

# Влияние закона сохранения энергии, размерности пространства и симметрии задачи на сингулярности поля вектора Пойнтинга

М. И. Трибельский<sup>1)</sup>

Физический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Центр фотоники и двумерных материалов, МФТИ, 141700 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 31 мая 2023 г.

После переработки 17 августа 2023 г.

Принята к публикации 18 августа 2023 г.

Дается миниобзор последних достижений автора в классификации особых точек поля вектора Пойнтинга в полях сложной конфигурации. Выявлена глубокая связь между топологической структурой силовых линий этого поля и законом сохранения энергии, симметрией задачи и размерностью пространства.

DOI: 10.31857/S1234567823180064, EDN: wovfww

**Введение.** Хорошо известно, что качественно топологическая структура любого поля в значительной степени определяется типом и положением его особых точек. Разумеется, это справедливо и для электромагнитного поля. По этой причине, а также в связи с колоссальным развитием экспериментальных возможностей по созданию и изучению световых пучков сложной конфигурации, исследование особых точек электромагнитного поля привлекает пристальное внимание специалистов, см., например, [1–6] и цитируемую там литературу.

Сказанное в полной мере относится к полю вектора Пойнтинга  $\mathbf{S}$ . В частности, сингулярности этого поля оказываются важны при резонансном рассеянии света субволновыми объектами, например, при рассеянии света наночастицами, так как именно топологическая структура поля вектора Пойнтинга определяет сложную циркуляцию энергии в окрестности рассеивающей свет частицы и в ней самой, а дивергенция этого поля — диссипацию электромагнитной энергии в такой частице.

Помимо чисто академического интереса эти вопросы имеют большое практическое значение для различных нанотехнологий, так как управляемое на наномасштабах энерговыделение представляет уникальную возможность осуществить локальное воздействие на различные материалы. Поле вектора Пойнтинга также дает вклад в пондеромоторные силы [4], который важно знать для манипуляции нанообъектами в этой области. Подробное обсуждение этого вопроса содержится в обзоре [7].

При этом, экспериментальное измерение поля вектора Пойнтинга представляет собой весьма трудную задачу [8], а в практически важном случае поля внутри твердотельного рассеивающего объекта оказывается невозможным. В такой ситуации теоретическое описание этого поля является единственным инструментом его исследования.

Начиная с пионерской работы Бохрена [9], такие исследования проводилось многими авторами [10–19]. В частности, детальная классификация особых точек поля вектора Пойнтинга была сделана в работе [2].

Однако, абсолютное большинство исследований относится к изучению особенностей в полях сложных конфигурации. Здесь было получено много интересных, важных и часто неожиданных результатов. Среди них — сингулярности непараксиальных бесселевых пучков [4]; сингулярности в суперосциллирующих полях [20]; сингулярности, обусловленные интерференцией с тороидальными модами [21]; возникновение обратного (по отношению к падающей волне) потока энергии вблизи оси остро сфокусированного вихревого пучка [22, 23] и др. Как правило, теоретическое описание этих особенностей связано с громоздкими вычислениями, привлечением таких понятий, как топологический заряд [24, 25], геометрическая фаза Панчаратнама–Берри [26, 27] и т. п.

Между тем, описание в рамках традиционной классификации Пуанкаре (седло, узел, и т. п.) простейшей ситуации спонтанного образования сингулярностей при рассеянии плоской линейно поляризованной электромагнитной волны, не требующее громоздких вычислений и введения новых понятий, да-

<sup>1)</sup>e-mail: mitribel@gmail.com

леко не закончено. Конкретно, тому факту, что поле вектора Пойнтинга удовлетворяет закону сохранения энергии, который вкупе с размерностью пространства и симметрией задачи накладывает значительные ограничения как на тип особых точек, так и на бифуркационную картину их рождения (аннигиляции), до недавнего времени не уделялось достаточного внимания. Частично этот пробел был восполнен недавними результатами автора [28–30], краткое обсуждение которых приводится ниже. Формат мини-обзора не позволяет здесь представить сколь-нибудь полное обсуждение других аспектов проблемы. Читатель, интересующийся такими аспектами, адресуется к цитируемым выше работам, а также к имеющимся там литературным ссылкам.

Отметим также, что, с точки зрения теоретического описания проблемы, решение уравнений Максвелла определяет поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Что касается поля  $\mathbf{S}$ , то оно *вычисляется* на основании найденных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , и в этом смысле является вторичным. Как будет видно из дальнейшего, это обстоятельство играет существенную роль в понимании физического смысла сингулярностей такого поля.

Работа имеет следующую структуру: в разделе I дается формулировка задачи; в разделе II рассматриваются сингулярности в недиссипативной среде, возникающие при рассеянии на сфере (II A) и цилиндре (II B); в разделе III обсуждается влияние диссипативных эффектов; раздел IV посвящен эффектам, связанным с контролируемым нарушением симметрии; в разделе V приводятся заключение и благодарности, а также формулируются некоторые нерешенные задачи.

**I. Постановка задачи.** Хорошо известно, что поведение поля в окрестности особой точки определяется локальными топологическими характеристиками данной точки и слабо зависит от глобального поведения этого поля вдали от нее. По этой причине обсуждаемая ниже феноменологическая теория является универсальной. Она нечувствительна к изменению геометрии рассеиваемого пучка, а также формы и оптических характеристик рассеивающего объекта. Однако конкретные примеры, иллюстрирующие эту теорию, основаны на расчетах, использующих точные решения соответствующих задач рассеяния плоской линейно поляризованной электромагнитной волны сферой радиуса  $R$  или бесконечным круговым цилиндром с радиусом сечения  $R$ . Эти решения хорошо известны, см., например, [31]. Такой подход позволил сравнительно легко как находить сами особые точки, так и контролировать точность расчетов, которая выбиралась достаточной для уве-

ренного разрешения всех необходимых деталей обсуждаемых явлений.

Магнитная проницаемость рассеивающего тела  $\mu$  считается равной единице (что соответствует оптическим частотам); а его диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' = \text{const}$ , где  $\varepsilon'' > 0$ . При необходимости полученные результаты легко обобщаются на случай отличного от единицы  $\mu$  и/или  $\varepsilon'' < 0$  (активное рассеивающее тело с инверсной населенностью).

При теоретическом описании задач рассеяния поле вне рассеивающего объекта обычно представляется в виде суммы поля падающей волны и поля излучения, рассеянного объектом. Во избежание недоразумений подчеркнем, что всюду в настоящей работе под полями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  понимаются полные поля, равные указанной сумме.

Вектор Пойнтинга предполагается действительным и определяется обычным образом [32]:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{16\pi} ([\mathbf{E}^* \mathbf{H}] + [\mathbf{E} \mathbf{H}^*]), \quad (1)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме, а звездочка означает комплексное сопряжение. Заметим, однако, что в некоторых случаях целесообразно вводить комплексный вектор Пойнтинга  $\hat{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi} [\mathbf{E}^* \mathbf{H}]$ , мнимая часть которого имеет смысл осциллирующего потока запасенной энергии [33]. Эта величина играет важную роль в некоторых задачах взаимодействия света с веществом [34–40]. Как правило, обсуждаемые ниже результаты, полученные для действительного  $\mathbf{S}$ , легко обобщаются на случай комплексного  $\hat{\mathbf{S}}$ .

Структура поля вектора Пойнтинга описывается соответствующими силовыми линиями, которые по аналогии с гидродинамикой мы также будем называть линиями тока. Касательные к этим линиям в каждой их точке соответствуют направлению вектора  $\mathbf{S}$  в этой точке. Уравнение линий тока удобно задавать в параметрическом виде  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ . Здесь  $t$  – безразмерный параметр, вообще говоря, никак не связанный с истинным временем. При таком представлении “скорость”  $d\mathbf{r}/dt$  будет направлена по касательной к линии тока, т.е. пропорциональна вектору  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ . За счет надлежащего масштабирования  $t$  соответствующий коэффициент пропорциональности всегда можно обратить в единицу. Тогда уравнение, определяющее линии тока, приобретает вид:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{S}(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Далее, введем безразмерные переменные, нормируя координату  $\mathbf{r}$  на  $R$ , а поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{S}$  на соответствующие значения в падающей волне. Поскольку

езде ниже будут использоваться только безразмерные переменные, мы сохраним за ними те же обозначения, так как это не может привести к недоразумениям.

Сингулярности вектора  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ , как и любого векторного поля, соответствуют точкам пересечения его силовых линий. Поскольку, как уже отмечалась, касательные к силовым линиям определяют направление вектора  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ , то их пересечение в некоторой точке  $\mathbf{r}_s$  означает, что вектор  $\mathbf{S}(\mathbf{r}_s)$  не определяется однозначно. Единственный способ совместить этот факт со следующей из фундаментальных физических принципов однозначностью поля  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$  – потребовать, чтобы  $\mathbf{S}(\mathbf{r}_s) = 0$ . Очевидно, что для этого существуют три возможности: (а)  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_s) = 0$ , (б)  $\mathbf{H}(\mathbf{r}_s) = 0$  и (с)  $\mathbf{S}(\mathbf{r}_s) = 0$ , когда при этом ни (а) ни (б) не выполняются (этот случай соответствует образованию стоячей волны). В соответствии с терминологией, введенной в работе [2], мы будем называть такие особые точки сингулярностями *E-типа* (E-induced), *H-типа* (H-induced) и *поляризаационного типа* (polarization-induced), соответственно. При этом оба первых типа удобно также называть *полевыми сингулярностями* (field-induced). Чтобы отличать эту классификацию от стандартной классификации Пуанкаре (узел, фокус, и т.п.), мы будем называть ее электромагнитной.

Важно подчеркнуть, что если в полевых сингулярностях, по понятным причинам, обнуляется все векторное произведение  $[\mathbf{E}^* \mathbf{H}]$ , то поляризаационные сингулярности требуют обнуление только его действительной части. Вследствие этого сингулярные точки полевого типа для действительной и мнимой частей комплексного вектора Пойнтинга  $\hat{\mathbf{S}}$  совпадают, а сингулярности поляризаационного типа, вообще говоря, нет.

**II. Недиссипативный предел.** Заметим, что стандартная постановка задачи о рассеянии света материальным объектом, при которой падающая волна приходит из бесконечности, а рассеянная – уходит на бесконечность [31], возможна только если это тело окружено недиссипативной средой, частным случаем которой является вакуум. В противном случае падающая волна затухает, не доходя до рассеивающего объекта. По этой причине, все сингулярности, находящиеся вне рассеивающего тела, должны рассматриваться в недиссипативной среде, так что случай отсутствия диссипации в окрестности сингулярности является важным для описания рассеяния любой, даже сильно поглощающей частицей. Поскольку задача рассеяния для частицы в среде с произвольным значением  $\epsilon > 0$  сводится к случаю рассеяния в вакууме тривиальным масштабным преобразованием

ем [31], не нарушая общности рассмотрения можно считать, что диэлектрическая проницаемость окружающей среды равна единице, что и будет предполагаться в дальнейшем.

*Сфера.* Анализ сингулярностей начнем с обсуждения случая рассеяния света конечным объектом, имеющим плоскость симметрии. При этом будем предполагать, что плоскость поляризации совпадает с плоскостью симметрии. Простейшим примером является рассеяние сферой. Подчеркнем, однако, что, хотя приводимые ниже конкретные результаты связаны именно с таким примером, это обусловлено исключительно удобством вычислений. Развитая же феноменологическая теория справедлива для тела произвольной формы, обладающего плоскостью симметрии.

В соответствии с традиционной трактовкой задачи [31] выберем систему координат, в которой ось  $z$  направлена вдоль волнового вектора падающей волны  $\mathbf{k}$ , а ось  $x$  совпадает с направлением осцилляций вектора  $\mathbf{E}$  этой волны. Тогда вектор  $\mathbf{H}$  падающего электромагнитного излучения оказывается параллельным оси  $y$ .

В общем случае линии тока вектора Пойнтинга в этой задаче существенно трехмерные. Однако из симметрии следует, что плоскость  $xz$  является инвариантной – линии тока, принадлежащие этой плоскости, двумерны. Если рассеивающее тело, помимо зеркальной симметрии по отношению к плоскости  $xz$ , симметрично и по отношению к плоскости  $yz$  (как это имеет место для сферы), то и эта плоскость будет инвариантна. Тем не менее, хотя какие-либо ограничения на положения сингулярностей поля  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$  неизвестны (и есть основания ожидать, что такие ограничения не существуют), в настоящее время при рассеянии на сфере обнаружены только сингулярности, принадлежащие инвариантной плоскости, параллельной плоскости поляризации [10–14, 16, 28, 29], к обсуждению которых мы и переходим.

Выбирая начало координат в сингулярной точке, учитывая, что в силу инвариантности плоскости  $xz$  компонента  $S_y(x, 0, z) \equiv 0$ , и разлагая компоненты вектора  $\mathbf{S}$  в ряд по малым отклонениям от сингулярности, получаем, что в этом случае уравнение (2) приобретает вид:

$$\frac{dx}{dt} = S_x(x, y, z) \approx s_x^{(x)} x + s_x^{(y)} y + s_x^{(z)} z, \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = S_y(x, y, z) \approx s_y^{(y)} y, \quad (4)$$

$$\frac{dz}{dt} = S_z(x, y, z) \approx s_z^{(x)} x + s_z^{(y)} y + s_z^{(z)} z, \quad (5)$$

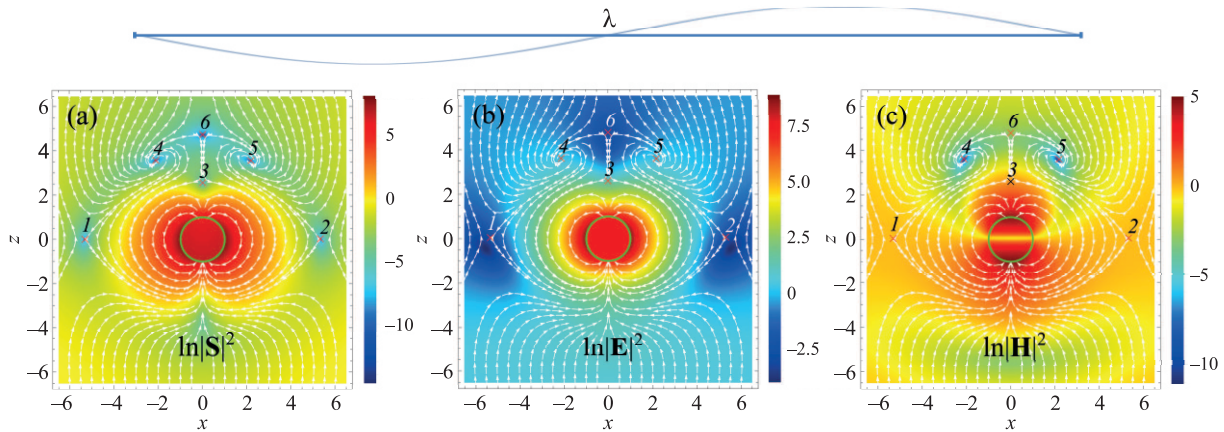


Рис. 1. (Цветной онлайн) Точное решение уравнений Максвелла. Рассеяние сферой плоской линейно поляризованной волны в вакууме. Линии тока поля вектора Пойнтинга, а также значения логарифма квадрата модуля вектора Пойнтинга (а), электрического (б) и магнитного (с) полей в инвариантной плоскости  $xz$  (показаны цветом). Плоскость поляризации совпадает с плоскостью рисунка. Волновой вектор  $\mathbf{k}$  падающего излучения параллелен оси  $z$ . Параметр размера  $q = 0.3$ ;  $\varepsilon = -2.17$ . Поверхность сферы изображена сплошной зеленой линией. Из симметрии задачи следует, что структуры всех полей симметричны относительно плоскости  $x = 0$ , перпендикулярной плоскости рисунка. Крестики (х) отмечают положение особых точек поля вектора Пойнтинга. Точки 4 и 5 – фокусы, остальные – седла;  $|\mathbf{S}|^2 = 0$  во всех особых точках. Характерный масштаб структуры полей значительно меньше длины волны излучения, размер которой изображен в верхней части рисунка [28]. См. подробности в тексте

где  $s_{x_n}^{(x_m)} \equiv \left( \frac{\partial S_{x_n}}{\partial x_m} \right)_s$ . Здесь индекс  $s$  означает, что производная берется в сингулярной точке, и  $x_m$  обозначает любую из трех компонент вектора  $\mathbf{r}$ .

Стандартным образом, представляя решение системы уравнений (3)–(5) в виде  $x_n = x_{n0} \exp(\kappa t)$ ,  $x_{n0} = \text{const}_n$  и приравнявая детерминант полученной системы алгебраических уравнений нулю, находим корни характеристического уравнения

$$\kappa_{1,2} = \gamma \pm \alpha, \quad \kappa_3 = s_y^{(y)}, \quad (6)$$

$$\gamma = \frac{s_x^{(x)} + s_z^{(z)}}{2}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{(s_x^{(x)} - s_z^{(z)})^2 + 4s_x^{(z)} s_z^{(x)}}}{2}. \quad (7)$$

Отметим, что  $\kappa_3$  всегда является действительной величиной, что в окрестности рассматриваемой сингулярности соответствует экспоненциальному отталкиванию линий тока от инвариантной плоскости при  $\kappa_3 > 0$  и их экспоненциальному приближению к ней при  $\kappa_3 < 0$ .

Воспользуемся теперь законом сохранения энергии, согласно которому  $-\text{div} \mathbf{S} = Q$ , где  $Q$  – плотность диссипируемой электромагнитной энергии. Поскольку сейчас мы рассматриваем недиссипативный случай, то  $Q = 0$ . Что же касается  $\text{div} \mathbf{S}$ , то в рассматриваемом приближении  $\text{div} \mathbf{S} \approx s_x^{(x)} + s_y^{(y)} + s_z^{(z)}$ . В этом случае из выражений (6)–(7) следует, что  $\kappa_3$  и  $\gamma$  имеют противоположные знаки. Иными словами, если в инвариантной плоскости поток энергии

направлен в сторону сингулярности, то в перпендикулярном направлении линии тока уходят от сингулярной точки, и наоборот. Это свойство согласуется с интегральной формой закона сохранения энергии, согласно которой в стационарной задаче в недиссипативной среде поток энергии через любую замкнутую поверхность (в том числе и через поверхность, окружающую сингулярность) должен обнуляться.

Обсудим теперь типы сингулярностей, принадлежащих инвариантной плоскости. В качестве примера, на рис. 1 приведена структура поля, возникающая в этом случае при  $\varepsilon = -2.17$  и параметре размера  $q \equiv kR = 0.3$ , где  $k = \omega/c$  – волновое число падающей волны в вакууме, а  $c$  – скорость света.

На рисунке 1а идентифицируются шесть особых точек. В инвариантной плоскости  $xz$  две из них (под номерами 4 и 5) являются устойчивыми фокусами, а остальные – седлами. Подчеркнем, что из сказанного в предыдущем параграфе следует, что в трехмерном пространстве (3D) фокусы 4, 5 неустойчивы по перпендикулярному к инвариантной плоскости направлению, т. е. являются сложными особыми точками седло-фокус.

Вычисления показывают, что во всех особых точках вектор Пойнтинга обнуляется, как и должно быть. Для того чтобы понять, к какому электромагнитному типу (полевому или поляризационному) принадлежат эти сингулярности, мы наложили ли-

нии тока рис. 1а на профиль полей  $|\mathbf{E}|^2$  и  $|\mathbf{H}|^2$ , см. рис. 1б, с. Видно, что фокусы являются сингулярностями Н-типа, а седла – поляризационными сингулярностями.

Для понимания этого результата отметим, что поляризационные сингулярности соответствуют локальному образованию стоячих волн, когда через сингулярность проходят пары волн равной амплитуды, распространяющиеся в противоположных направлениях. Это предполагает наличие у сингулярности выделенных направлений. Такие направления есть у седла – это “усы” сепаратрисы. В отличие от седла, фокус не имеет выделенных направлений, в силу чего образование стоячих волн в окрестности фокуса затруднено<sup>2)</sup>. Отметим, что такое различие между фокусами и седлами топологически устойчиво, так как эти сингулярности топологически не эквивалентны и не могут переходить друг в друга при преобразовании координатной системы [41].

Особо подчеркнем, что обсуждаемые области образования стоячих волн имеют существенно субволновые размеры, что хорошо видно на рис. 1, где для наглядности длина волны падающего излучения изображена в том же масштабе, что и структуры полей.

Важным свойством обсуждаемых результатов является то, что полевые сингулярности (фокусы) оказались связаны с обнулением поля перпендикулярного инвариантной плоскости. В данном случае это поле  $\mathbf{H}$ . Такая структура полевых сингулярностей является общим свойством особых точек, принадлежащим инвариантным плоскостям. При этом, если плоскость поляризации перпендикулярна инвариантной, то полевые сингулярности оказываются Е-типа. Чтобы убедиться в справедливости сказанного, рассмотрим рассеяние света цилиндром.

*В. Цилиндр.* Также, как и в предыдущем разделе, развитая феноменологическая теория справедлива для бесконечного цилиндра с произвольной формой поперечного сечения. Приведенные ниже примеры кругового цилиндра взяты только для упрощения вычислений.

Рассмотрение начнем с простейшего случая нормального падения и двух независимых поляризаций падающей волны – ТЕ и ТМ, см. рис. 2, где ориентация координатных осей и вектора  $\mathbf{k}$  соответствует общепринятой, см., например, [31]. В этом случае зависимость полей от координаты  $z$  исчезает, задача становится двумерной (2D), разложения для

компонент вектора Пойнтинга в окрестности сингулярности приобретают вид  $S_x(x, y) \approx s_x^{(x)}x + s_x^{(y)}y$ ;  $S_y(x, y) \approx s_y^{(x)}x + s_y^{(y)}y$ , а условие  $\text{div } \mathbf{S} = 0$  сводится к равенству  $s_x^{(x)} + s_y^{(y)} = 0$ .

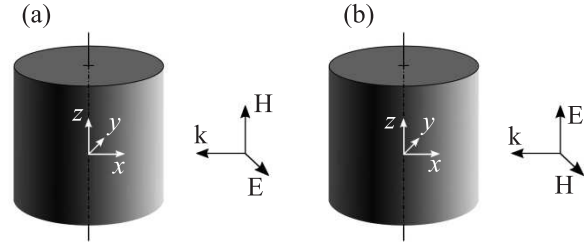


Рис. 2. Взаимная ориентация цилиндра, координатных осей и векторов  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  падающей волны. (а) – ТЕ поляризация; (б) – ТМ поляризация [28, 31]

В результате для корней характеристического уравнения вместо (6), (7) получаем следующее выражение:

$$\kappa_{1,2} = \pm \sqrt{(s_x^{(x)})^2 + s_x^{(y)}s_y^{(x)}}. \quad (8)$$

Таким образом, в 2D случае закон сохранения энергии приводит к жесткому ограничению на возможные типы особых точек, а именно: при  $(s_x^{(x)})^2 + s_x^{(y)}s_y^{(x)} > 0$  это седла, а при  $(s_x^{(x)})^2 + s_x^{(y)}s_y^{(x)} < 0$  – центры. Существование других особых точек запрещено. Случай  $(s_x^{(x)})^2 + s_x^{(y)}s_y^{(x)} = 0$  – вырожденный. Для его анализа требуется учесть более высокие члены разложения  $S_{x,y}(x, y)$ .

В качестве примера, на рис. 3, 4 представлены структуры полей и линии тока вектора Пойнтинга при рассеянии ТЕ и ТМ поляризованного излучения цилиндром. Эти примеры полностью согласуются с приведенными выше общими соображениями.

**III. Диссипативные эффекты.** Из сказанного ранее следует, что поскольку окружающая рассеивающую частицу среда должна быть недиссипативной, то диссипативными свойствами может обладать только сама частица. Поэтому обсуждаемые в этом разделе сингулярности должны находиться внутри такой частицы.

Как диссипация влияет на свойства обсуждаемых сингулярностей? Качественное соображение состоит в том, что поскольку теперь движение вдоль линии тока сопровождается диссипативными потерями, то линии тока не могут образовывать семейства замкнутых силовых линий. Это делает невозможными су-

<sup>2)</sup>Важное дополнение к этому рассуждению сделано в Заключении.

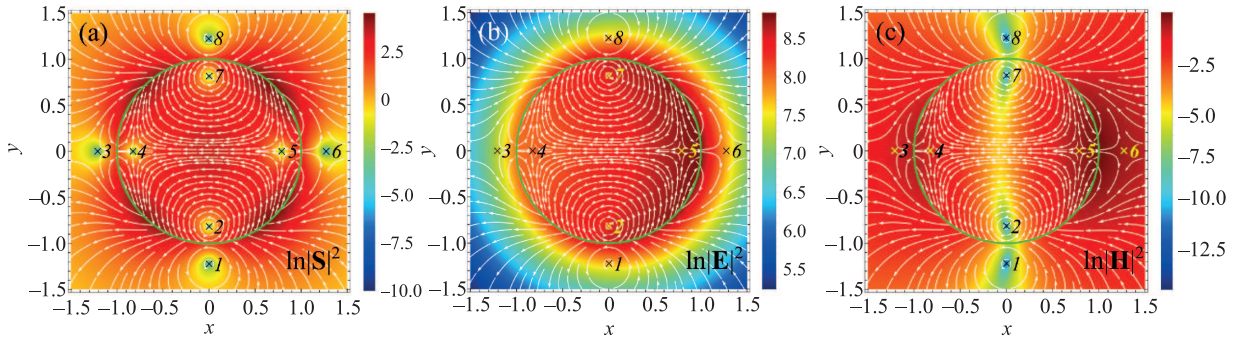


Рис. 3. (Цветной онлайн) Рассеяние плоской ТЕ-поляризованной электромагнитной волны круговым цилиндром. Линии тока вектора Пойнтинга, а также поля  $|S|^2$ ,  $|E|^2$ ,  $|H|^2$  – в логарифмическом масштабе;  $q = 0.1$ ;  $\epsilon = -1$ . Падающая волна распространяется в отрицательном направлении оси  $x$ , см. рис. 2. Структуры полей зеркально симметричны относительно плоскости  $y = 0$ , перпендикулярной плоскости рисунка. Крестики (x) обозначают сингулярности поля  $S$ . Поверхность цилиндра обозначена зеленой окружностью. Центры (точки 1, 2, 7, 8) соответствуют сингулярностям Н-типа. Седла (точки 3–6) – поляризационным сингулярностям [28]

существования особых точек типа центр – они становятся фокусами<sup>3)</sup>.

При количественном описании рассматриваемой задачи единственное отличие диссипативной среды от недиссипативной сводится к записи закона сохранения энергии, который в диссипативной среде имеет вид  $-\text{div } \mathbf{S} = Q > 0$ . Что касается  $Q$ , то в выбранных нами безразмерных переменных оно задается следующим выражением:  $Q = \epsilon'' q |\mathbf{E}|^2$  (напомним, что  $q$  здесь – это параметр размера, равный  $kR$ ).

Отметим, что диссипация связана только с электрическим полем, поскольку магнитная проницаемость на оптических частотах равна единице. Это вносит асимметрию между полями  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . В частности, следует ожидать, что влияние диссипации на сингулярности Н-типа будет существенно большее, чем на сингулярности Е-типа.

Действительно, в равенстве  $-\text{div } \mathbf{S}(\mathbf{r}) = Q(\mathbf{r})$  правая и левая части должны быть одного порядка малости. В рассматриваемом приближении  $\text{div } \mathbf{S} \approx \sum_n s_{x_n}^{(x_n)} = \text{const}$ . Соответственно, в правой части равенства следует положить  $Q(\mathbf{r}) \approx Q(\mathbf{r}_s) = \text{const}$ , где  $\mathbf{r}_s$  – координата особой точки. Всюду ниже под  $Q$  будет пониматься именно  $Q(\mathbf{r}_s)$ . В сингулярностях Н-типа и поляризационных сингулярностях электрическое поле не обращается в ноль. Соответственно,

<sup>3)</sup> Это совершенно верно в 2D. В 3D, в принципе, возможна ситуация, когда поле  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$  устроено таким образом, что диссипативные потери для траекторий в инвариантной плоскости в точности компенсируются притоком энергии вдоль трансверсальных к этой плоскости направлений. В такой исключительной ситуации существование замкнутых траекторий становится возможным.

$Q \neq 0$ . Дальнейшее рассмотрение для сферы и цилиндра удобно проводить раздельно.

**А. Сфера.** Для сферы корни характеристического уравнения по-прежнему даются выражениями (6), (7), однако вместо условия  $\sum_n^3 s_{x_n}^{(x_n)} = 0$  теперь должно использоваться условие  $\sum_n^3 s_{x_n}^{(x_n)} = -Q$ . Поскольку одно дополнительное условие накладывается на три независимых коэффициента  $s_{x_n}^{(x_n)}$ , в задаче остается достаточно степеней свободы, чтобы это не приводило к ее качественным изменениям. В частности,  $\gamma$  в выражениях (6), (7) может иметь как положительный, так и отрицательный знак, т.е. линии тока могут как приближаться к сингулярности, так и удаляться от нее. При этом убегание траекторий от сингулярности не противоречит наличию диссипативных потерь, так как последние компенсируются притоком энергии вдоль направлений трансверсальных инвариантной плоскости. Подчеркнем также, что обнуление  $\gamma$  при  $s_x^{(x)} + s_z^{(z)} = 0$  еще не означает замкнутости линий тока, так как на них влияют члены более высокого порядка, не учтенные в линейном приближении; см. ниже обсуждение этого вопроса при рассеянии на цилиндре.

Заметим также, что интегральная форма закона сохранения энергии позволяет вывести простую формулу, связывающую различные компоненты вектора Пойнтинга в окрестности сингулярности. С этой целью построим окружающую сингулярность поверхность, имеющую форму кругового цилиндра с радиусом основания  $r$  и осью, проходящей через данную особую точку перпендикулярно инвариантной плоскости. Введем локальную цилиндрическую систему координат, центр которой совпадает с рассматриваемой сингулярностью, а ось – с осью построенного

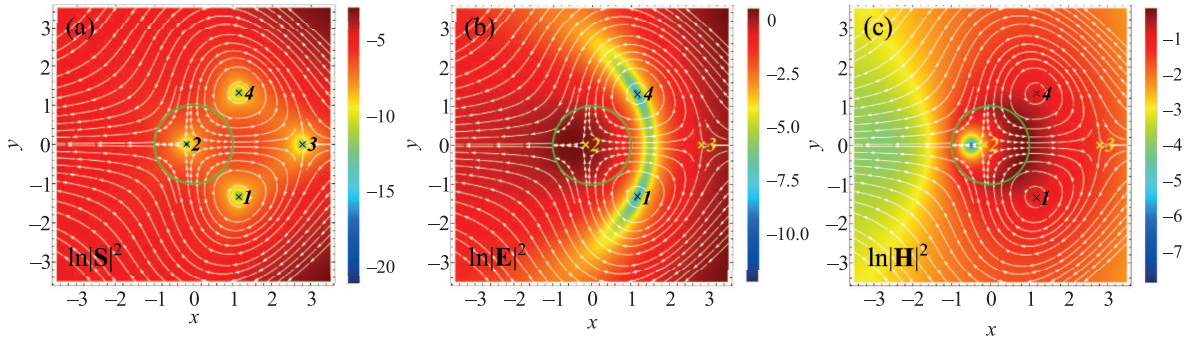


Рис. 4. (Цветной онлайн) То же, что на рис. 3, при ТМ поляризации падающего излучения и  $q = 0.3$ ,  $\epsilon = 16$ . В этом случае центры (точки 1, 4) соответствуют сингулярностям Е-типа [28]

цилиндра. Тогда, учитывая, что поток вектора Пойнтинга через поверхность цилиндра равен мощности, диссипированной в его объеме, легко получаем

$$\langle S_r \rangle \approx -\frac{rs_y^{(y)} + Q}{2}, \quad (9)$$

где  $\langle S_r \rangle$  – усредненная по угловой переменной радиальная компонента вектора Пойнтинга в локальной системе координат. Выражение (9) справедливо для любого типа особой точки, лежащей в инвариантной плоскости.

**В. Цилиндр.** В отличие от сферы, в случае рассеяния бесконечным круговым цилиндром переход от 3D к 2D приводит к существенно более радикальному влиянию эффектов диссипации на структуру и тип возможных сингулярностей. Рассмотрение начнем со случая чистой ТЕ или ТМ поляризации падающего излучения.

Прежде всего отметим, что выражения для корневых характеристического уравнения теперь приобретают вид, аналогичный выражениям  $\kappa_{1,2}$  для сферы, см. (6). При этом,  $\gamma = -Q/2$  [29]. Что же касается  $\alpha$ , то эта величина может быть как чисто действительной, так и чисто мнимой. Таким образом, для  $Q > 0$  и ТЕ-поляризованной падающей волны, когда все особые точки являются точками Н-типа, возможными сингулярностями являются только седла, а также устойчивые фокусы и узлы. Эти количественные результаты полностью согласуются с приведенными выше качественными аргументами.

При ТМ поляризации падающего излучения электрическое поле в сингулярной точке обнуляется и  $Q = 0$ . Может показаться, что в этом случае ситуация оказывается эквивалентна недиссипативному пределу, но это не так. Дело в том, что обнуление диссипации происходит в единственной точке, а именно – в самой сингулярности. В ее

окрестности величина электрического поля мала, но не равна нулю и описывается членами разложения более высокого порядка, не учтенными в развитой линейной теории. Учет этих членов превращает замкнутые на себя линии тока (особенность типа центр) в спиральные, сходящиеся к особой точке траектории, точно также как это происходит для ТЕ поляризации. Разница состоит в том, что теперь в силу экстремально малой диссипации при том же значении  $\epsilon$  шаг этих спиралей оказывается значительно меньше, чем для ТЕ поляризации.

В качестве примера соответствующие поля и линии тока приведены на рис. 5, 6, где представлены результаты расчетов для цилиндра из германия на длинах волн  $\lambda_1 = 1590$  нм и  $\lambda_2 = 1494$  нм с учетом фактической величины его диэлектрической проницаемости при этих значениях  $\lambda$  [42]. Такой выбор продиктован тем, что  $\epsilon(\lambda_1) \approx 17.775 + i0.024$ , в то время как  $\epsilon(\lambda_2) \approx 17.983 + i0.483$ , т.е. при близких значениях  $\text{Re} \epsilon(\lambda_{1,2})$  значения  $\text{Im} \epsilon(\lambda_{1,2})$  отличаются более чем в двадцать раз. Это позволяет выяснить влияние диссипации на поведение полей в окрестностях особых точек при практически фиксированных прочих параметрах задачи.

Величина параметра размера  $q$  при обоих значениях  $\lambda$  была одинаковая и равнялась 1.62, что при данных значениях  $\epsilon(\lambda_{1,2})$  соответствует окрестности дипольного резонанса как для ТЕ, так и для ТМ поляризации. Это обеспечивало качественное совпадение структуры поля  $\mathbf{S}(\mathbf{r})$  для обеих поляризации. Отметим также, что  $R/\lambda_{1,2} \approx 0.26$ , т.е. для падающего излучения такой цилиндр является существенно субволновой частицей.

Хотя отмеченные на рис. 5а, d и рис. 6а, с сингулярности кажутся центрами, зум показывает, что на самом деле они – устойчивые фокусы. При этом шаг спиральных линий тока в случае ТЕ поляризации

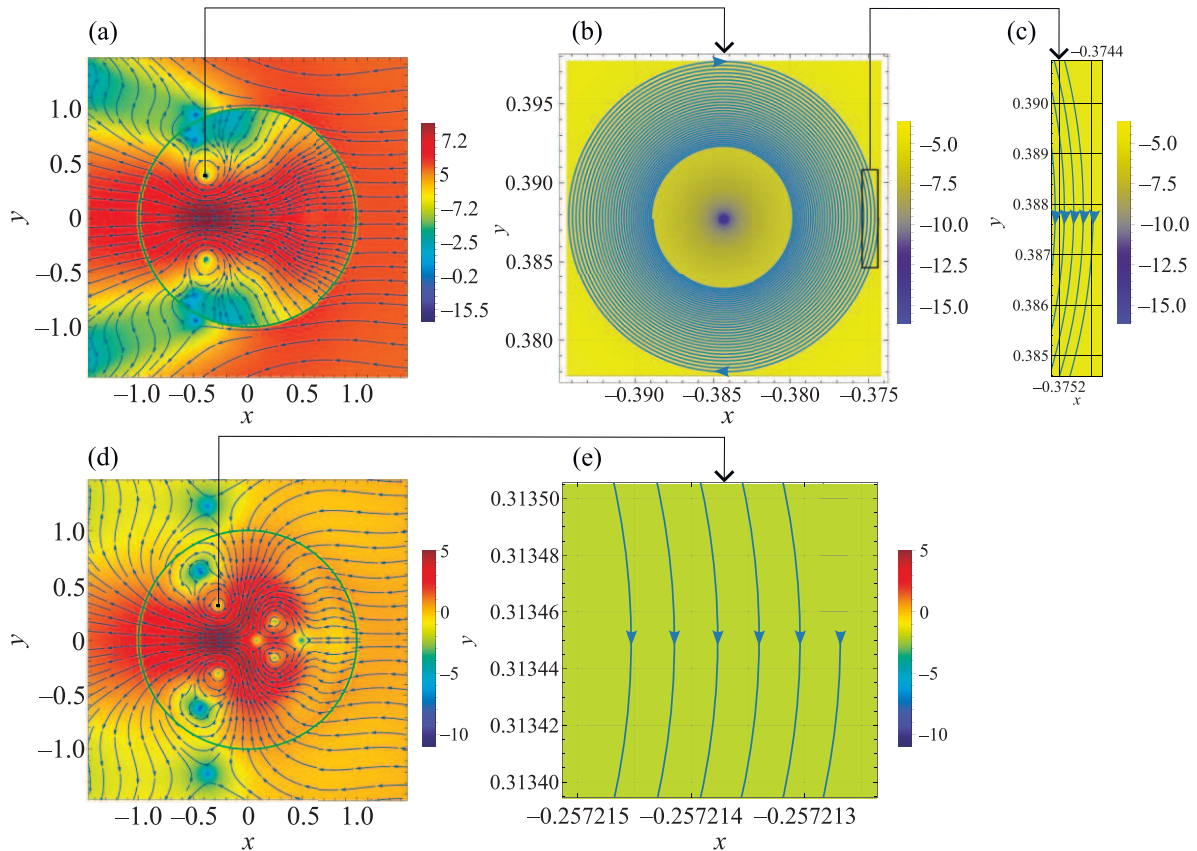


Рис. 5. (Цветной онлайн) Рассеяние света германиевым цилиндром в вакууме. Падающая плоская линейно поляризованная волна распространяется в отрицательном направлении оси  $x$ . Поле вектора Пойнтинга и его линии тока. Поверхность цилиндра изображена зеленой окружностью;  $\lambda = \lambda_1 = 1590$  nm;  $\varepsilon(\lambda_1) \approx 17.775 + i0.024$ ;  $q = 1.62$ . Структура поля симметрична относительно плоскости  $y = 0$ , перпендикулярной плоскости рисунка. Панели (a)–(c) – TE поляризация падающего излучения; (d), (e) – TM поляризация. Панель (b) – зум окрестности сингулярности, помеченной на (a) малым черным прямоугольником. То же относится к панелям (d) и (e). Панель (c) – зум области, отмеченной на (b) прямоугольником. См. детали в тексте. Обратите внимание на существенно разный масштаб панелей (c) и (e) [29]

оказывается существенно больше, чем в случае TM. В обоих случаях шаг растет с увеличением значения мнимой части диэлектрической проницаемости, ср. рис. 5 и 6.

**IV. Эффекты нарушения симметрии.** До сих пор мы рассматривали высокосимметричные решения. Однако в реальном эксперименте симметрия всегда нарушается. В этой связи важное значение приобретает вопрос о топологической устойчивости полученных результатов при нарушении симметрии, т.е. о том, насколько обсуждаемые выше результаты универсальны, и как будут меняться свойства сингулярностей при нарушении симметрии. При этом следует различать слабое нарушение симметрии за счет неидеальности формы лазерного пучка и/или рассеивающей частицы, флуктуаций диэлектрической проницаемости и т. п., и сильные нарушения – на-

пример, при рассеивании света частицей произвольной формы.

Что касается сильного нарушения симметрии, то, хотя автору неизвестно ни одного достоверного примера сингулярностей поля вектора Пойнтинга в таких задачах, нет никаких причин, по которым такие сингулярности не могли бы возникнуть. Если такая сингулярность возникает, то в силу отсутствия симметрии она должна быть существенно трехмерной. В общем случае, якобиан  $J \equiv \left( \frac{\partial(S_x, S_y, S_z)}{\partial(x, y, z)} \right)_s$  имеет девять действительных ненулевых компонент, а соответствующее кубическое характеристическое уравнение – три корня  $\kappa_{1,2,3}$ , из которых либо все три действительные, либо один действительный, а два комплексно сопряженные. При этом одно условие  $Sp\{J\} = -Q$ , накладываемое на коэффициенты якобиана, не приводит к ограничениям на знаки кор-



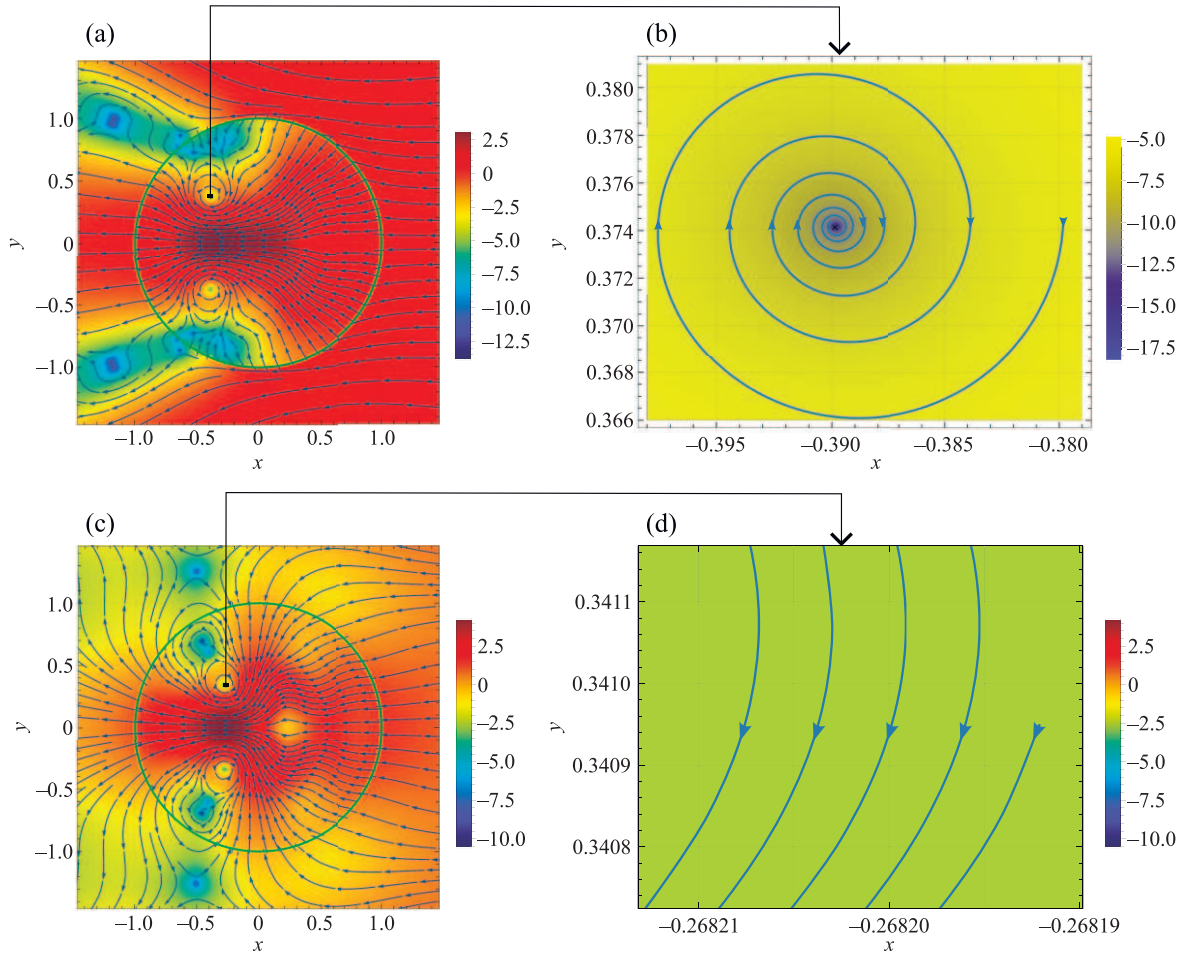


Рис. 6. (Цветной онлайн) Тот же, что и на рис. 5а, b, d, e, но для  $\lambda = \lambda_2 = 1494$  нм;  $\varepsilon(\lambda_2) \approx 17.983 + i0.483$  [29]

ней характеристического уравнения. Ситуация оказывается такой же, как и для обсуждавшегося выше случая сферы. Если три действительных корня имеют одинаковые знаки, то это узел (устойчивый при  $\kappa_{1,2,3} < 0$  и неустойчивый при противоположном знаке). Если же один из корней имеет знак, противоположный двум другим, то это седло-узел. Наконец, если два корня комплексные, то сингулярность – седло-фокус. Это все, что в общем случае можно сказать про сингулярность при сильном нарушении симметрии.

Значительно более интересен случай слабого нарушения симметрии. Этот вопрос был изучен в работе [30], где исследовалось рассеяние цилиндром плоской электромагнитной волны, для которой вектор  $\mathbf{k}$  по-прежнему оставался перпендикулярным оси цилиндра, но последняя составляла с плоскостью поляризации произвольный угол  $\alpha$ , см. рис. 7. Такой случай интересен тем, что является простейшим вариантом задачи с несколькими группами симметрии, часть из которых контролируемо нарушается,

а часть остается в силе. Конкретно, в рассматриваемом примере меняя угол  $\alpha$ , можно контролировать нарушение зеркальной симметрии относительно плоскости  $xy$ , в то время как симметрия по отношению к произвольным трансляциям вдоль оси цилиндра сохраняется.

В силу отмеченной трансляционной симметрии поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{S}$  могут зависеть только от  $x$  и  $y$  и не могут от  $z$ . Поскольку в особой точке обнуляются все три компоненты вектора Пойнтинга, то ее координаты  $x, y$  должны определяться системой из *трех* независимых уравнений:  $S_x(x, y) = S_y(x, y) = S_z(x, y) = 0$ , которым должны удовлетворять *две* переменные. Такая система переопределена и в общем случае решений не имеет.

Отсюда, казалось бы, следует вывод об отсутствии в задаче особых точек. Это не совсем так. Дело в том, что возможны ситуации, когда одна или несколько компонент вектора Пойнтинга тождественно обнуляются вследствие сохранившейся симметрии, что сокращает число уравнений в системе,

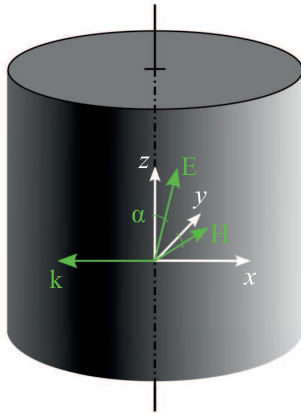


Рис. 7. (Цветной онлайн) Взаимная ориентация цилиндра, координатной системы и векторов  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  падающей электромагнитной волны при произвольной ориентации ее плоскости поляризации относительно оси цилиндра [30]

определяющей положение сингулярности, и делает уравнения совместными.

Детальный анализ симметрии данной задачи с учетом ограничений, накладываемых граничными условиями на поверхности цилиндра, показывает, что компоненты вектора Пойнтинга удовлетворяют следующим соотношениям: [30]

$$\begin{aligned} (S_x(x, y), S_y(x, y), S_z(x, y)) = \\ (S_x(x, -y), -S_y(x, -y), -S_z(x, -y)). \end{aligned} \quad (10)$$

Из этих соотношений, в частности, следует, что  $S_z \equiv 0$  на оси  $x$ . Тогда на этой оси возможно появление особых точек. Отметим, что такие сингулярности могут быть только узлами и седлами, так как топологическая структура центров и фокусов не удовлетворяет симметрии компонентов  $S_x$  и  $S_y$  относительно замены  $y$  на  $-y$ .

Однако, теперь, наряду с истинными сингулярностями появляются сингулярности фиктивные – эти точки являются сингулярными в 2D проекции линий тока на плоскость  $xy$ , но имеют ненулевую  $z$ -компоненту вектора Пойнтинга, поэтому в 3D они представляют собой регулярные точки, множество которых создает вертикальную линию, параллельную оси  $z$ . Пример такой фиктивной сингулярности, а также две истинные особые точки, лежащие на оси  $x$  представлены на рис. 8.

Отметим, что аналогичные “фиктивные” сингулярности хорошо известны и часто встречаются, например, в теории параксиальных пучков – сингулярные точки существуют только в проекции линий тока на плоскость, перпендикулярную оси пучка, в то время как компонента вектора Пойнтинга вдоль оси

пучка остается конечной, т. е. в 3D такие “сингулярности” являются регулярными точками, см., например, публикации [43, 44].

Важное отличие таких “сингулярностей” от обсуждающихся в настоящем разделе состоит в том, что для первых направление, в котором компонента вектора Пойнтинга не обнуляется, навязывается симметрией пучка и соответствует его оси, иными словами, либо совпадает со средним направлением распространения падающего излучения, либо, в некоторых неординарных ситуациях, оказывается ему противоположно. В случаях же, обсуждаемых здесь, это ограничение снимается. В частности, ненулевая компонента вектора Пойнтинга в точке  $\mathbf{r}_3$  на рис. 8a перпендикулярна волновому вектору падающей плоской волны, ориентированному антипараллельно оси  $x$ , что хорошо видно на рис. 8b.

Из рисунка 8b также следует, что изображенная на нем трехмерная линия тока никакой трансляционной симметрией вдоль оси  $z$  не обладает. Легко понять, почему это так. Действительно, в общем случае в регулярной точке все три компонента вектора  $\mathbf{S}$  отличны от нуля и не равны по величине. Тогда из уравнения (2) следует, что зависимость от “времени”  $t$  каждой из трех пространственных координат линии тока, выходящей из данной регулярной точки, индивидуальна. Это приводит к существенно трехмерной форме рассматриваемой линии. С другой стороны, поскольку проекция этой линии на плоскость  $xy$  соответствует сходящейся спирали, см. рис. 8a, такая линия не может быть инвариантна по отношению к трансляциям вдоль оси  $z$ . Из этих рассуждений очевидно, что трехмерность и отсутствие трансляционной симметрии являются общими свойствами линий тока в такой задаче, за исключением прямых линий параллельных оси  $x$ , лежащих в плоскости  $xz$ , которые в силу условий (10) также являются точными решениями уравнения (2).

Вывод об отсутствии трансляционной симметрии у трехмерных линий тока находится в кажущемся противоречии с отмеченной выше инвариантностью поля  $\mathbf{S}$  относительно произвольных трансляций вдоль оси  $z$ . В действительности никакого противоречия нет. Замена  $z \rightarrow z + \text{const}$  переводит линию тока, в другую линию тока, форма которой идентична исходной.

Данные результаты показывают, что поведение линий тока в окрестности обсуждаемых здесь особенностей является топологически устойчивым по отношению к слабому нарушению симметрии. Хотя такое нарушение приводит к регуляризации особых точек за счет возникновения малой трансверсальной к ис-

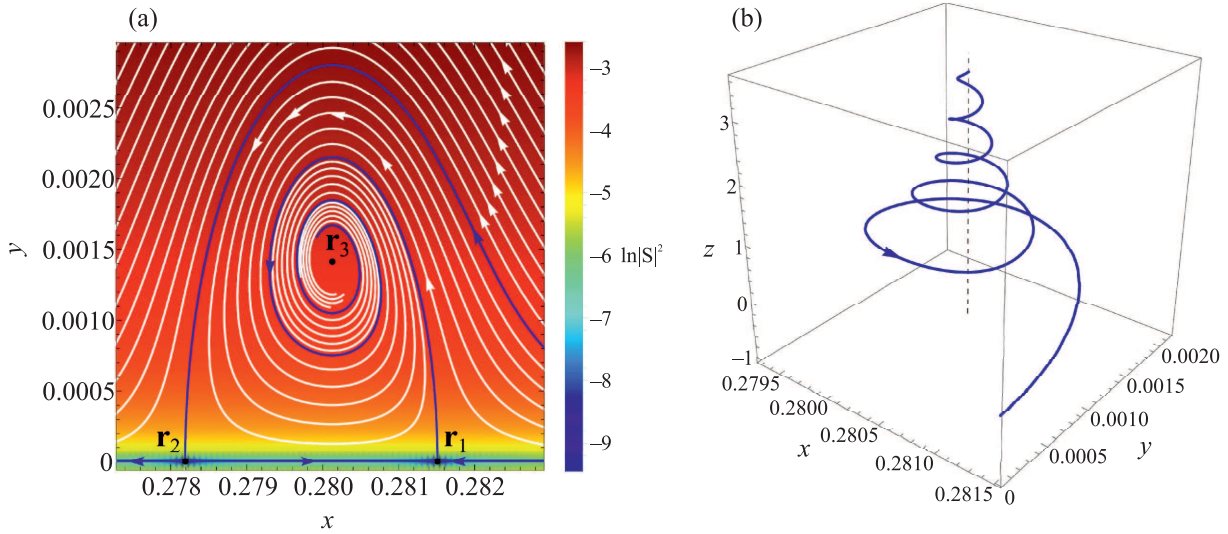


Рис. 8. (Цветной онлайн) Поле вектора Пойнтинга и его линии тока внутри германиевого цилиндра. Волновой вектор падающей плоской линейно поляризованной волны антипараллелен оси  $x$ , см. рис. 7. Ось цилиндра составляет с плоскостью поляризации угол  $\alpha = 45.403^\circ$ ;  $\varepsilon = 17.775 + 0.024i$ ;  $q = 1.62$ ; (a) – 2D проекция линий тока на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра. В проекции имеются три сингулярности, отмеченные черными точками: два седла ( $\mathbf{r}_{1,2}$ ), лежащие на оси  $x$  и устойчивый фокус вне этой оси ( $\mathbf{r}_3$ ). Последняя точка является фиктивной особенностью – в трехмерном пространстве она регулярна. Это хорошо видно на панели (b), где представлено 3D изображение части уса сепаратрисы, выходящей из седла  $\mathbf{r}_1$  в сторону  $\mathbf{r}_3$  – он является асимптотически уходящей в бесконечность спирали, которая навивается на параллельную оси цилиндра прямую линию. Проекция этой линии на плоскость  $xy$  и дает точку  $\mathbf{r}_3$  [30]. См. детали в тексте. Обратите внимание на существенно разный масштаб осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  на панели (b)

ходной инвариантной плоскости компоненты вектора Пойнтинга, изменения структуры линий тока в проекции на исходную инвариантную плоскость не только не меняется качественно, ср. рис. 5d и 8a, но и количественные изменения остаются малы в меру малости нарушения симметрии. Более подробно этот вопрос обсуждается в работе [30].

Конструктивное использование симметрии задачи позволяет также построить феноменологическую теорию, объясняющую последовательность бифуркаций, приводящих к рождению (аннигиляции) как фиктивных, так и истинных сингулярностей как при изменении угла  $\alpha$ , так и при изменении других параметров задачи (т. е.,  $q$  или  $\varepsilon$ ). Однако, по мнению автора, этот материал представляет узкоспециальный интерес и здесь обсуждаться не будет. Читатель, интересующийся этими вопросами, может найти их изложение в работе [30].

**V. Заключение.** В заключение заметим, что поскольку поляризационные сингулярности связаны с образованием стоячих волн в малой окрестности особой точки, это предполагает существование в данной области фиксированных направлений, вдоль которых пары волн распространяются в противоположных направлениях. Дальнейшие рассуждения оказываются существенно различными в 2D и 3D случаях.

В 2D для сингулярностей типа центр и фокус такие направления отсутствуют. Поэтому данные сингулярности принадлежат к полевому типу. Что касается узлов и седел, то здесь никаких ограничений нет, и для них оказываются возможными оба типа электромагнитных сингулярностей. Однако в рассматриваемую задачу поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  входят симметричным образом. Обнуление же одного из них в особой точке выделяет это поле по отношению к другому. Тогда следует ожидать, что, если такое обнуление не следует из топологической структуры особенности (как это было в случае центра и фокуса), то в общем случае узлы и седла должны представлять собой поляризационные сингулярности. Полевые же особенности для таких сингулярностей являются случаями исключительными, связанными с определенным вырождением. Так или иначе, все седла и узлы, наблюдавшиеся нами до сих пор в различных случаях, относились к поляризационному типу.

Что касается 3D, то поскольку кубическое характеристическое уравнение всегда имеет, по крайней мере, один чисто действительный корень, в окрестности такой точки имеется выделенное направление, совпадающее с собственным вектором, соответствующим этому чисто действительному корню, по которому потоки энергии по обе стороны сингулярности на-

правлены противоположно друг другу. По этой причине топологическая структура сингулярности не накладывает никаких ограничений на ее электромагнитный тип. Тем не менее, в случае рассеяния сферой все лежащие в инвариантной плоскости фокусы оказывались полевого типа. Возможно, это связано с нарушением симметрии между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , вносимой совпадением инвариантной плоскости с плоскостью поляризации.

Отметим также задачу о вычислении топологического заряда данных сингулярностей, а также выяснение вопроса о его сохранении при различных бифуркациях, рассмотренных в работе [30]. Хотя принципиальных трудностей в поисках ответа на эти вопросы не видно, в настоящий момент они остаются открытыми, и их можно рассматривать как темы будущих исследований.

В заключение еще раз подчеркнем, что все обсуждаемые сингулярности не связаны с какими-либо особенностями падающего лазерного пучка. Они появляются спонтанно при рассеянии плоской линейно поляризованной волны, никаких особенностей не имеющей.

Таким образом, в работе выявлена глубокая связь между топологической структурой сингулярностей поля вектора Пойнтинга, их электромагнитным типом, законом сохранения энергии, симметрией задачи и размерностью пространства. Полученные результаты проливают новый свет на проблему циркуляции электромагнитной энергии в полях сложной конфигурации и создают базу для их практического применения в различных приложениях, в частности, в формировании потоков энергии заданной субволновой структуры, что важно для многих нанотехнологических приложений.

Автор благодарен Б. Я. Рубинштейну за обсуждение данной статьи и полезные замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках проекта # 21-12-00151 (аналитические исследования) и министерства Науки и высшего образования Российской Федерации в рамках проекта # 075-15-2022-1150 (компьютерные вычисления и компьютерная графика). Изучение влияния эффектов симметрии на свойства особых точек вектора Пойнтинга проведено при поддержке гранта Российского научного фонда # 23-72-00037.

1. I. Mokhun, R. Khrobatin, A. Mokhun, and J. Viktorovskaya, *Optica Applicata* **37**, 261 (2007).

2. A. V. Novitsky and L. M. Barkovsky, *Phys. Rev. A* **79**, 033821 (2009).
3. M. R. Dennis, K. O'Holleran, and M. J. Padgett, *Singular Optics: Optical Vortices and Polarization Singularities*, ed. by E. Wolf, Elsevier (2009), ch. 5, v. 53, p. 293.
4. D. Gao, A. Novitsky, T. Zhang, F. C. Cheong, L. Gao, C. T. Lim, B. Luk'yanchuk, and C.-W. Qiu, *Laser Photonics Rev.* **9**, 75 (2014).
5. L. Yue, B. Yan, J. N. Monks, R. Dhama, C. Jiang, O. V. Minin, I. V. Minin, and Z. Wang, *Sci. Rep.* **9**, 20224 (2019).
6. O. V. Angelsky, A. Y. Bekshaev, S. G. Hanson, I. I. Mokhun, M. V. Vasnetsov, and W. Wang, *Front. Phys.* **9**, 651964 (2021).
7. D. Gao, W. Ding, M. Nieto-Vesperinas, X. Ding, M. Rahman, T. Zhang, C. Lim, and C.-W. Qiu, *Light Sc. Appl.* **6**, e17039 (2017).
8. I. Mokhun, A. Arkhelyuk, Y. Galushko, Y. Kharitonovtta, and J. Viktorovskaya, *Appl. Opt.* **51**, C158 (2012).
9. C. F. Bohren, *Am. J. Phys.* **51**, 323 (1983).
10. Z. Wang, B. Luk'yanchuk, M. Hong, Y. Lin, and T. Chong, *Phys. Rev. B* **70**, 035418 (2004).
11. M. Bashevov, V. Fedotov, and N. Zheludev, *Opt. Express* **13**, 8372 (2005).
12. M. I. Tribelsky and B. S. Luk'yanchuk, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006).
13. B. Luk'yanchuk, Z. Wang, M. Tribelsky, V. Ternovsky, M. Hong, and T. Chong, *J. Phys. Conf. Ser.* **59**, 234 (2007).
14. B. Luk'yanchuk, M. Tribelsky, V. Ternovsky, Z. Wang, M. Hong, L. Shi, and T. Chong, *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* **9**, S294 (2007).
15. V. A. Canós, E. A. Gurvitz, F. A. Benimetskiy, D. A. Pidgayko, A. Samusev, A. B. Evlyukhin, V. Bobrovs, D. Redka, M. I. Tribelsky, M. Rahmani, K. Z. Kamali, A. A. Pavlov, A. E. Miroshnichenko, and A. S. Shalin, *Laser Photonics Rev.* **15**, 2100114 (2021).
16. М. И. Трибельский, А. Е. Мирошниченко, *Успехи физических наук* **192**, 45 (2022).
17. L. Yue, Z. Wang, B. Yan, Y. Xie, Y. E. Geints, O. V. Minin, and I. V. Minin, *Photonics* **9**, 154 (2022).
18. Y. E. Geints, I. V. Minin, and O. V. Minin, *Opt. Lett.* **47**, 1786 (2022).
19. Y. E. Geints, I. V. Minin, and O. V. Minin, *Opt. Commun.* **524**, 128779 (2022).
20. M. Berry, N. Zheludev, Y. Aharonov et al. (Collaboration), *J. Opt.* **21**, 053002 (2019).
21. A. K. Ospanova, A. Basharin, A. E. Miroshnichenko, and B. Luk'yanchuk, *Opt. Mater. Express* **11**, 23 (2021).
22. В. В. Котляр, А. Г. Налимов, С. С. Стафеев, *Компьютерная оптика* **42**, 392 (2018).

23. V. V. Kotlyar, S. S. Stafeev, and A. A. Kovalev, *Opt. Express* **27**, 16689 (2019).
24. M. V. Berry, *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* **6**, 259 (2004).
25. В. В. Котляр, А. А. Ковалев, *Топологический заряд оптических вихрей*, ООО “Новая техника”, Самара (2021).
26. M. V. Berry, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **392**, 45 (1984).
27. E. Cohen, H. Larocque, F. Bouchard, F. Nejdassattari, Y. Gefen, and E. Karimi, *Nature Reviews Physics* **1**, 437 (2019).
28. M. I. Tribelsky and B. Y. Rubinstein, *Nanomaterials* **12**, 1878 (2022).
29. M. I. Tribelsky and B. Y. Rubinstein, *Nanomaterials* **12**, 3164 (2022).
30. M. I. Tribelsky, arXiv.org (2023), 2305.08534v2.
31. C. F. Bohren and D. R. Human, *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, WILEY-VCH, Verlag, N.Y. (1998).
32. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М. (1982).
33. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, N.Y. (1998), p. 832.
34. K. Y. Bliokh, Y. S. Kivshar, and F. Nori, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 033601 (2014).
35. K. Y. Bliokh, A. Y. Bekshaev, and F. Nori, *Nat. Commun.* **5**, 3300 (2014); 10.1038/ncomms4300.
36. A. Y. Bekshaev, K. Y. Bliokh, and F. Nori, *Phys. Rev. X* **5**, 011039 (2015).
37. X. Xu and M. Nieto-Vesperinas, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 233902 (2019).
38. S. N. Khonina, S. A. Degtyarev, A. V. Ustinov, and A. P. Porfirev, *Opt. Express* **29**, 18634 (2021).
39. Y. Tang and A. E. Cohen, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 163901 (2010).
40. A. Lininger, G. Palermo, A. Guglielmelli, G. Nicoletta, M. Goel, M. Hinczewski, and G. Strangi, *Adv. Mater.* 2107325 (2022); <https://doi.org/10.1002/adma.202107325>.
41. В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, МЦНМО, М. (2012).
42. M. Polyanskiy, Refractive index database, <http://refractiveindex.info/>, accessed: May 25, 2022.
43. A. Y. Bekshaev and M. Soskin, *Opt. Commun.* **271**, 332 (2007).
44. A. Bekshaev, K. Y. Bliokh, and M. Soskin, *J. Opt.* **13**, 053001 (2011).