности преобразуется в движущийся локализованный домен, сохраняющий в своих параметрах (ширине и амплитуде) память о начальных условиях.

"Замораживание" процесса расплывания волновой функции с течением времени позволяет интерпретировать среду с сопротивлением как классический прибор, производящий непрерывное наблюдение за частицей. Здесь же уместной является аналогия с квантовым эффектом Зенона, который проявляет себя в процессе непрерывного измерения стационарного состояния микрообъекта.

В приближении (23) (см. также (41)) волновая функция (33) является автомодельной в сопутствующей системе отсчета. В более общем случае свойство автомодельности нарушится, но при этом область локализации волновой функции должна, благодаря силе сопротивления, остаться конечной. Более точный (количественный) ответ на данный вопрос может дать численный эксперимент с уравнением (9).

В дальнейшем было бы весьма желательно распространить описанный здесь подход на двумерный и трехмерный случаи. При силе сопротивления, пропорциональной квадрату скорости, это является весьма нетривиальной задачей. Ее решение позволило бы, например, эмпирически описать среды с сопротивлением в виде классических приборов в наиболее общем случае.

1. P. Caldirola, Nuovo Cimmento **18**, 393 (1941).
2. E. Kanai, Prog. Theor. Phys. **3**, 440 (1948).
3. V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, Phys. Rev. A **20**, 550 (1979).
4. K. H. Yeon and C. I. Um, Phys. Rev. A **36**, 5287 (1987).
5. В. Е. Тарасов, ТМФ **100**, 402 (1994) [V. E. Tarasov, Theor. Math. Phys. **100**, 1100 (1994)].
6. Б. А. Арбузов, ТМФ **106**, 300 (1996) [B. A. Arbuzov, Theor. Math. Phys. **106**, 249 (1996)].
7. V. E. Tarasov, Phys. Lett. A **288**, 173 (2001).
8. V. E. Tarasov, Phys. Rev. E **66**, 056116 (2002).
9. V. G. Kupriyanov, S. L. Lyakhovich, and A. A. Sharapov, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 8039 (2005).
10. D. M. Gitman and V. G. Kupriyanov, J. Math. Sciences **141**, 1399 (2007).
11. J. Guerrero, F. F. Lopez-Ruiz, V. Aldaya, and F. Cossio, J. Phys.: Conf. Ser. **284**, 012062 (2011).
12. S. Madjber, S. Menouar, and J. R. Choi, Entropy **23**, 837 (2021).
13. V. E. Tarasov, Ann. Physics **434**, 056116 (2021).
14. M. C. Parker and C. Jeynes, Entropy **25**, 629 (2023).
15. А. М. Башаров, Оптика и спектроскопия **128**, 186 (2020) [A. M. Basharov, Optics and Spectroscopy **128**, 182 (2020)].
16. А. М. Башаров, ЖЭТФ **158**, 978 (2020) [A. M. Basharov, JETP **131**, 853 (2020)].
17. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **117**, 543 (2023) [S. V. Sazonov, JETP Lett. **117**, 540 (2023)].
18. S. V. Sazonov, Laser Phys. Lett. **20**, 056001 (2023).
19. В. В. Балашов, В. К. Долинов, *Курс квантовой механики*, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ижевск (2001).
20. В. В. Додонов, В. И. Манько, О. В. Манько, Труды ФИАН им. П. Н. Лебедева **200**, 155 (1991).
21. В. М. Бабич, Ю. П. Данилов, Зап. научн. сем. ЛОМИ **15**, 47 (1969).
22. В. Г. Багров, В. В. Белов, И. М. Тернов, ТМФ **50**, 390 (1982) [V. G. Bagrov, V. V. Belov, and I. M. Ternov, Theor. Math. Phys. **50**, 256 (1982)].
23. В. Г. Багров, Д. М. Гитман, А. С. Перейра, УФН **184**, 961 (2014) [V. G. Bagrov, D. M. Gitman, and A. S. Pereira, Phys.-Uspekhi **57**, 891 (2014)].
24. Р. Маттук, *Фейнмановские диаграммы в проблеме многих тел*, Мир, М. (1969) [R. D. Mattuk, *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem*, McGraw-Hill Publishing Company Limited, London (1967)].
25. B. Misra and E. C. G. Sundarshan, J. Math. Phys. **18**, 756 (1977).
26. R. J. Cook, Phys. Scr. **21**, 49 (1988).
27. K. Molhave and M. Drewen, Phys. Lett. A **268**, 45 (2000).
28. O. Hosten, M. T. Rakher, J. T. Barreiro, N. A. Peters, and P. G. Kwiat, Nature **439**, 04523 (2006).

29. М. Б. Менский, УФН **173**, 1199 (2003) [M. B. Menskii, Phys.-Uspekhi **46**, 1163 (2003)].
30. H. Bethe and E. Salpeter, Phys. Rev. **84**, 1232 (1951).
31. V. De Alfaro and T. Regge, *Potential Scattering*, North-Holland Publ., Amsterdam (1965).
32. V. G. Bagrov, S. P. Gavrilov, D. M. Gitman, and D. P. Meira Filho, J. Phys. A: Math. Theor. **44**, 055301 (2011).
33. D. Bugg, Progr. Nucl. Phys. **7**, 1 (1959).
34. Г. В. Дедков, Письма в ЖЭТФ **117**, 950 (2023).