

Моделирование волновой турбулентности поверхности жидкости на основе метода динамических конформных преобразований

Е. А. Кочурин¹⁾

Институт электрофизики Уральского отделения РАН, 620016 Екатеринбург, Россия

Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия

Поступила в редакцию 3 ноября 2023 г.

После переработки 13 ноября 2023 г.

Принята к публикации 14 ноября 2023 г.

В работе впервые обобщен метод динамических конформных преобразований для численного моделирования волновой капиллярной турбулентности поверхности жидкости в плоско-симметричной анизотропной геометрии. Модель является сильно нелинейной и учитывает эффекты поверхностного натяжения, а также диссипации и накачки энергии. Результаты моделирования показывают, что система нелинейных капиллярных волн может переходить в режим квазистационарного хаотического движения (волновая турбулентность). Вычисленные показатели спектров не совпадают с классическим спектром Захарова–Филоненко для изотропной капиллярной турбулентности, но хорошо согласуются с оценкой, полученной в предположении о доминирующем влиянии резонансных пятиволновых взаимодействий.

DOI: 10.31857/S1234567823240047, EDN: nlpieg

Введение. Хорошо известно, что нелинейные волновые системы могут переходить в квазистационарное хаотическое состояние (режим волновой турбулентности) в результате резонансных волновых взаимодействий [1]. Явление волновой турбулентности может возникнуть в произвольной нелинейной волновой системе. Так, например, известна оптическая турбулентность [2], магнито- и электрогидродинамическая волновая турбулентность [3–7], акустическая турбулентность [8–10] и турбулентность дисперсионных капиллярных и гравитационных волн на свободной поверхности жидкости [11–13]. В работах Захарова и соавторов [11, 8] были впервые получены точные решения кинетических уравнений для функции распределения квазичастиц-волн, описывающие стационарный перенос энергии (или других интегралов движения) вдоль различных масштабов. Такие решения получили название спектров турбулентности Колмогорова–Захарова по аналогии с классической гидродинамической турбулентностью [1].

В настоящий момент времени спектр изотропной капиллярной турбулентности на поверхности жидкости (также известный как спектр Захарова–Филоненко [11]) подтвержден с высокой точностью как экспериментально [14, 15], так и численно [16–18]. Спектр Захарова–Филоненко обычно записывается в терминах Фурье спектров функции $\eta(\mathbf{r}, t)$, определя-

ющей форму поверхности жидкости, $S_\eta(k) = |\eta_{\mathbf{k}}|^2$ и $S_\eta(\omega) = |\eta_\omega|^2$:

$$S_\eta(\omega) = C_{3w}^\omega P^{1/2} (\sigma/\rho)^{1/6} \omega^{-17/6},$$

$$S_\eta(k) = C_{3w}^k P^{1/2} (\sigma/\rho)^{-3/4} k^{-15/4}, \quad k = |\mathbf{k}|, \quad (1)$$

где \mathbf{k} – волновой вектор, ω – угловая частота, C_{3w}^k и C_{3w}^ω – безразмерные константы, P – скорость диссипации энергии на единицу площади поверхности, σ и ρ – поверхностное натяжение и массовая плотность жидкости, соответственно. Пространственный и частотный спектры (1) связаны между собой законом сохранения энергии в пространстве Фурье, т.е. $S_\eta(k)d\mathbf{k} = S_\eta(\omega)d\omega$. Степенная зависимость от P в спектрах (1) с показателем степени 1/2 отражает резонансный характер трехволновых взаимодействий:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad (2)$$

где ω связана с волновым числом k законом дисперсии, $\omega = (\sigma/\rho)^{1/2} k^{3/2}$.

Таким образом, справедливость спектра (1) для описания изотропной капиллярной турбулентности в настоящее время не подлежит сомнению. Ситуация меняется в случае анизотропных возмущений поверхности, когда рассматриваемые волны распространяются в одном направлении, т.е. являются коллинеарными. В такой ситуации условия трехволнового резонансного взаимодействия (2) перестают выполняться. Турбулентность коллинеарных ка-

¹⁾e-mail: kochurin@iep.uran.ru

пиллярных волн впервые была исследована численно на основе слабо нелинейной модели в [19]. В работе были обнаружены лишь тривиальные трех- и четырехволновые резонансные взаимодействия. Тривиальные волновые резонансы не приводят к переносу энергии по масштабам. Таким образом, механизм развития капиллярной турбулентности в плоско-симметричной геометрии до сих пор не ясен. Экспериментальное исследование [20], проведенное для коллинеарных волн на поверхности ртути, свидетельствует о доминирующем влиянии пятиволновых резонансных взаимодействий, соответствующих четвертому порядку нелинейности. Для резонансов такого высокого порядка условия взаимодействия волн всегда могут быть выполнены. На основе размерного анализа спектров слабой турбулентности (см. [21]) авторы предложили оценки для спектра капиллярной волновой турбулентности в квази-одномерной геометрии:

$$\begin{aligned} S_\eta(\omega) &= C_{5w}^\omega P^{1/4} (\sigma/\rho)^{5/12} \omega^{-31/12}, \\ S_\eta(k) &= C_{5w}^k P^{1/4} (\sigma/\rho)^{-3/8} k^{-27/8}, \end{aligned} \quad (3)$$

где C_{5w}^k и C_{5w}^ω – соответствующие безразмерные константы. Стоит отметить, что в работе [22] получены аналогичные спектры турбулентности для плоских гравитационных волн. Полной теории слабой турбулентности коллинеарных капиллярных волн до сих пор не предложено. Экспериментальные результаты [20] с высокой точностью согласуются с аналитическими спектрами (3). Целью настоящего исследования является изучение возможности реализации спектров (3) при прямом численном моделировании турбулентности капиллярных волн.

Наибольшую трудность при исследовании плоско-симметричной капиллярной турбулентности представляет необходимость учета нелинейных эффектов высокого порядка. Стандартным подходом к изучению волновой турбулентности является рассмотрение слабо нелинейных уравнений движения [23–25]. Для корректного описания пятиволновых взаимодействий необходимо точно решить систему уравнений четвертого порядка нелинейности. Понятно, что численное моделирование такой системы является достаточно сложной задачей. По этой причине в настоящей работе мы будем использовать полностью нелинейный подход. Анализ будет основан на методе нестационарного конформного преобразования, при котором область, занимаемая жидкостью, преобразуется в полупространство, см. [26–31]. Принципиальным преимуществом метода является сведение исходной пространственно-двумерной задачи к одномерной системе уравнений,

непосредственно описывающей движение границы жидкости. Метод конформного преобразования оказался очень удобным для описания нелинейных волн на свободных границах жидкостей, см., например, [32–40]. Следует отметить, что метод динамических конформных преобразований до сих пор не использовался для описания волновой турбулентности свободной поверхности жидкости.

Модельные уравнения. Рассмотрим сильно нелинейную динамику идеальной несжимаемой глубокой жидкости со свободной поверхностью. Движение жидкости считается плоско-симметричным, т.е. полная физическая модель является двумерной. Введем декартову систему координат $\{x, y\}$, так чтобы уравнение $y = \eta(x, t)$ определяло отклонение свободной поверхности от невозмущенного состояния $y = 0$. Потенциал скорости жидкости $\phi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\phi = 0.$$

На границе жидкости $y = \eta(x, t)$ выполняются динамическое и кинематическое граничные условия:

$$\phi_t + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 = -g\eta + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{3/2}}, \quad (4)$$

$$\eta_t + \eta_x \phi_x = \phi_y, \quad (5)$$

где $\nabla = \{\partial_x, \partial_y\}$, g – ускорение свободного падения. На глубине движение жидкости затухает, т.е. $\phi \rightarrow 0$ при $y \rightarrow -\infty$. Полная энергия системы (гамильтониан) имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \iint_{y \leq \eta} |\nabla\phi|^2 dx dy + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{g}{2} \eta^2 + \frac{\sigma}{\rho} \left(\sqrt{1 + \eta_x^2} - 1 \right) \right] dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Систему уравнений (4) и (5) можно переписать, используя вариационное дифференцирование гамильтониана, см. [11]:

$$\eta_t = \delta H / \delta \psi, \quad \psi_t = -\delta H / \delta \eta,$$

где функции $\eta(x, t)$ и $\psi = \phi(x, y = \eta, t)$ – канонически сопряженные переменные. Записанная система уравнений описывает полностью нелинейную эволюцию капиллярно-гравитационных волн на свободной поверхности жидкости. Минимальная фазовая скорость линейных капиллярно-гравитационных волн достигается на длине волны $\lambda_0 = 2\pi(\sigma/g\rho)^{1/2}$ с периодом $t_0 = 2\pi(\sigma/g^3\rho)^{1/4}$. Далее в работе будет

рассмотрена динамика мелкомасштабных капиллярных волн с волновыми числами $k \gg 2\pi/\lambda_0$, т.е. эффектом силы тяжести будем пренебрегать. Перейдем также к безразмерным переменным, положив $\sigma = 1$, $\rho = 1$. В линейном приближении описанная система сводится к дисперсионному соотношению:

$$\omega_k = k^{3/2}. \tag{7}$$

Совершим теперь конформное преобразование области, занимаемой жидкостью, в полуплоскость новых конформных переменных $\{u, v\}$. Поверхность жидкости соответствует линии $v = 0$:

$$y = Y(u, t), \quad \psi = \Psi(u, t), \quad X = u - \hat{H}Y(u, t).$$

Здесь \hat{H} – преобразование Гильберта, определяемое в Фурье пространстве как $\hat{H}f_k = i \cdot \text{sign}(k)f_k$. Профиль свободной поверхности определяется в параметрическом виде: $\eta(x, t) = Y(X(u, t), t)$. К настоящему моменту времени процедура получения уравнений движения жидкости в конформных переменных хорошо известна, см. [26–28], поэтому мы просто выпишем уравнения движения, добавив слагаемые, ответственные за влияние диссипации и накачки энергии:

$$Y_t = \left(Y_u \hat{H} - X_u \right) \frac{\hat{H}\Psi_u}{J} - \hat{\gamma}_k Y, \tag{8}$$

$$\Psi_t = \frac{(\hat{H}\Psi_u)^2 - \Psi_u^2}{2J} + \hat{H} \left(\frac{\hat{H}\Psi_u}{J} \right) \Psi_u + \frac{X_u Y_{uu} - Y_u X_{uu}}{J^{3/2}} + \mathcal{F}(\mathbf{k}, t) - \hat{\gamma}_k \Psi, \tag{9}$$

где $J = X_u^2 + Y_u^2$ – якобиан преобразования, $\hat{\gamma}_k$ – оператор вязкости, $\mathcal{F}(\mathbf{k}, t)$ – случайная вынуждающая сила, действующая на больших масштабах. Слагаемые, ответственные за влияние диссипации и накачки энергии, определяются в Фурье пространстве следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_k &= 0, \quad k \leq k_d, \\ \hat{\gamma}_k &= \gamma_0(k - k_d)^4, \quad k > k_d, \\ \mathcal{F}(\mathbf{k}, t) &= F(k) \cdot \exp[iR(\mathbf{k}, t)], \\ F(k) &= F_0 \cdot \exp[-(k - k_1)^4/k_2], \quad k \leq k_2, \\ F(k) &= 0, \quad k > k_2. \end{aligned}$$

Здесь $R(\mathbf{k}, t)$ – случайные числа, равномерно распределенные в интервале $[0, 2\pi]$, γ_0 и F_0 – константы. Величина k_1 определяет волновое число, на котором достигается максимальная амплитуда накачки, k_2 задает ее ширину, а k_d соответствует масштабу, при котором происходит диссипация. Четвертая степень по k в операторе вязкости взята по аналогии с [34]. В

терминах конформных переменных полная энергия системы (6) переписывается как

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\Psi \hat{H}\Psi_u + 2(J^{1/2} - X_u) \right] du. \tag{10}$$

Первое слагаемое в подынтегральном выражении (10) соответствует кинетической энергии системы, а второе определяет потенциальную энергию поверхностных капиллярных волн. В случае бесконечно малой амплитуды поверхностных волн и отсутствия накачки и диссипации энергии уравнения (8) и (9) переходят в дисперсионное соотношение (7). Соответствующие величины преобразуются как $u \rightarrow x$, $Y \rightarrow \eta(x, t)$ и $\Psi \rightarrow \psi(x, t)$ в линейном приближении.

Результаты моделирования. Целью настоящей работы является численное решение системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (8) и (9). Дифференциальные и интегральные операторы будут рассчитываться на основе спектральных методов с полным числом Фурье-гармоник N , т.е. граничные условия будут периодическими. Интегрирование по времени будет осуществляться явным методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности с шагом dt . Все расчеты, представленные в работе, выполнены в периодической области длиной $L = 2\pi$ со следующими параметрами: $dt = 2.5 \cdot 10^{-6}$, $N = 8192$, $\gamma_0 = 10^{-6}$, $k_d = 750$, $F_0 = 10^5/N$, $k_1 = 3$, $k_2 = 7$. Для подавления эффекта элайзинга мы используем фильтр низких частот, обнуляющий высшие гармоники с $k \geq N/3$ на каждом шаге интегрирования по времени.

На рисунке 1 показана эволюция полной энергии системы (10) при заданных параметрах расчета. Действительно, можно видеть, что под действием внешней хаотической силы энергия растет до некоторого значения, вблизи которого далее совершает достаточно сложные осцилляции. Среднее значение энергии в режиме квазистационарного движения (волновой турбулентности) составило $\langle H \rangle_t \approx 1$. Плотность вероятности (PDF – *probability density function*) для амплитуды поверхности, измеренная в стационарном состоянии, показана на вставке к рис. 1. Видно, что функция плотности вероятности оказалась очень близкой к нормальному распределению Гаусса, показанному красной пунктирной линией. Этот факт свидетельствует о развитом характере наблюдаемой капиллярной турбулентности на поверхности жидкости.

В квазистационарном состоянии движение жидкости приобретает сложный хаотический характер, см. рис. 2. На этом рисунке показана форма поверх-

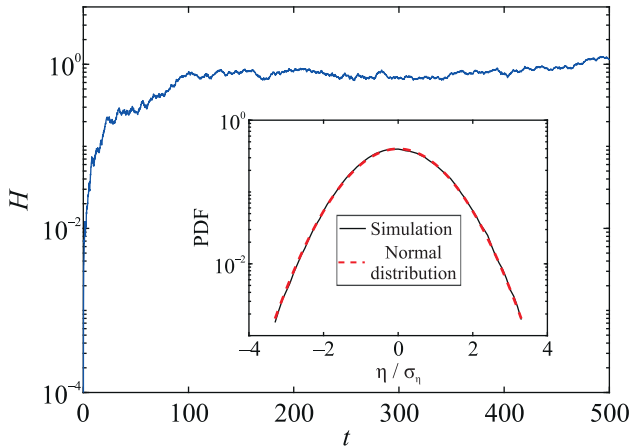


Рис. 1. (Цветной онлайн) Временная зависимость полной энергии системы (10). На вставке показана плотность вероятности (PDF) для амплитуд поверхности, измеренных относительно среднеквадратичного отклонения σ_η , красная пунктирная линия соответствует нормальному распределению Гаусса

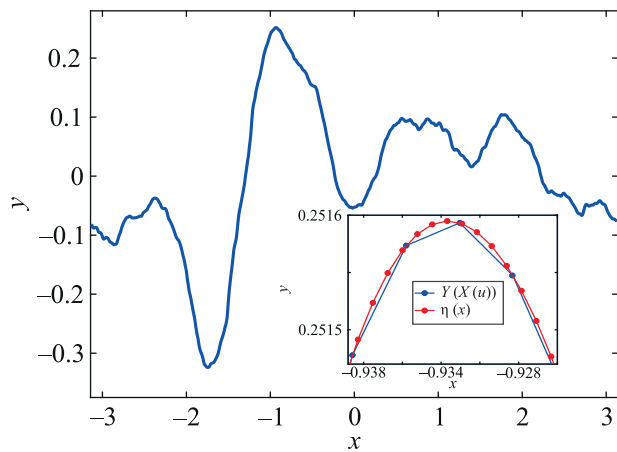


Рис. 2. (Цветной онлайн) Форма поверхности жидкости в некоторый момент квазистационарного состояния, $t = 410$. На вставке показана граница жидкости в области $x \in [-0.938, -0.928]$, синяя линия соответствует функции $Y(X)$, вычисленной из уравнений (8) и (9), красная линия показывает результат интерполяции на однородной сетке

ности жидкости в некоторый момент времени квазистационарного состояния. Видно, что граница приобретает довольно сложную нерегулярную форму. Усредненное по времени значение крутизны волн в квазистационарном состоянии оценивается как

$$\epsilon = \left\langle \sqrt{\frac{1}{L} \int |\eta(x, t)_x|^2 dx} \right\rangle_t \simeq 0.3,$$

что достаточно мало относительно единицы. При такой крутизне на поверхности жидкости не наблю-

даются сильно нелинейные структуры типа струй, капель и пузырьков [41]. Таким образом, под действием внешней силы (энергетической накачки) система нелинейных коллинеарных капиллярных волн может переходить в квазистационарное хаотическое состояние.

Главный вопрос настоящего исследования состоит в том, какой спектр турбулентности демонстрирует система на развитой стадии эволюции. Спектры турбулентности (1) и (3) в принципе могут быть применимы для функции $Y(u, t)$, вычисляемой из уравнений (8) и (9), поскольку для нее также справедливо дисперсионное соотношение (7). В то же время, сама по себе зависимость $Y = Y(u, t)$ не имеет прямого физического смысла, так как она в сущности описывает динамику возмущений координат $\{X, Y\}$ в конформном пространстве. Для полного описания турбулентности необходимо в явном виде выразить значение формы поверхности $\eta(x, t)$ на однородной сетке горизонтальной оси x . Параметрическая зависимость $Y(X_i)$, полученная из уравнений (8) и (9), определена в узлах i вычисленной неоднородной сетки $X_i(u, t)$. Для получения явной зависимости $y = \eta(x, t)$ необходимо интерполировать значения функции $Y(X(u))$ в новых узлах j с фиксированным шагом $dx = X_{j+1} - X_j$. В качестве интерполирующей процедуры мы воспользуемся кубическими сплайнами. Насколько нам известно, такой метод ранее не применялся для анализа расчетов на основе динамических конформных преобразований. Результат интерполяции показан во вставке к рис. 2. Видно, что процедура восстанавливает профиль с высокой точностью. Средняя ошибка в оценке потенциальной энергии капиллярных волн по формулам (6) и (10) составила порядка 10^{-4} . Такая высокая точность достигается за счет большой плотности сетки и отсутствию сильно нелинейных структур, при которых функция $Y(X(u))$ перестает быть взаимно однозначной.

На рисунке 3 показан усредненный по времени пространственный спектр поверхности $S_\eta(k) = \langle |\eta_k|^2 \rangle_t$ в режиме квазистационарного движения. Видно, что спектр поверхностных возмущений приобретает степенное распределение в интервале волновых чисел $k \in [10, 150]$. Показатель спектра заметно отличается от классического спектра Захарова–Филоненко (1), полученного в предположении о доминирующем характере трехволновых резонансных взаимодействий в изотропной геометрии. В то же время оценка (3), полученная в предположении о доминирующем характере пятиволновых резонансных взаимодействий, существенно лучше описыва-

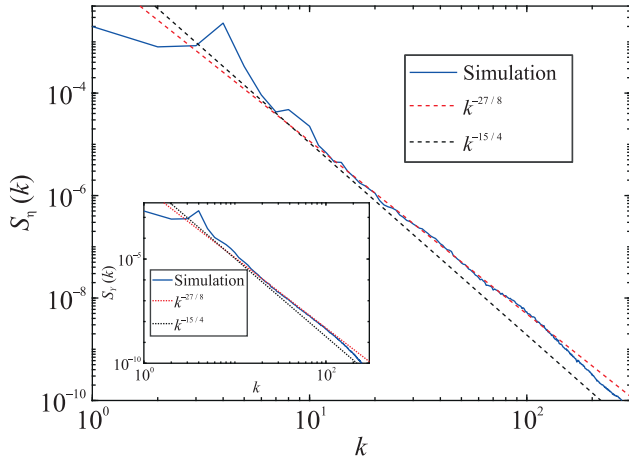


Рис. 3. (Цветной онлайн) Усредненный по времени пространственный спектр возмущений поверхности. Черная пунктирная линия соответствует спектру Захарова–Филоненко (1), красная пунктирная линия описывает спектр турбулентности (3). На вставке показан пространственный спектр функции $Y(u, t)$

ет данные численного моделирования. Спектр турбулентности для функции $Y(u, t)$ показан во вставке к рис. 3. Видно, что спектр $S_Y(k) = \langle |Y_k|^2 \rangle_t$ также хорошо согласуется с выражением (3).

Для анализа возможного влияния когерентных структур (например, солитонов или связанных волн [42]) на эволюцию поверхности на рис. 4 показано пространственно-временное преобразование Фурье

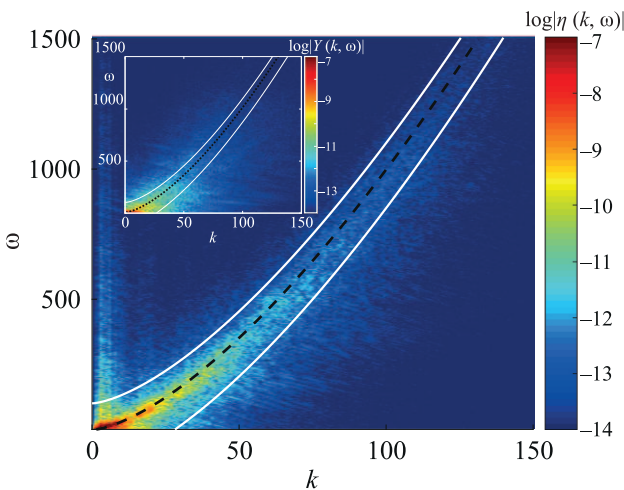


Рис. 4. (Цветной онлайн) Пространственно-временное преобразование Фурье $|\eta(k, \omega)|$ в логарифмическом масштабе. Черная пунктирная линия показывает точное дисперсионное соотношение (7), белые сплошные линии соответствуют нелинейному уширению частоты. На вставке показано преобразование Фурье для функции $Y(u, t)$

рье формы поверхности. Можно видеть, что возмущения присутствуют во всем интервале волновых чисел. Фурье-гармоники достаточно узко распределены вдоль дисперсионного соотношения (7). Влияния каких-либо сильно нелинейных структур не обнаруживается. На рисунке 4 заметно только уширение частот, возникающее вследствие нелинейных эффектов (зависимости скорости волн от амплитуды). Интересно отметить, что эффект уширения частот более заметен для спектра $|Y(k, \omega)|$, показанного во вставке к рис. 4. Среднее уширение частоты для каждого k можно вычислить по формуле [9]:

$$\delta_\omega(k) = \left[\frac{\int_0^\infty (\omega - \omega_k)^2 |\eta(k, \omega)|^2 d\omega}{\int_0^\infty |\eta(k, \omega)|^2 d\omega} \right]^{1/2},$$

где ω_k определяется из дисперсионного соотношения (7). Фактически величина δ_ω определяет характерное нелинейное время $\tau_{NL} = 1/\delta_\omega$, являющееся важным параметром в теории слабой турбулентности [1]. Критерием применимости этой теории является условие: $\tau_L/\tau_{NL} \ll 1$, где $\tau_L = 1/\omega_k$ – время, определяемое из линейного дисперсионного соотношения. Вычисленное соотношение τ_L/τ_{NL} для функций η и Y показано на рис. 5. Можно видеть, что уширение

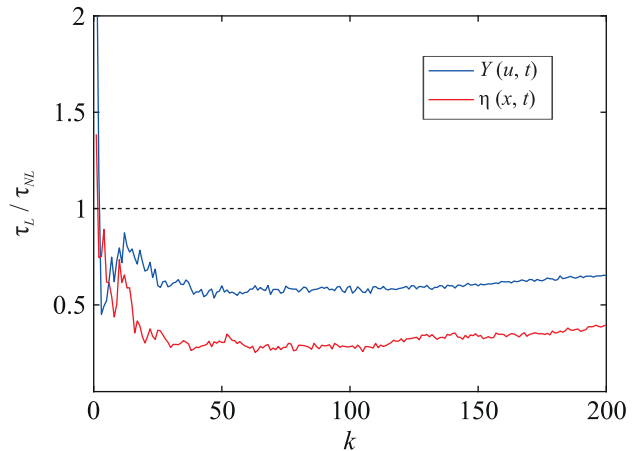


Рис. 5. (Цветной онлайн) Отношение линейного к нелинейному времени τ_L/τ_{NL} , вычисленное для функций $\eta(x, t)$ и $Y(u, t)$

частот действительно больше для функции $Y(u, t)$. Для восстановленной зависимости $\eta(x, t)$ параметр τ_L/τ_{NL} оказывается меньше единицы почти на порядок. Таким образом, сравнение характерных времен свидетельствует о слабо нелинейном характере эволюции системы.

Закключение. В настоящей работе предложена новая модель для прямого численного моделирования волновой турбулентности, возникающей на сво-

бодной поверхности жидкости. Вычислительная модель является полностью нелинейной и учитывает эффекты поверхностного натяжения, накачки и диссипации энергии. Результаты моделирования показывают, что система взаимодействующих нелинейных капиллярных волн может переходить в квазистационарное состояние, когда действие внешней силы полностью компенсируется диссипативными эффектами. В этом режиме движение жидкости приобретает сложный и нерегулярный характер, а плотность вероятности амплитуды границы становится близкой к нормальному распределению Гаусса. Измеренный спектр поверхностных возмущений в квазистационарном состоянии приобретает степенную зависимость с показателем, близким к аналитическому спектру, полученному в предположении о доминирующем влиянии резонансных пятиволновых взаимодействий в анизотропной плоско-симметричной геометрии. Анализ пространственно-временного преобразования Фурье также свидетельствует о слабо нелинейном характере эволюции волн. Следует также отметить, что численные результаты хорошо согласуются с экспериментальными исследованиями, проведенными для жидкой ртути [20].

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект # 19-72-30028.

1. V. E. Zakharov, G. Falkovich, and V. S. L'vov, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence*, Springer-Verlag, Berlin (1992).
2. A. Picozzi, J. Garnier, T. Hansson, P. Suret, S. Randoux, G. Millot, and D. N. Christodoulides, *Phys. Rep.* **542**(1), 1 (2014).
3. S. Galtier, *J. Phys. A Math. Theor.* **51**(29), 293001 (2018).
4. S. Galtier, S. V. Nazarenko, A. C. Newell, and A. Pouquet, *J. Plasma Phys.* **63**(5), 447 (2000).
5. E. Kochurin, G. Ricard, N. Zubarev, and E. Falcon, *Phys. Rev. E* **105**(6), L063101 (2022).
6. S. Dorbolo and E. Falcon, *Phys. Rev. E* **83**(4), 046303 (2011).
7. I. A. Dmitriev, E. A. Kochurin, and N. M. Zubarev, *IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul.* **304**, 1408 (2023).
8. В. Е. Захаров, Р. З. Сагдеев, Докл. АН СССР **192**(2), 297 (1970) [V. E. Zakharov and R. Z. Sagdeev, *Sov. Phys. Dokl.* **15**, 439 (1970)].
9. A. Griffin, G. Krstulovic, V. S. L'vov, and S. Nazarenko, *Phys. Rev. Lett.* **128**, 224501 (2022).
10. Е. А. Кочурин, Е. А. Кузнецов, Письма в ЖЭТФ **116**(12), 830 (2022) [E. A. Kochurin and E. A. Kuznetsov, *JETP Lett.* **116**(12), 863 (2022)].
11. В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко, ПМТФ **8**(6), 62 (1967) [V. E. Zakharov and N. N. Filonenko, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **8**, 37 (1967)].
12. A. O. Korotkevich, *Phys. Rev. Lett.* **130**(26), 264002 (2023).
13. Z. Zhang and Y. Pan, *Phys. Rev. E* **106**(4), 044213 (2022).
14. G. V. Kolmakov, M. Y. Brazhnikov, A. A. Levchenko, L. V. Abdurakhimov, P. V. E. McClintock, and L. P. Mezhev-Deglin, *Prog. Low Temp. Phys.* **16**, 305 (2009).
15. E. Falcon and N. Mordant, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **54**, 1 (2022).
16. A. N. Pushkarev and V. E. Zakharov, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3320 (1996).
17. L. Deike, D. Fuster, M. Berhanu, and E. Falcon, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 234501 (2014).
18. Y. Pan and D. K. P. Yue, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 094501 (2014).
19. E. Kochurin, G. Ricard, N. Zubarev, and E. Falcon, *Pis'ma v ZhETF* **112**(12), 799 (2020) [E. Kochurin, G. Ricard, N. Zubarev, and E. Falcon, *JETP Lett.* **112**(12), 757 (2020)].
20. G. Ricard and E. Falcon, *Europhys. Lett.* **135**(6), 64001 (2021).
21. S. Nazarenko, *Wave turbulence*, Springer-Verlag, Berlin (2011), v. 825.
22. A. Dyachenko, Y. Lvov, and V. E. Zakharov, *Physica D* **87**, 233 (1995).
23. A. O. Korotkevich, A. I. Dyachenko, and V. E. Zakharov, *Physica D* **321**, 51 (2016).
24. A. C. Newell and B. Rumpf, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **43**, 59 (2011).
25. S. Walton and M. B. Tran, *SIAM J. Sci. Comput.* **45**(4), B467 (2023).
26. L. V. Ovsjannikov, *Arch. Mech.* **26**, 6 (1974).
27. A. I. Dyachenko, E. A. Kuznetsov, M. Spector, and V. E. Zakharov, *Phys. Lett. A* **221**, 736 (1996).
28. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, *Eur. J. Mech. B Fluids* **21**, 283 (2002).
29. S. Tanveer, *Proc. R. Soc. A: Math. Phys. Sci.* **435**(1893), 137 (1991).
30. S. Tanveer, *Proc. R. Soc. A: Math. Phys. Sci.* **441**(1913), 501 (1993).
31. S. A. Dyachenko, *Stud. Appl. Math.* **148**(1), 125 (2022).
32. В. П. Рубан, ЖЭТФ **157**(5), 944 (2020) [V. P. Ruban, *JETP* **130**, 797 (2020)].
33. S. Dyachenko and A. C. Newell, *Stud. Appl. Math.* **137**, 199 (2016).
34. А. О. Короткевич, А. О. Прокофьев, В. Е. Захаров, Письма в ЖЭТФ **109**(5), 312 (2019) [A. O. Korotkevich, A. Prokofiev, and V. E. Zakharov, *JETP Lett.* **109**, 309 (2019)].

35. A. Nachbin, *Physica D* **445**, 133646 (2023).
36. T. Gao, A. Doak, J. M. Vanden-Broeck, and Z. Wang, *Eur. J. Mech. B Fluids* **77**, 98 (2019).
37. M. V. Flamarion, T. Gao, R. Ribeiro-Jr, and A. Doak, *Phys. Fluids* **34**, 127119 (2022).
38. Е. А. Кочурин, *ПМТФ* **59**(1), 91 (2018) [Е. А. Kochurin, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **59**, 79 (2018)].
39. S. Murashige and W. Choi, *J. Comput. Phys.* **328**, 234 (2017).
40. J. Shelton, P. Milewski, and P. H. Trinh, *J. Fluid Mech.* **972**, R6 (2023).
41. L. Kayal, S. Basak, and R. Dasgupta, *J. Fluid Mech.* **951**, A26 (2022).
42. E. Herbert, N. Mordant, and E. Falcon, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 144502 (2010).