

Возможный метод поиска майорановских нейтрино на будущих лептонных коллайдерах

Е. С. Антонов⁺¹⁾, А. Г. Друцкой^{+ 1)}, М. Н. Дубинин^{* 1)}

⁺Физический институт РАН им. П. Н. Лебедева, 119991 Москва, Россия

^{*}Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 7 августа 2023 г.

После переработки 22 августа 2023 г.

Принята к публикации 22 августа 2023 г.

Исследуется процесс $\ell^+\ell^- \rightarrow NW^\pm\ell^\mp$, где N – тяжелое майорановское нейтрино, а $\ell = e, \mu$. Для данного процесса ожидается большое сечение при высоких энергиях пучков в системе центра масс, достижимых на будущих лептон-лептонных коллайдерах. Монте-Карло моделирование исследуемого процесса было выполнено в рамках модели seesaw type-I, в которой лептонный сектор стандартной модели расширяется майорановскими нейтрино (или тяжелыми нейтральными лептонами, HNL). Возможность поиска прямого рождения HNL недавно была изучена для канала $\ell^+\ell^- \rightarrow N\nu_\ell$ с последующим распадом $N \rightarrow W^\pm\ell^\mp$. В данной работе мы исследуем альтернативный процесс $\ell^+\ell^- \rightarrow NW^\pm\ell^\mp \rightarrow W^\pm W^\pm \ell^\mp \ell^\mp$ с нарушением лептонного числа на две единицы. Аналогичные процессы возможны при столкновении частиц одного знака заряда, $e^-e^- \rightarrow NW^-e^- \rightarrow W^-W^-e^+e^-$ или $\mu^+\mu^+ \rightarrow NW^+\mu^+ \rightarrow W^+W^+\mu^+\mu^-$. Рассматриваемые сечения усиливаются за счет обмена мягкими фотонами в t -канале. В работе вычислены сечения процессов для сигнала и изучены потенциальные фоны стандартной модели, возникающие в результате столкновений e^+e^- пучков при энергии в системе центра масс 1 ТэВ и $\mu^+\mu^-$ пучков при энергиях 3 и 10 ТэВ. Вследствие диаграмм с мягкими t -канальными фотонами первичные лептоны вылетают в направлении, близком к начальному пучку частиц соответствующего знака. Эти лептоны будут потеряны в вакуумной трубе коллайдера или плохо измерены передними детекторами. Тем не менее сигнальные события могут быть отделены от фоновых благодаря оставшимся детектируемым частицам $WW\ell$. Установлены ожидаемые ограничения сверху для параметров смешивания $|V_{\ell N}|^2$ в зависимости от массы HNL.

DOI: 10.31857/S1234567823190011, EDN: xvhomc

I. Введение. Нейтрино стандартной модели (SM) могут быть майорановскими фермионами, при этом механизм образования их масс связан с нарушением глобальной инвариантности $U(1)_{B-L}$ лагранжиана SM. В результате становятся возможными очень редкие процессы взаимодействия с нарушением лептонного числа (LNV-процессы). Очень малые массы стандартных (или активных) нейтрино объясняются в рамках расширения лептонного сектора SM введением майорановских нейтрино (или тяжелых нейтральных лептонов, HNL). В процессах с участием HNL возможно экспериментальное наблюдение эффектов нарушения лептонного числа.

Текущие экспериментальные значения верхних пределов параметров смешивания HNL $|V_{lN}|$, $l = e, \mu, \tau$ в зависимости от массы HNL представлены

в обзоре [1]. Интервал масс от 0.1 ГэВ до нескольких ГэВ изучается в экспериментах с выведенным пучком с восстановлением недостающей энергии и экспериментами с далеко отстоящими вторичными вершинами. Интервал масс до масштаба ТэВ – это диапазон, изучаемый в экспериментах на коллайдерах. На LEP были получены строгие верхние пределы для масс HNL вплоть до массы Z -бозона [2], однако пределы для масс HNL выше 100 ГэВ довольно слабые. Верхний предел для суммы $|\sum_i V_{eN_i}^2/M(N_i)| \leq 1.8 \times 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-1}$ был получен в рамках модели seesaw type-I из экспериментов по поиску безнейтринного двойного бета-распада ($0\nu\beta\beta$) [3]. Однако это ограничение можно обойти при определенных условиях, в частности включением трех поколений тяжелых HNL при определенной комбинации фаз CP в матрице PMNS [4]. Последние экспериментальные верхние пределы параметров смешивания для масс HNL, превышающих 100 ГэВ, были получены из данных LHC run II [5–7], более строгие ограни-

¹⁾Antonov@lebedev.ru; Drutskoy@lebedev.ru; Dubinin@theory.sinp.msu.ru

чения ожидаются после будущего увеличения светимости ЛНС [2, 8–10]. Однако значительного улучшения ограничений сверху можно будет достичь на будущих лептонных коллайдерах высоких энергий [11].

Моделирование рождения HNL в коллайдерных экспериментах продемонстрировало реалистичные возможности поиска сигнальных процессов на e^+e^- , e^-e^- , $\mu^+\mu^-$ и $\mu^+\mu^+$ коллайдерах при энергиях порядка нескольких ТэВ. После расчета процесса $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}e\nu$ на партонном уровне на LEP2 [12], выполненного для полного набора $2 \rightarrow 4$ диаграмм с помощью пакета программ CompHEP [13, 14], был проведен ряд детальных исследований по отделению сигнала от фона SM, включая моделирование детектора. В работе [11] проведено исследование канала $e^+e^- \rightarrow N\nu \rightarrow q\bar{q}l\nu$ при энергиях ILC и CLIC, выполненное с помощью программ FeynRules [15], Whizard [16] и Delphes [17]. Теоретико-полевая модель заложена в пакете FeynRules, генерация событий выполняется в Whizard. Моделирование детектора и реконструкция событий выполняются в программе Delphes, тем самым обеспечивая реалистичное описание всех объектов в конечном состоянии. Возможность поиска HNL в процессе $\mu^+\mu^- \rightarrow N\nu \rightarrow q\bar{q}l\nu$ при энергиях в ТэВ-ной области изучалась в [18] и [19] с использованием программ FeynRules, Whizard и Delphes, а в [20] – программ FeynRules, Madgraph5 [21] и Delphes. В исследованиях процессов $\ell^+\ell^- \rightarrow N\nu \rightarrow q\bar{q}l\nu$ верхние пределы параметра смешивания получены на уровне порядка $|V_{\ell N}|^2 \sim 10^{-5} - 10^{-7}$ при интегральных светимостях порядка нескольких аб⁻¹ и энергии столкновения пучков в диапазоне (1–10) ТэВ. Хотя фон под сигналом достаточно велик, хорошее отделение сигнала было достигнуто за счет использования ряда дискриминирующих переменных, введенных для описания конечного состояния. Рождение HNL в процессе перерасеяния векторных бозонов изучалось в [22] для мюонных коллайдеров при высоких энергиях. Возможность поиска HNL в e^-p -столкновениях с протонами с энергией порядка нескольких ТэВ и электронами с энергией 60 ГэВ обсуждалась в [23].

В данной работе изучается рождение тяжелых майорановских нейтрино в процессах $e^+e^- \rightarrow NW^+e^-$ и $\mu^+\mu^- \rightarrow NW^+\mu^-$ с помощью программ LanHEP [24], CompHEP, Pythia6 [25] и Delphes. Теоретико-полевая модель определена в пакете LanHEP, генерация событий выполняется с помощью CompHEP, распады HNL и W -бозонов, а также адронизация, выполняются с помощью Pythia, а моделирование детектора выполняется с помощью Delphes. Образовавшиеся майорановские

нейтрино распадаются в каналах $N \rightarrow W^+e^-$ и $N \rightarrow W^+\mu^-$, что приводит к нарушению лептонного числа на две единицы. Эти процессы разрешены только в случае майорановских нейтрино и имеют четкую экспериментальную сигнатуру. В статье по умолчанию предполагаются зарядово-сопряженные процессы. Похожие процессы $e^-e^- \rightarrow NW^-e^-$ и $\mu^+\mu^+ \rightarrow NW^+\mu^+$ возможны при столкновениях пучков одинакового знака.

Процесс $e^+e^- \rightarrow NW^+e^-$ изучался в [26] при энергиях в центре масс (CM) 350 и 500 ГэВ с использованием пакетов FeynRules и Madgraph5. Однако в этом исследовании предполагалась реконструкция всех частиц конечного состояния, что приводило к очень небольшому количеству ожидаемых сигнальных событий.

Следует отметить, что прямое рождение HNL в результате лептон-лептонных столкновений обеспечивает высокую чувствительность к параметру смешивания $|V_{\ell N}|^2$, поскольку процесс содержит только одну вершину $NW\ell$. Процесс $\mu^+\mu^+ \rightarrow W^+W^+$ с двумя такими вершинами позволяет получить более слабые значения верхних пределов, однако имеет чувствительность к массам HNL, превышающим энергию столкновений в CM [4, 27, 28].

II. Модель seesaw type-I. В рамках известного механизма seesaw type-I массы стандартных (активных) нейтрино генерируются при помощи лагранжиана [29]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + i\bar{\nu}_R \gamma^\mu \partial_\mu \nu_R - \left(F \bar{L}_l \tilde{H} \nu_R + \frac{1}{2} M_M \bar{\nu}^c_R \nu_R + \text{h.c.} \right), \quad (1)$$

где $L_l = (\nu_l, l)_L^T$ – левый дублет лептонов, ν_R – калибровочные состояния HNL, $(\nu_R)^c \equiv C\bar{\nu}_R^T$ ($C = i\gamma_2\gamma_0$), H – хиггсовский дублет ($\tilde{H} = i\tau_2 H^*$, τ_2 – матрица Паули), F – матрица Юкавы 3×3 и M_M – майорановская массовая матрица для трех поколений, $M_M^T = M_M$. После спонтанного нарушения симметрии матрица Юкавы $M_D = Fv/\sqrt{2}$ ($v = 246$ ГэВ) и майорановская матрица M_M образуют полную массовую матрицу 6×6 расширенного лептонного сектора

$$\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L \bar{\nu}^c_R) \mathcal{M} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{h.c.} = \frac{1}{2}(\bar{\nu}_L \bar{\nu}^c_R) \begin{pmatrix} 0 & M_D \\ M_D^T & M_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{h.c.}, \quad (2)$$

где калибровочные состояния $(\nu_L)_\alpha, (\nu_R)_I$ и массовые состояния ν_k, N_I ($\alpha = e, \mu, \tau, k, I = 1, 2, 3$) связаны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix} = U_{PL} \begin{pmatrix} \nu \\ N \end{pmatrix}, \quad U = \mathcal{W} \cdot \text{diag}(U_\nu, U_N^*). \quad (3)$$

$P_L = (1 - \gamma_5)/2$ – левокиральный проектор, U_ν, U_N – унитарные матрицы 3×3 . Блочнo-диагональная форма полной массовой матрицы (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^\dagger \mathcal{M} \mathcal{U}^* &= \begin{pmatrix} U_\nu^\dagger & 0 \\ 0 & U_N^T \end{pmatrix} \mathcal{W}^\dagger \mathcal{M} \mathcal{W}^* \begin{pmatrix} U_\nu^* & 0 \\ 0 & U_N \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_\nu^\dagger m_\nu U_\nu^* & 0 \\ 0 & U_N^T M_N U_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{m} & 0 \\ 0 & \hat{M} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

где \hat{m} и \hat{M} – диагональные массовые матрицы для активных нейтрино и HNL, $\mathcal{W}^\dagger \mathcal{M} \mathcal{W} = \text{diag}(m_\nu, M_N)$, \mathcal{M} определяются ур.(2). В рамках последующей процедуры диагонализации массового члена [30, 31] (так называемая диагонализация Касака–Ибарры) унитарная матрица \mathcal{W} представляется в виде экспоненты антиэрмитовой матрицы

$$\mathcal{W} = \exp \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

и раскладывается в ряд до членов второго порядка по θ . В результате связь массовых и калибровочных состояний нейтрино можно записать в виде

$$\begin{aligned} \nu_L &\simeq \left(1 - \frac{1}{2}\theta\theta^\dagger\right) U_\nu P_L \nu + \theta U_N^* P_L N, \\ \nu_R^c &\simeq -\theta^\dagger U_\nu P_L \nu + \left(1 - \frac{1}{2}\theta^\dagger\theta\right) U_N^* P_L N. \end{aligned} \quad (6)$$

Первый член (6) соответствует известному феноменологическому соотношению $\nu_{L\alpha} = \sum_\alpha (U_{PMNS})_{\alpha j} P_L \nu_j$, определяющему матрицу смешивания Понтекорво–Маки–Накагава–Саката (PMNS) в секторе активных нейтрино [32, 33]. Отклонение матрицы PMNS от унитарности определяется членом $-\frac{1}{2}\theta\theta^\dagger$. Члены лагранжиана для взаимодействия массовых состояний нейтрино и массовых состояний HNL с W^\pm, Z бозонами имеют формы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NC}^\nu &= -\frac{g}{2c_W} \gamma^\mu \bar{\nu}_L U_{PMNS}^\dagger U_{PMNS} \nu_L Z_\mu, \quad (7) \\ \mathcal{L}_{CC}^\nu &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{l}_L \gamma^\mu U_{PMNS} \nu_L W_\mu^- + \text{h.c.}, \\ \mathcal{L}_{NC}^N &= -\frac{g}{2c_W} \bar{N}_L \gamma^\mu U_N^T \theta^\dagger \theta U_N^* N_L Z_\mu - \\ &\quad - \left[\frac{g}{2c_W} \bar{\nu}_L \gamma^\mu U_\nu^\dagger \theta U_N^* N_L Z_\mu + \text{h.c.} \right], \\ \mathcal{L}_{CC}^N &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{l}_L \gamma^\mu \theta U_N^* N_L W_\mu^- + \text{h.c.}, \end{aligned}$$

откуда видно, что смешивание HNL в приближении $\mathcal{W} \sim \mathcal{O}(\theta^2)$ определяется матрицей $\Theta \equiv \theta U_N^*$. Массовая матрица активных нейтрино задается в рамках рассматриваемого приближения $\mathcal{O}(\theta^2)$ известным уравнением seesaw type I

$$m_\nu \simeq -M_D \theta^T \simeq -M_D M_M^{-1} M_D^T \quad (8)$$

с неоднозначным определением M_D при помощи U_{PMNS} и матрицы U_N сектора HNL

$$M_D = i U_{PMNS} \sqrt{\hat{m}} \Omega \sqrt{\hat{M}} U_N^\dagger, \quad (9)$$

где Ω – произвольная ортогональная матрица, $\Omega \Omega^T = I$. Компоненты матрицы смешивания имеют вид

$$\Theta_{\alpha I} = i \frac{\sum_k \sqrt{m_k} (U_\nu)_{\alpha k} \Omega_{kI}}{\sqrt{M_I}}, \quad (10)$$

где $\alpha = e, \mu, \tau$ и $I = 1, 2, 3$ – номер поколения HNL. Смешивание для первого поколения HNL, который обычно рассматривается на роль кандидата частицы темной материи, определяется первым столбцом матрицы Ω .

В наиболее простом случае “минимального параметрического смешивания” $\Omega = I$ (единичная матрица) получаем матрицу смешивания для нормальной массовой иерархии активных нейтрино (далее – NH)

$$\Theta_{\min}^{\text{NH}} = \begin{pmatrix} iU_{e1} \sqrt{\frac{m_1}{M_1}} & iU_{e2} \sqrt{\frac{m_2}{M_2}} & iU_{e3} \sqrt{\frac{m_3}{M_3}} \\ iU_{\mu 1} \sqrt{\frac{m_1}{M_1}} & iU_{\mu 2} \sqrt{\frac{m_2}{M_2}} & iU_{\mu 3} \sqrt{\frac{m_3}{M_3}} \\ iU_{\tau 1} \sqrt{\frac{m_1}{M_1}} & iU_{\tau 2} \sqrt{\frac{m_2}{M_2}} & iU_{\tau 3} \sqrt{\frac{m_3}{M_3}} \end{pmatrix}.$$

Для обратной массовой иерархии (IH) используется антидиагональная Ω . Используя токи для HNL ур. (7), заключаем, что их сечения рождения в низшем порядке содержат фактор $|\Theta|^2$ и сильно подавлены отношением масс m/M активных нейтрино и HNL. В литературе последнего времени на почти безальтернативной основе используется интересный феноменологически вариант смешивания

$$\begin{aligned} \Omega^{\text{NH}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ 0 & \xi \sin(\omega) & \xi \cos(\omega) \end{pmatrix}, \\ \text{или } \Omega^{\text{IH}} &= \begin{pmatrix} 0 & \cos(\omega) & -\sin(\omega) \\ 0 & \xi \sin(\omega) & \xi \cos(\omega) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Усиление сечений возникает при комплексных параметрах ω , которые дают факторы $X_\omega = \exp(\text{Im}(\omega))$ в матрице Θ .

Анализ смешивания активных и стерильных нейтрино в [34] продемонстрировал, что феноменологически согласованная иерархия смешиваний Θ_{eI} , $\Theta_{\mu I}$ и $\Theta_{\tau I}$ с подавлением Θ_{eI} относительно других элементов матрицы смешивания может быть достигнута в широком интервале X_ω независимо от значений масс HNL. Экспериментальные верхние границы для $\Theta_{\alpha I}$, полученные из кратчайших возможных для экспериментальной регистрации времен жизни $N_{2,3}$ при распадах π^\pm и K^\pm , преобразованные в верхнюю границу для X_ω , приводят к $\text{Im}(\omega) \sim 4$ при массе HNL порядка 10^2 МэВ для времени жизни порядка 1 с и $\text{Im}(\omega) \sim 7$ для времени жизни порядка 0.01 с. Значения параметра ω , превышающие 7, могут привести к большим параметрам смешивания, не согласующимся с электрослабыми данными высокой точности. Недавний пересмотр в свете современных данных для поиска HNL в диапазоне масс, меньшем массы K мезона, был проведен в [35] для случая двух поколений HNL. Модельная зависимость Θ -смешивания приводит к довольно нетривиальному набору последствий для наблюдаемых величин. По этой причине исследования на ускорителях проводятся в рамках так называемого “независимого от модели феноменологического подхода” [36] или, другими словами, “феноменологической модели seesaw type-I” [37]. В модельно-независимом феноменологическом подходе предполагается, что в эксперименте доступен только один HNL, в то время как другие HNL являются достаточно тяжелыми и, отщепляясь, не влияют на анализ. В этом подходе есть только два независимых параметра: масса HNL и параметр связи Юкавы, определяющий взаимодействие HNL с активным нейтрино данного аромата, предполагая, что смешивание с другими ароматами равно нулю. В феноменологическую модель seesaw type-I добавлен дополнительный параметр, отличающий случай нейтрино Дирака от случая нейтрино Майораны, который позволяет различать наблюдаемые, специфичные для теоретико-полевой модели. Такие упрощения полезны для вывода общих границ параметра смешивания, выходящих за рамки каких-либо аспектов построения конкретной модели, но нуждаются в соответствующем переводе, если нужно выйти за рамки случая одного поколения и рассмотреть четко определенное смешивание.

В последующем анализе, основанном на диагонализации Касаса–Ибарры, коэффициент смешивания, включающий $\sqrt{m/M}$, увеличивается путем принятия комплексного параметра $\text{Im}(\omega) = 3$, затем вычисления $\Theta_{\alpha I}$. Этот подход отличается от конкретных сценариев смешивания в так называемом псевдо-

дираковском пределе, где используется дополнительная симметрия для согласования очень малых активных масс нейтрино с их большими смешиваниями, необходимая для получения наблюдаемых сигналов HNL на электрослабом масштабе. Явные выражения для $\Theta_{\alpha I}$ как функции от $\text{Im}(\omega)$ приведены в [34].

III. Экспериментальная часть.

А. Монте-Карло моделирование и реконструкция событий. Сигнальные процессы $\ell^+\ell^- \rightarrow NW^\pm\ell^\mp$, где $\ell = e, \mu$, моделируются с помощью пакета программ ComPHEP [13], в который встроена seesaw type-I модель. Как упоминалось выше, для простоты в расчеты включено только одно майорановское нейтрино, которое в дальнейшем обозначается как N . Предполагается, что два других HNL дают малый вклад. В расчеты включены матричные элементы для всех возможных диаграмм сигнала и фона на партонном уровне, которые разрешены для изучаемого процесса. Сигнальному процессу соответствует набор 30 диаграмм, включенных в генераторе событий ComPHEP. Две из них, диаграммы с t -канальными векторными бозонами, показаны на рис. 1.

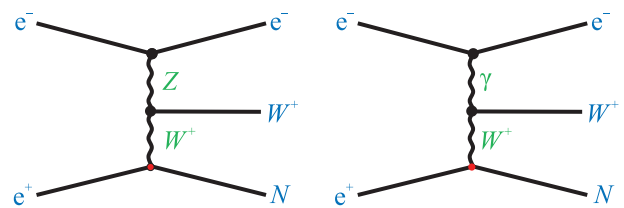


Рис. 1. (Цветной онлайн) Примеры диаграмм, которые описывают процесс $e^+e^- \rightarrow NW^+e^-$

Пакет ComPHEP вычисляет сечения изучаемых процессов и создает наборы данных Монте-Карло (МК) событий без веса. Проведена генерация событий для процесса $e^+e^- \rightarrow NW^+e^-$ при энергии CM 1 ТэВ и процесса $\mu^+\mu^- \rightarrow NW^+\mu^-$ при энергиях CM 3 и 10 ТэВ. Предполагается, что пучки неполяризованы. Масса HNL варьируется в диапазоне от 100 ГэВ до энергии CM. Предполагается, что ширина HNL увеличивается с ростом массы HNL, как было получено в [11]. Изменение ширины HNL в пределах 20 % приводит к изменению сечения менее чем 1 %.

Последующие распады $N \rightarrow W^\pm\ell^\mp$ и $W^\pm \rightarrow q\bar{q}$ моделируются в Pythia6. Используются только адронные распады W -бозонов. Мы смоделировали в Pythia6 распределение по углу θ_ℓ^* лептона в системе покоя HNL относительно направления HNL в соответствии с формулой $f(\theta_\ell^*) = (1 - \cos(\theta_\ell^*))/2$. Эффекты излучения пучков в начальном состоянии (ISR)

включены на уровне Pythia6. Процесс адронизации кварков также моделируется в Pythia6. Наборы данных для фонов SM получены с помощью генератора Whizard 2, в который включен пакет программ Pythia6. При генерации фона используются те же пучки и энергии SM, что и для сигнала. Полученные наборы данных для сигнальных и фоновых событий обрабатываются с помощью программы Delphes [17], которая обеспечивает быстрое и упрощенное моделирование детекторов и реконструкцию событий. В Delphes используется модель детектора ILC для реконструкции процесса $e^+e^- \rightarrow NW^+e^-$ при 1 ТэВ и модель детектора MuC для реконструкции процесса $\mu^+\mu^- \rightarrow NW^+\mu^-$ при 3 и 10 ТэВ. Струи реконструируются с помощью алгоритма Valencia с параметрами по умолчанию. Алгоритм реконструкции струй в Delphes принудительно собирает ровно четыре струи. Полученные наборы выходных данных содержат информацию о 4-импульсах восстановленных струй и изолированных лептонов. Наборы данных для сигнальных и фоновых событий, полученные из Delphes, анализируются с помощью пакета ROOT.

В. Сечения. Сечения процессов $\ell^+\ell^- \rightarrow NW^+\ell^-$, вычисленные с помощью программы ComrHEP, показаны на рис. 2. Параметр смешивания зафиксирован в значение $|V_{\ell N}|^2 = 0.0003$, для сравнения результатов с [11], где использовалось это значение. Сечения процессов $\ell^+\ell^- \rightarrow N\nu_\ell$, вычисленные с помощью ComrHEP, также показаны на рис. 2. Для обоих процессов предполагаются одинаковые пучки, энергии CM и параметры смешивания. Унитарное сокращение полюса второго порядка для t -канала, см. рис. 1 (правая диаграмма), проверяется непосредственно с помощью распределения $d\sigma/d(\ln t)$ [38]. Значения сечений процесса $\ell^+\ell^- \rightarrow N\nu_\ell$, полученные с помощью ComrHEP, хорошо совпадают со значениями сечений, рассчитанными в [11] с использованием генератора Whizard 2.

Как видно из рис. 2, плато в сечении процесса $\ell^+\ell^- \rightarrow NW^\pm\ell^\mp$ растет с ростом энергии CM в отличие от процесса $\ell^+\ell^- \rightarrow N\nu_\ell$. При высоких энергиях CM процесс $\ell^+\ell^- \rightarrow NW^\pm\ell^\mp$ имеет большие сечения и может быть использован для получения строгих верхних пределов на параметры смешивания. Дополнительными преимуществами этого процесса являются высокая эффективность реконструкции сигнала и хорошее разделение сигнала и фона.

С. Отборы. Процесс $\ell^+\ell^- \rightarrow W^+W^+\ell^-\ell^-$ включает два лептона одинакового знака и четыре струи в конечном состоянии. Хотя в этом конечном состоянии нет фонов SM, эффективность полной реконструкции события ниже процентного уровня. Один

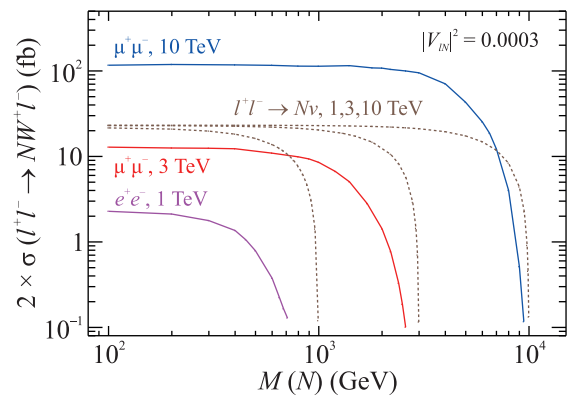


Рис. 2. (Цветной онлайн) Сечения, построенные в зависимости от массы HNL, показаны для процесса $e^+e^- \rightarrow NW^+e^-$ при 1 ТэВ (фиолетовая линия) и процесса $\mu^+\mu^- \rightarrow NW^+\mu^-$ при 3 ТэВ (красная линия) и 10 ТэВ (синяя линия). Фактор 2 отражает два зарядово-сопряженных конечных состояния. Для сравнения также показаны сечения процессов $\ell^+\ell^- \rightarrow N\nu_\ell$ для тех же параметров смешивания, частиц пучка и энергий CM (пунктирные коричневые линии)

из лептонов конечного состояния преимущественно излучается близко к направлению пучка и не регистрируется в детекторе или плохо измеряется передними калориметрами. Поэтому не рассматривается сигнатура, в которой должны быть реконструированы все частицы.

Рассматривалось конечное состояние с четырьмя струями и одним лептоном. Начальные отборы были сделаны на энергию и псевдобыстроту струй и лептона:

$$E(j) > 10 \text{ ГэВ}; \quad E(\ell) > 10 \text{ ГэВ}; \\ |\eta(j)| < 2.5; \quad |\eta(\ell)| < 2.5. \quad (12)$$

Струи рождаются при распаде W -бозона, соответственно мы комбинируем четыре струи в два бозона. Среди возможных комбинаций в качестве кандидатов в W -бозоны были выбраны две пары струй с инвариантными массами, наиболее близкими к номинальной массе W -бозона. Если W -бозон имеет большую энергию, образующиеся струи могут частично перекрываться. В этом случае параметры отдельных струй могут быть неточными, однако соответствующая сумма этих двух струй с достаточной точностью воспроизводит массу и импульс W -бозона.

Для разделения сигнальных и фоновых событий мы используем следующие переменные:

- $M_{\text{miss}}(4j\ell^-)$ – недостающая масса к сумме четырех струй и реконструированного лептона;

- b) $M(jj)$ – массы пар струй – кандидатов в W -бозоны;
- c) $\cos(W_1 \vee W_2)$ – косинус угла между двумя кандидатами в W -бозоны;
- d) $\cos(\ell^- \vee \ell_{\text{beam}}^-)$ – косинус угла между направлениями реконструированного лептона и пучкового лептона того же знака;
- e) $\cos(P_{\text{miss}}(4j \ell^-) \vee \ell_{\text{beam}}^-)$ – косинус угла между недостающим импульсом (к четырем струям и изолированному лептону) и лептоном пучка того же знака;
- f) $M_{\Delta}(W\ell^-)$ – инвариантные массы W -бозона и реконструированного лептона (две комбинации).

Отбор по переменной $M_{\text{miss}}(4j \ell^-)$ используется для подавления фонов с двумя и более ненаблюдаемыми частицами, поскольку такие фоны должны иметь большую недостающую массу. Масса пар струй, отобранных как кандидаты в W -бозоны, должна лежать в диапазоне $50 < M(jj) < 120$ ГэВ. Фоны, в которых только один родившийся W , или Z -бозон распадается на две струи, могут имитировать четырехструйную конфигурацию. Для такого фона угол между кандидатами в W -бозоны должен быть небольшим, и для подавления этого фона применяется ограничение по переменной $\cos(W_1 \vee W_2) < 0.8$. У фонов, возникающих в результате процессов слияния векторных бозонов, должен быть малый угол между направлениями лептонов и соответствующих пучков. Ограничение $\cos(\ell^- \vee \ell_{\text{beam}}^-) < 0.7$ используется для существенного подавления этих фонов. Это же ограничение подавляет фоны, в которых лептон рождается при распаде W -бозона. Как объяснялось выше, ненаблюдаемый лептон преимущественно излучается под малым углом относительно направления соответствующего пучка. Знак пучка определяется в соответствии со знаком восстановленного лептона. Поэтому импульс системы, состоящей из четырех струй и лептона, можно использовать для оценки направления потерянного лептона. Переменная $\cos(P_{\text{miss}} \vee \ell_{\text{beam}}^-)$ имеет максимум распределения в области 1 для сигнальных событий, за исключением событий с массой HNL, близкой к E_{cms} . Напротив, фоны, возникающие в результате слияния векторных бозонов, достигают максимума при значении -1 , тогда как другие фоны имеют плоское распределение. Поэтому ограничение $\cos(P_{\text{miss}} \vee \ell_{\text{beam}}^-) > 0.9$ применяется для всех значений массы HNL, за исключением области больших масс, где распределение для сигнала становится плоским. Все примененные огра-

ничения указаны в табл. 1. После всех отборов, в распределениях инвариантной массы W -бозона и восстановленного лептона $M_{\Delta}(W\ell^-)$ необходимо провести поиск пика, соответствующего рождению HNL. Разность масс $M_{\Delta}(W\ell^-) = M(jj\ell^-) - M(jj) + 80.377$ используется вместо $M(jj\ell^-)$ для улучшения разрешения сигнала, особенно в области малых масс HNL меньше 500 ГэВ.

Таблица 1. Ограничения на переменные, применяемые при разных энергиях CM. В последнем столбце указаны ограничения для области высоких масс HNL $M(N) > 0.85E_{\text{cms}}$, где не используется ограничение на $\cos(P_{\text{miss}} \vee \ell_{\text{beam}}^-)$

Энергия CM, Пучки	1 ТэВ e^+e^-	3 ТэВ $\mu^+\mu^-$	10 ТэВ $\mu^+\mu^-$	$M(N) >$ $0.8 E_{\text{cms}}$
M_{miss} , ГэВ	< 350	< 800	< 3000	та же
$M(jj)$, ГэВ	50–120	50–120	50–120	50–120
$\cos(W_1 \vee W_2)$	< 0.8	< 0.8	< 0.8	< 0.8
$\cos(\ell^- \vee \ell_{\text{beam}}^-)$	< 0.7	< 0.7	< 0.7	< 0.7
$\cos(P_{\text{miss}} \vee \ell_{\text{beam}}^-)$	> 0.9	> 0.9	> 0.9	–

D. Фоны. Для упрощения в этом разделе используется описание метода для электронного канала, тогда как точно такой же анализ проводился и для каналов с мюонным пучком. Исследуемые фоны должны иметь как минимум один идентифицированный изолированный лептон. Изолированные лептоны могут рождаться в результате распадов W или Z -бозонов или в процессах слияния векторных бозонов. Фоны с ошибочной идентификацией лептона не изучались, ожидается, что эти фоны дают пренебрежимо малый вклад. Необходимым условием является реконструкция всех четырех струй, однако есть фоны, в которых две струи разделены и имитируют четыре струи.

Предполагается, что интегральная светимость равна 1 аб^{-1} для e^+e^- -столкновений при 1 ТэВ и для $\mu^+\mu^-$ -столкновений при 3 ТэВ. Для столкновений $\mu^+\mu^-$ при энергии 10 ТэВ предполагается интегральная светимость 10 аб^{-1} . С помощью генератора Whizard 2 оцениваются сечения для всех потенциально опасных фонов и рассчитывается приблизительное количество событий, которые, как ожидается, дают вклад в распределение $M_{\Delta}(W\ell^-)$. Если предполагаемое количество событий не слишком мало, генерируются наборы данных для получения более точных оценок. На уровне генерации фонов ограничение на псевдобыстроту $|\eta(\ell^-)| < 2.6$ применяется для отрицательно заряженных лептонов, образующихся в процессах слияния векторных бозонов. Проведена генерация событий для шести потенциально опасных фоновых каналов:

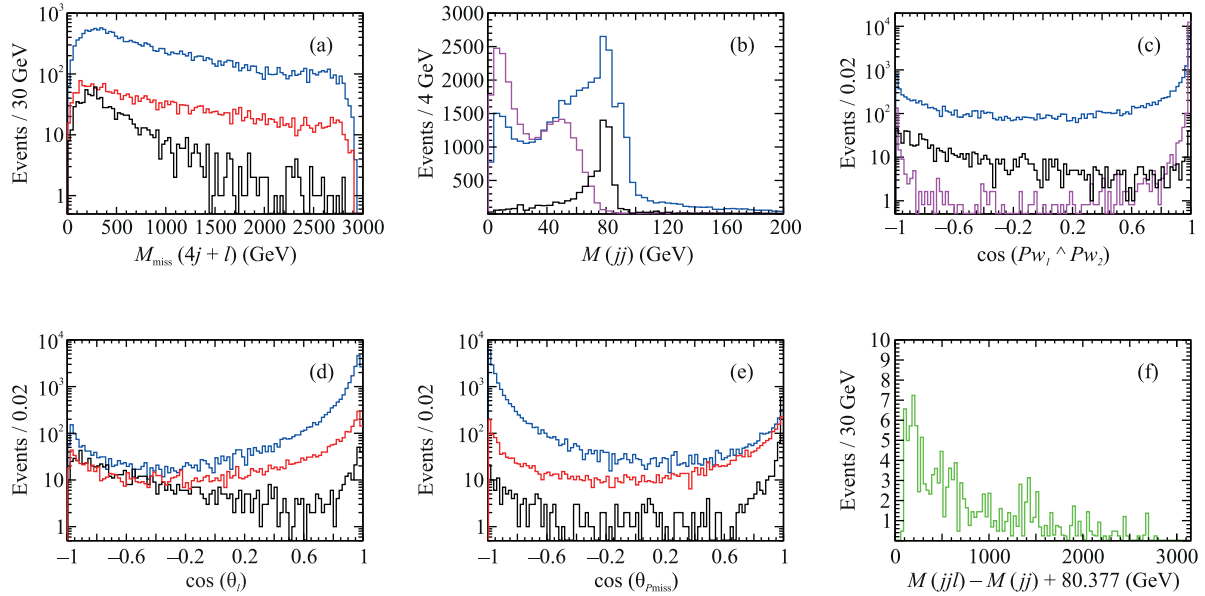


Рис. 3. (Цветной онлайн) Распределения для переменных: (a) – $M_{\text{miss}}(4j \ell^-)$; (b) – $M(jj)$; (c) – $\cos(W_1 \vee W_2)$; (d) – $\cos(\ell^- \vee \ell^-_{\text{beam}})$; (e) – $\cos(P_{\text{miss}}(4j \ell^-) \vee \ell^-_{\text{beam}})$ и (f) – $M_{\Delta}(W\ell^-)$, показанные для $\mu^+\mu^-$ -столкновений при энергии СМ 3 ТэВ. Гистограммы черного цвета описывают сигнальный процесс $\mu^+\mu^- \rightarrow NW^+\mu^-$ с $M(N) = 600$ ГэВ. Сигнал, показанный на рисунке (b), умножен на коэффициент 4. Цветные гистограммы описывают фоновые распределения для процессов $\mu^+\mu^- \rightarrow W^+(q\bar{q})Z(q\bar{q})\mu^-\nu_\mu$ (синие гистограммы), $\mu^+\mu^- \rightarrow W^+(q\bar{q})Z(q\bar{q})W^-(\mu^-\nu_\mu)$ (красные гистограммы) и $\mu^+\mu^-$ на $W^+(q\bar{q})W^-(\mu^-\nu_\mu)$ (фиолетовые гистограммы). Распределения получены после начальных отборов, но до основных отборов. Распределения для фонов нормированы на сечения, распределения для сигналов нормированы на 1000 событий. Зеленая гистограмма на рисунке (f) показывает сумму всех фоновых распределений при энергии 3 ТэВ после всех отборов

- $e^+e^- \rightarrow W^+(q\bar{q})e^-\nu_e$;
- $e^+e^- \rightarrow W^+(q\bar{q})W^-(e^-\nu_e)$;
- $e^+e^- \rightarrow W^+(q\bar{q})Z(q\bar{q})e^-\nu_e$;
- $e^+e^- \rightarrow W^+(q\bar{q})W^-(q\bar{q})e^+e^-$;
- $e^+e^- \rightarrow W^+(q\bar{q})Z(q\bar{q})W^-(e^-\nu_e)$;
- $\gamma^B e^- \rightarrow W^+(q\bar{q})W^-(q\bar{q})e^-$.

Фотоны, образующиеся в процессе излучения пучков (*beamstrahlung*), обозначаются как γ^B . На рисунке 3 показаны распределения введенных выше переменных для различных фонов при $\mu^+\mu^-$ -столкновениях с энергией 3 ТэВ. Соответствующие распределения при энергиях 1 и 10 ТэВ имеют схожую форму.

Как видно из рис. 3с, фоны только с одним W -бозоном сильно подавляются ограничением на $\cos(W_1 \vee W_2) < 0.8$. Фоны $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}e^-\nu_e$ с массой $M(q\bar{q}) > 120$ ГэВ, которые не происходят из распадов W -бозонов, имеют сечения в несколько фб еще до применения ограничений, что в результате дает вклад порядка 1 события или меньше. Сечение процесса $e^+e^- \rightarrow Z(jj)Z(jj)e^+e^-$ составляет около (1–3) фб при изученных энергиях СМ и вклад

от данного процесса меньше двух событий. Фоны $\gamma^B \mu^- \rightarrow W^+(q\bar{q})W^-(q\bar{q})\mu^-$ дают очень небольшой вклад из-за относительно большой массы мюона и кольцевых пучков. Фоны от $\gamma\gamma$ -столкновений подавляются ограничениями на массу M_{miss} . Фон от процесса $e^+e^- \rightarrow t\bar{t} \rightarrow W^+W^-b\bar{b}$ сильно подавлен ограничением $M(jj) < 120$ ГэВ.

Значения сечений и чисел событий после применения всех ограничений для фоновых каналов, полученные из сгенерированных наборов данных в Whizard, приведены в табл. 2. После всех отборов получены несущественные вклады для фонов а) и б), составляющие всего несколько событий. Таким образом, фоновыми каналами, содержащими только один векторный бозон, можно пренебречь. Сечение фона $\gamma e^- \rightarrow W^+(q\bar{q})W^-(q\bar{q})e^-$ зависит от параметров пучка и оценивается с большой неопределенностью. Однако количество событий в этом канале невелико и этим вкладом также можно пренебречь. Хотя факторы подавления фоновых каналов с), d), е) относительно небольшие, сечения этих фонов относительно невелики. Соответственно, распределение $M_{\Delta}(W\ell^-)$, содержащее все фоны, показывает относительно небольшое количество событий

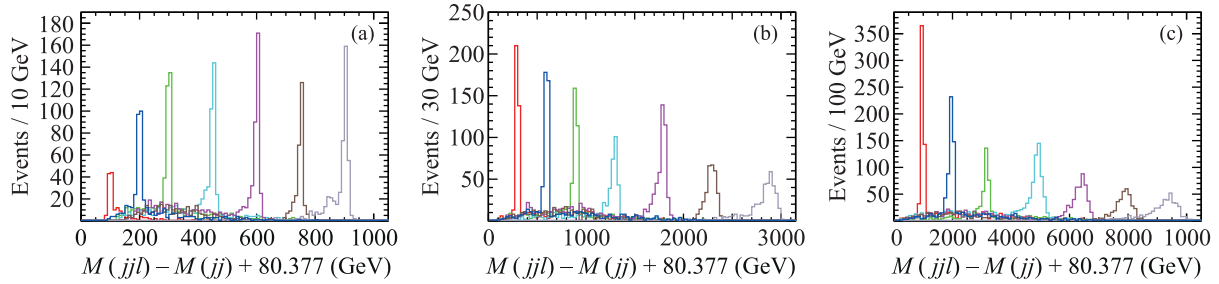


Рис. 4. (Цветной онлайн) Распределения по массе по переменной $M_{\Delta}(W\ell^{-})$ показаны для: (a) – столкновений $e^{+}e^{-}$ при энергии 1 ТэВ; (b) – столкновений $\mu^{+}\mu^{-}$ при 3 ТэВ и (c) – $\mu^{+}\mu^{-}$ -столкновений при 10 ТэВ. Сигналы для разных масс HNL показаны разными цветами. Включены две комбинации W -бозона и лептона, за исключением HNL с наибольшей массой, где берется только комбинация с большим значением импульса W . Значения смоделированных масс HNL приведены в табл. 3

(рис. 3f). Обе комбинации W -бозона и лептона входят в распределение $M_{\Delta}(W\ell^{-})$.

Таблица 2. Сечения (в фб), рассчитанные для исследованных фоновых каналов, и предполагаемое количество событий после всех отборов (указано в скобках). Ограничение $|\eta(\ell^{-})| < 2.6$ применяется на уровне генерации для первичных отрицательных лептонов

Энергия СМ, пучки	1 ТэВ	3 ТэВ	10 ТэВ
Конечное состояние	$e^{+}e^{-}$	$\mu^{+}\mu^{-}$	$\mu^{+}\mu^{-}$
$W^{+}(q\bar{q})\ell^{-}\nu_{\ell}$	939 (1)	575 (2)	151 (3)
$W^{+}(q\bar{q})W^{-}(\ell^{-}\nu_{\ell})$	3042 (1)	538 (1)	73.1 (0)
$W^{+}(q\bar{q})Z(q\bar{q})\ell^{-}\nu_{\ell}$	11.2 (66)	25.3 (26)	22.4 (73)
$W^{+}(q\bar{q})W^{-}(q\bar{q})\ell^{+}\ell^{-}$	29.6 (54)	69.5 (9)	51.7 (36)
$W^{+}(q\bar{q})Z(q\bar{q})W^{-}(\ell^{-}\nu_{\ell})$	57.7 (84)	34.5 (32)	10.1 (61)
$\gamma e^{-} \rightarrow W^{+}(q\bar{q})W^{-}(q\bar{q})e^{-}$	40.2 (1)	–	–

Е. Верхние пределы на параметры смешивания. Сигнальные события генерируются в CompHEP, предполагая три значения энергий СМ и разные массы HNL. Каждый набор данных содержит 1000 событий, при этом разрешены только распады $W \rightarrow q\bar{q}$. Реконструированные сигнальные события после всех ограничений показаны на рис. 4. Энергии СМ, массы HNL и число сигнальных событий для соответствующих значений масс приведены в табл. 3.

Для получения количества сигнальных событий массовые интервалы выбираются в соответствии с шириной сигнала. В каналах с электронным пучком массовые интервалы составляют ± 10 ГэВ, за исключением первого и последнего значений масс. В каналах с мюонными пучками интервал составляет $[0.94 - 1.03] \times M(N)$, за исключением первого и последнего значений массы. Интервалы для первого и последнего значений массы специально выбраны в соответствии с наблюдаемой шириной сигнала. Для оценки фона, лежащего под сигналом, определяет-

ся число фоновых событий, попадающих в такой же массовый интервал.

Была проверена эффективность восстановления сигнала для различных угловых распределений в распаде $N \rightarrow W^{\pm}\ell^{\mp}$. Сигнальные события генерировались в предположении равномерного и линейно зависимых распределений по $\cos(\theta_{\ell}^{*})$. Эффективности, полученные после всех ограничений, примерно одинаковы для всех вариантов и лежат внутри интервала $\pm 5\%$. Это соответствует тому факту, что аксептансы и эффективности реконструкции лептона и W -бозона, образующихся при распаде HNL, отличаются незначительно.

В результате были вычислены верхние пределы параметров смешивания $|V_{\ell N}|^2$ в зависимости от $M(N)$ (рис. 5). Верхние пределы были рассчитаны,

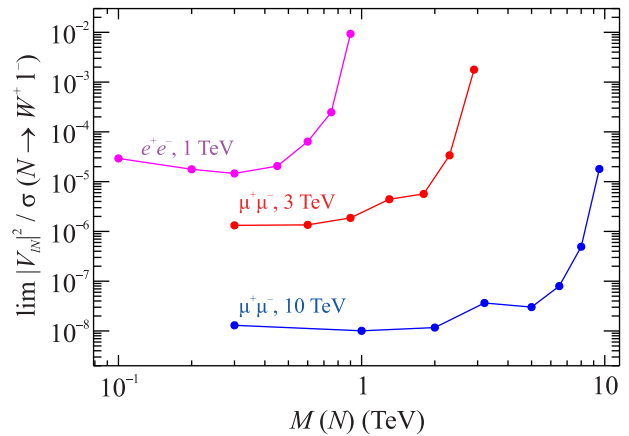


Рис. 5. (Цветной онлайн) Верхние пределы параметров смешивания $|V_{\ell N}|^2$ в зависимости от $M(N)$ для различных масс HNL, энергий СМ и пучков

предполагая, что превышение сигнала над фоном составляет 2σ , при этом число сигнальных событий не менее 8. Относительные вероятности распада

Таблица 3. Смоделированные массы HNL, сечения рождения, а также число сигнальных событий в выбранных промежутках значений масс, показанные при изучаемых энергиях в СМ и соответствующих пучках. Для каждого значения массы HNL генерируются выборки данных из 1000 событий, разрешены только распады $W \rightarrow q\bar{q}$

		1 ТэВ, e^+e^-							
$M(N)$, ГэВ		100	200	300	450	600	750	900	
σ , фб		2.28	2.12	1.78	1.06	0.31	0.11	0.002	
Число событий		79	208	268	251	268	203	283	
		3 ТэВ, $\mu^+\mu^-$							
$M(N)$, ГэВ		300	600	900	1300	1800	2300	2900	
σ , фб		12.4	10.9	9.33	5.85	2.33	0.53	0.01	
Число событий		322	358	303	254	400	295	297	
		10 ТэВ, $\mu^+\mu^-$							
$M(N)$, ГэВ		300	1000	2000	3200	5000	6500	8000	9500
σ , фб		118.4	113.5	107.8	90.1	42.8	18.6	3.99	0.1
Число событий		349	462	426	263	457	356	291	294

$Br(N \rightarrow W^+\ell^-)$ неизвестны и полученные верхние пределы нормированы на указанное значение. Следует отметить, что HNL потенциально может распадаться в каналах $N \rightarrow W^+e^-$ и $N \rightarrow W^+\mu^-$. При использовании в анализе обеих мод ожидается дополнительное подавление фона, вызванного подавлением процессов слияния бозонов, однако этот эффект невелик.

Как видно на рис. 5, верхние пределы, полученные для процесса $e^+e^- \rightarrow NW^\pm e^\mp$ при энергии 1 ТэВ, несколько хуже полученных для процесса $e^+e^- \rightarrow N\nu_e$ [11]. Однако верхние пределы для процесса $\mu^+\mu^- \rightarrow NW^\pm \mu^\mp$ сопоставимы при 3 ТэВ и превосходят процесс $\mu^+\mu^- \rightarrow N\nu_\mu$ [18] при энергии 10 ТэВ [18–20]. В указанных публикациях также показаны измеренные верхние пределы и оценки будущих верхних пределов на параметры смешивания ожидаемые на ЛНС.

IV. Заключение. Используя модельно-независимый подход к анализу лептонного сектора SM, расширенного майорановскими нейтрино, исследован процесс $\ell^+\ell^- \rightarrow NW^\pm \ell^\mp$ и получены верхние пределы на параметры смешивания $|V_{\ell N}|^2$ в зависимости от $M(N)$ для различных масс HNL, энергий и пучков СМ. Изученный процесс может обеспечить весьма конкурентноспособные значения верхних пределов, особенно при энергиях СМ в масштабах нескольких ТэВ.

Аналогичные процессы можно использовать для получения верхних пределов и в случае использования пучков одного знака, в частности в процессе $\mu^+\mu^+ \rightarrow NW^+\mu^+$. Для случая с пучками одного знака сечение сигнала и кинематика событий абсолютно такие же, как в процессе $\mu^+\mu^- \rightarrow NW^+\mu^-$, что приводит к одинаковому количеству сигнальных событий. Однако ожидается, что фон будет меньше, что

должно обеспечить несколько лучшие значения для верхних пределов параметров смешивания.

Мы благодарны А. Ф. Зарнецки и Д. Джинс за ценные комментарии.

Работа М. Д. поддержана грантом Российского научного фонда #22-12-00152.

1. A. M. Abdullahi, P. B. Alzah, B. Batell et al. (Collaboration), *J. Phys. G* **50**(2), 020501 (2023)(Contribution to: Proceedings of Snowmass 2021).
2. F. F. Deppisch, P. S. Bhupal Dev, and A. Pilaftsis, *New J. Phys.* **17**(7), 075019 (2015).
3. W. Rodejohann, *Int. J. Mod. Phys. E* **20**, 1833 (2011).
4. T. Asaka and T. Tsuyuki, *Phys. Rev. D* **92**(9), 094012 (2015).
5. G. Aad, B. Abbott, K. Abeling et al. (ATLAS collaboration), arXiv:2305.14931.
6. A. Tumasyan, W. Adam, J. W. Andrejkovic et al. (CMS collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **131**, 011803 (2023).
7. A. M. Sirunyan, A. Tumasyan, W. Adam et al. (CMS collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **120**, 221801 (2018).
8. B. Fuks, J. Neundorff, K. Peters, R. Ruiz, and M. Saimpert, *Phys. Rev. D* **103**(5), 055005 (2021).
9. F. del Aguila, J. A. Aguilar-Saavedra, and R. Pittau, *JHEP* **10**, 047 (2007).
10. J. L. Schubert and O. Ruchayskiy, arXiv:2210.11294.
11. K. Mękała, J. Reuter, and A. F. Żarnecki, *JHEP* **06**, 010 (2022).
12. F. Almeida Jr., Y. Coutinho, J. Martins Simoes, M. do Vale, and S. Wulck, *Eur. Phys. J. C* **22**, 277 (2001).
13. E. Boos, V. Bunichev, M. Dubinin et al. (CompHEP Collaboration), *Nucl. Instrum. Methods A* **534**, 250 (2004).

14. A. Pukhov, E. Boos, M. Dubinin, V. Edneral, V. Ilyin, D. Kovalenko, A. Kryukov, V. Savrin, S. Shichanin, and A. Semenov, arXiv:hep-ph/9908288.
15. A. Alloul, N. D. Christensen, C. Degrande, C. Duhr, and B. Fuks, *Comput. Phys. Commun.* **185**, 2250 (2014).
16. W. Kilian, T. Ohl, and J. Reuter, *Eur. Phys. J. C* **71**, 1742 (2011).
17. J. de Favereau, C. Delaere, P. Demin, A. Giammanco, V. Lemaitre, A. Mertens, and M. Selvaggi (DELPHES 3 Collaboration), *JHEP* **02**, 057 (2014).
18. K. Mękała, J. Reuter, and A. F. Żarnecki, *Phys. Lett. B* **841**, 137945 (2023).
19. T. H. Kwok, L. Li, T. Liu, and A. Rock, arXiv:2301.05177.
20. P. Li, Z. Liu, K. F. Lyu, arXiv:2301.07117.
21. J. Alwall, M. Herquet, F. Maltoni, O. Mattelaer, and T. Stelzer, *JHEP* **06**, 128 (2011).
22. T. Li, C. Y. Yao, and M. Yuan, arXiv:2306.17368.
23. H. Gu and K. Wang, *Phys. Rev. D* **106**, 015006 (2022).
24. A. Semenov, *Comput. Phys. Commun.* **180**, 431 (2009).
25. T. Sjostrand, S. Mrenna, and P. Skands, *J. High Energy Phys.* **05**, 026 (2006).
26. S. Banerjee, P. S. B. Dev, A. Ibarra, T. Mandal, and M. Mitra, *Phys. Rev. D* **92**, 075002 (2015).
27. J. L. Yang, C. H. Chang, and T. F. Feng, arXiv:2302.13247.
28. R. Jiang, T. Yang, S. Qian, Y. Ban, J. Li, Z. You, and Q. Li, arXiv:2304.04483.
29. J. Schechter and J. W. F. Valle, *Phys. Rev. D* **22**, 2227 (1980).
30. J. Casas and A. Ibarra, *Nucl. Phys. B* **618**, 171 (2001).
31. A. Ibarra, E. Molinaro, and S. Petcov, *JHEP* **09**, 108 (2010).
32. B. Pontecorvo, *Sov. Phys. JETP* **7**, 172 (1958).
33. Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, *Prog. Theor. Phys.* **28**, 870 (1962).
34. T. Asaka, S. Eijima, and H. Ishida, *JHEP* **04**, 011 (2011).
35. K. Bondarenko, A. Boyarsky, J. Klaric, O. Mikulenko, O. Ruchayskiy, V. Syvolap, and I. Timiryasov, *JHEP* **07**, 193 (2021).
36. S. Alekhin, W. Altmannshofer, T. Asaka et al. (Collaboration), *Rep. Prog. Phys.* **79**, 124201 (2016).
37. M. Drewes, arXiv:2210.17110.
38. E. Boos, M. Dubinin, A. Pukhov, M. Sachwitz, and H. J. Schreiber, *Eur. Phys. J. C* **21**, 81 (2001).