

Топологический переход в спектре магнонов скирмионного кристалла

В. Е. Тимофеев^{+*1)}, Ю. В. Барамыгина⁺, Д. Н. Аристов⁺*

⁺НИИЦ “Курчатовский институт”, Петербургский институт ядерной физики, 188300 Гатчина, Россия

^{*}Санкт-Петербургский государственный университет, 199034 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 6 ноября 2023 г.

После переработки 13 ноября 2023 г.

Принята к публикации 14 ноября 2023 г.

Исследуется спектр магнонов скирмионного кристалла, образующегося в тонких ферромагнитных пленках с взаимодействием Дзялошинского–Мории в присутствии магнитного поля. В подходе стереографической проекции построена теория для двух низкоэнергетических магнонных мод, наблюдаемых экспериментально; в рамках построенной теории демонстрируется топологический переход в спектре. С ростом магнитного поля щель между двумя исследуемыми ветками спектра закрывается, что сопровождается сменой топологических характеристик обеих зон. Такое закрытие щели, в случае подтверждения в экспериментах по магнитному резонансу, приведет к изменениям в холловской теплопроводности и заслуживает дальнейшего изучения.

DOI: 10.31857/S1234567823240072, EDN: nlxbtn

Введение. Магнитные скирмионы являются топологически нетривиальными вихрями локальной намагниченности. В настоящее время они обсуждаются в контексте развития новых устройств памяти [1] и нетрадиционных вычислительных технологий [2]. Помимо практического интереса, тема магнитных скирмионов поднимает также ряд вопросов фундаментального характера.

Одним из активно исследуемых направлений является изучение изолированных метастабильных скирмионов с большим временем жизни [3]. Однако, в широком спектре материалов магнитные скирмионы упорядочиваются в решетки [4], так называемые скирмионные кристаллы (СкК) [5], и это открывает еще одно интересное направление для применения в магнонике [6].

Магнитные скирмионы в тонких ферромагнитных пленках были обнаружены Белавиным и Поляковым как метастабильные конфигурации локальной намагниченности [7]. С тех пор были предложены различные механизмы стабилизации скирмионов, одним из которых является взаимодействие Дзялошинского–Мории (ДМ) [8, 9]. Взаимодействие ДМ возникает в нецентросимметричных киральных магнетиках, например, в соединении MnSi со структурой типа B20, где впервые были обнаружены магнитные скирмионы в форме СкК [10].

Внутренняя динамика изолированных скирмионов достаточно сложна сама по себе [11, 12], а упорядочение скирмионов в решетки приводит к еще более сложной зонной структуре возбуждений СкК [6, 13, 14]. Кроме топологически тривиальной голдстоуновской моды [15, 16], существуют другие низкоэнергетические моды, которые могут обладать ненулевыми числами Черна [13]. Известно, что нетривиальная топология магнонных зон может приводить к возникновению краевых состояний [13, 17, 18], или холловского теплового транспорта [19, 20].

Используя метод стереографической проекции, в [14] была исследована зонная структура низкоэнергетических магнонов. Недавно был также разработан специальный подход для рассмотрения гиротропной моды в СкК [16]. В настоящей работе этот подход обобщается на случай двух вышележащих зон, наблюдаемых в экспериментах по магнитному резонансу. В согласии с численными результатами, представленными в [17], мы показываем топологический переход, происходящий при некотором промежуточном значении поля внутри области стабильности фазы СкК.

Модель. Рассматривается модель плоского ферромагнетика в присутствии взаимодействия ДМ и внешнего однородного магнитного поля, перпендикулярного плоскости. Плотность энергии дается выражением

$$\mathcal{E} = \frac{C}{2} \partial_\mu S_i \partial_\mu S_i - D \epsilon_{\mu ij} S_i \partial_\mu S_j - B S_3, \quad (1)$$

¹⁾e-mail: viktor.timofeev@spbu.ru

где C – параметр обменного взаимодействия, D – константа взаимодействия ДМ, а B – величина магнитного поля. Удобно определить единицы длины как $l = C/D$, а плотность энергии измерять в единицах $CS^2l^{-2} = S^2D^2/C$. В этом случае энергия, \mathcal{E} , будет зависеть только от безразмерного параметра $b = BC/SD^2$. В пределе низких температур, рассматриваемом в этой работе, локальная намагниченность насыщается до своего максимального значения, S , и $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$, где $|\mathbf{n}| = 1$. Эта плоская модель также применима к тонким пленкам в случае, если их толщина не превышает величины l . Мы игнорируем магнитное дипольное взаимодействие, поскольку в геометрии тонких пленок оно сводится к одноосной анизотропии и может привести лишь в незначительным изменениям параметров СкК.

Для изучения динамики локальной намагниченности мы используем лагранжиан, $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{E}$, с кинетическим слагаемым [21]

$$\mathcal{T} = \frac{S}{\gamma_0}(1 - \cos\theta)\dot{\varphi}, \quad (2)$$

здесь φ и θ – углы, определяющие направление намагниченности $\mathbf{n} = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$, а γ_0 – гиромагнитное отношение. Такой вид лагранжиана приводит к хорошо известному уравнению Ландау–Лифшица. В дальнейшем мы включаем множитель S/γ_0 в единицы измерения времени.

Мы используем метод стереографической проекции, представляя компоненты вектора \mathbf{n} в следующем виде

$$n_1 + in_2 = \frac{2f}{1 + f\bar{f}}, \quad n_3 = \frac{1 - f\bar{f}}{1 + f\bar{f}}, \quad (3)$$

где f – комплекснозначная функция, а \bar{f} – комплексно сопряженная к ней. Мы предлагаем описывать одиночный скирмион с помощью следующей стереографической функции

$$f_1 = \frac{iz_0 \kappa(z\bar{z}/z_0^2)}{\bar{z}}, \quad (4)$$

где $z = x + iy$, κ – гладкая вещественнозначная профильная функция, а z_0 – параметр, отвечающий за размер скирмиона. В случае одиночного скирмиона ур. (4) воспроизводит профиль, получаемый с помощью обычного анзаца цилиндрической доменной стенки, в то же время анзат (4) гораздо удобнее для описания профиля СкК. Недавно было показано, что мультискирмионная конфигурация может быть представлена в виде суммы стереографических функций одиночных скирмионов [22]. В частности, мы предлагаем моделировать регулярную гексагональную решетку скирмионов с помощью следующей стереографической функции

$$f_{SkX} = \sum_{n,m} f_1(\mathbf{r} - n\mathbf{a}_1 - m\mathbf{a}_2), \quad (5)$$

где $\mathbf{a}_1 = (0, a)$, $\mathbf{a}_2 = (-\sqrt{3}a/2, a/2)$, a – параметр ячейки СкК. Статические свойства анзаца (4)–(5) были рассмотрены ранее в [22, 23]. Было показано, что предложенная конфигурация СкК имеет более низкую энергию, чем спиральная или однородная конфигурации при магнитных полях, $0.25 \lesssim b \lesssim 0.8$.

В терминах стереографической проекции уравнение движения для функции $f(t)$ сильно нелинейное и не может быть аналитически решено в общем случае. В предыдущих работах [14, 24] мы обсудили нормальные моды малых флуктуаций функции f . Недавно нами также был разработан особый подход для рассмотрения гиротропной моды СкК [16]. В настоящей работе мы обобщаем этот подход для анализа двух зон с более высокой энергией, наблюдаемых экспериментально.

Гиротропная мода. Проиллюстрируем наш специально разработанный подход сначала на примере гиротропной моды. Мы полагаем, что решетка скирмионов неидеальна, так что положения центров скирмионов могут изменяться, в то время как образы отдельных скирмионов в сумме (5) остаются неизменными. Мы пишем

$$f_{SkX} = \sum_l f_1(\mathbf{r} - n\mathbf{a}_1 - m\mathbf{a}_2 + \mathbf{u}_l), \quad (6)$$

и в низшем порядке по u_l получаем

$$f_{SkX} = f_0 + \sum_l \mathbf{u}_l \nabla f_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l^{(0)}), \quad (7)$$

здесь $\mathbf{r}_l^{(0)} = n\mathbf{a}_1 - m\mathbf{a}_2$, а невозмущенная f_0 дается выражением (5).

Чтобы иметь возможность использовать наши прежние формулы, описывающие динамику скирмионной решетки [14], мы переходим к переменной $\psi(\mathbf{r})$, согласно формуле

$$\sum_l \mathbf{u}_l \nabla f_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l^{(0)}) = (1 + f_0\bar{f}_0)\psi(\mathbf{r}). \quad (8)$$

Вводя краткое обозначение $f_j = f_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^{(0)})$, мы получаем выражение

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} &= \frac{1}{1 + f_0\bar{f}_0} \sum_j \begin{pmatrix} \partial_{\bar{z}} f_j & \partial_z f_j \\ \partial_z \bar{f}_j & \partial_{\bar{z}} \bar{f}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_j^- \\ u_j^+ \end{pmatrix} \\ &\equiv \sum_j \mathcal{O}_j \begin{pmatrix} u_j^- \\ u_j^+ \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (9)$$

здесь $\mathbf{u}_j \nabla = u_j^+ \partial_z + u_j^- \partial_{\bar{z}}$, где $\partial_z = (\partial_x - i\partial_y)/2$, $\partial_{\bar{z}} = (\partial_x + i\partial_y)/2$ и $u_j^\pm = u_x^j \pm iu_y^j$, а $\bar{\psi}$ – величина, комплексно сопряженная к ψ .

Квадратичная часть лагранжиана принимает вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{lj} \begin{pmatrix} u_l^+ & u_l^- \end{pmatrix} \left(-i\hat{\mathcal{K}}_{lj}\partial_t - \hat{\mathcal{H}}_{lj} \right) \begin{pmatrix} u_j^- \\ u_j^+ \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathcal{K}}_{lj} = \int d\mathbf{r} \mathcal{O}_l^\dagger \cdot \sigma_3 \cdot \mathcal{O}_j, \quad (10)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{lj} = \int d\mathbf{r} \mathcal{O}_l^\dagger \cdot \begin{pmatrix} (-i\nabla + \mathbf{A})^2 + U & V \\ V^* & (i\nabla + \mathbf{A})^2 + U \end{pmatrix} \cdot \mathcal{O}_j,$$

а явные выражения для U , V и \mathbf{A} представлены в [14]. Благодаря быстрому убыванию функции $f_j = f_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^{(0)})$ с расстоянием от центра j -го скирмиона, величины $\hat{\mathcal{K}}_{lj}$ и $\hat{\mathcal{H}}_{lj}$ сводятся к взаимодействию ближайших соседей. Дальнейшие детали, касающиеся динамики гиротропной моды, приводятся в работе [16].

Две вышележащие моды. Рассмотрим теперь две моды, наблюдаемые в экспериментах по магнитному резонансу [24], так называемая дыхательная мода (Br) и мода вращения против часовой стрелки (CCW). Вместо того, чтобы смещать положение отдельных скирмионов, мы будем теперь изменять их радиус или фазу. Этот тип вариации соответствует дыхательной моде. В упрощенной форме наш анзац можно представить в виде функции, $f_1(\mathbf{r}) = iz_0/\bar{z} \exp(-c|z/z_0|^2)$, где c зависит от величины поля. Изменение в вещественнозначном $z_0 \rightarrow z_0(1 + \epsilon_1)$ может быть представлено в виде $f_1(\mathbf{r}) \rightarrow f_1(\mathbf{r}) + \epsilon_1 z_0 \partial f_1(\mathbf{r})/\partial z_0 = f_1(\mathbf{r}) - \epsilon_1(z\partial f_1(\mathbf{r})/\partial z + \bar{z}\partial f_1(\mathbf{r})/\partial \bar{z})$. Аналогично, бесконечно малое изменение фазы $f_1(\mathbf{r}) \rightarrow e^{i\epsilon_2} f_1(\mathbf{r})$ может быть записано как $f_1(\mathbf{r}) \rightarrow f_1(\mathbf{r}) + i\epsilon_2(z\partial f_1(\mathbf{r})/\partial z - \bar{z}\partial f_1(\mathbf{r})/\partial \bar{z})$. Объединяя эти формулы и определяя комплекснозначную величину $u_{br} = \epsilon_1 - i\epsilon_2$, мы получаем вариацию первого порядка в виде

$$u_{br} z \partial f_1(\mathbf{r})/\partial z + \bar{u}_{br} \bar{z} \partial f_1(\mathbf{r})/\partial \bar{z}.$$

Здесь мы видим, что дыхательная мода имеет тот же угловой характер в начале координат, что и f_1 , т.е. она ведет себя как $e^{i\phi}$ при $r \rightarrow 0$. Это следует противопоставить описанной выше трансляционной моде, которая ведет себя как $e^{2i\phi}$, т.е. имеет дополнительное вращение по часовой стрелке, $e^{i\phi}$, по отношению к $f_1 \propto e^{i\phi}$. Легко показать, что другая наблюдаемая мода, вращение против часовой стрелки, получается путем использования вариации

$$u_{ccw} z^2 \partial f_1(\mathbf{r})/\partial z + \bar{u}_{ccw} \bar{z}^2 \partial f_1(\mathbf{r})/\partial \bar{z}.$$

Дальнейшее рассмотрение выполняется просто, в основном, повторяя описанные выше шаги для нуле-

вой моды. Сначала мы вводим амплитуды, относящиеся к отдельным скирмионам, записывая, например, дыхательную моду скирмиона с центром в $\mathbf{r}_j^{(0)}$ следующим образом

$$u_{br,j}(z - z_j^{(0)}) \frac{\partial}{\partial z} f_j + \bar{u}_{br,j}(\bar{z} - \bar{z}_j^{(0)}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_j,$$

и аналогично для $u_{ccw,j}$. Затем мы выполняем интегрирование по \mathbf{r} , получаем лагранжиан на решетке в терминах мод $u_{br,j}$, $u_{ccw,j}$ и переходим к преобразованию Фурье, $u_{br,j} = \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_j} u_{br,\mathbf{q}}$, и аналогично для $u_{ccw,\mathbf{q}}$.

Оказывается, что энергии мод u_{br} и u_{ccw} близки и даже совпадают при некоторых значениях b . Поэтому нам необходимо учесть гибридизацию этих двух мод. Мы вводим объект типа дираковского спинора, $\Psi_{\mathbf{q}}^\dagger = (\bar{u}_{br,\mathbf{q}}, u_{br,\mathbf{q}}, \bar{u}_{ccw,\mathbf{q}}, u_{ccw,\mathbf{q}})$. После некоторых вычислений мы получаем эффективный лагранжиан для этих двух зон в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} \Psi_{-\mathbf{q}}^\dagger \left(-i\hat{\mathcal{K}}_{\mathbf{q}}\partial_t - \hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{q}} \right) \Psi_{\mathbf{q}}, \quad (11)$$

$$\hat{\mathcal{K}}_{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 1 + k_2\gamma_s & 0 & k_a\gamma_p^* & k_b\gamma_p \\ 0 & -1 - k_2\gamma_s & k_b\gamma_p^* & k_a\gamma_p \\ k_a\gamma_p & k_b\gamma_p & 1 + k_3\gamma_s & 0 \\ k_b\gamma_p^* & k_a\gamma_p^* & 0 & -1 - k_3\gamma_s \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} p_1 + t_1\gamma_s & p_2 + t_2\gamma_s & -t_a\gamma_p^* & t_b\gamma_p \\ p_2 + t_2\gamma_s & p_1 + t_1\gamma_s & -t_b\gamma_p^* & t_a\gamma_p \\ -t_a\gamma_p & -t_b\gamma_p & p_3 + t_3\gamma_s & t_4\gamma_d \\ t_b\gamma_p^* & t_a\gamma_p^* & t_4\gamma_d^* & p_3 + t_3\gamma_s \end{pmatrix},$$

где суммы по шести ближайшим соседям (NN) определяются выражениями

$$\gamma_s(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{d}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{d}} - 6 =$$

$$= 2 \left(2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} q_x \cos \frac{1}{2} q_y + \cos q_y - 3 \right),$$

$$\gamma_p(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{d}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{d}} e^{i\phi_{\mathbf{d}}} =$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} q_x \sin \frac{1}{2} q_y + \sin q_y - \right.$$

$$\left. - i\sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} q_x \cos \frac{1}{2} q_y \right),$$

$$\gamma_d(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{d}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{d}} e^{2i\phi_{\mathbf{d}}} =$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} q_x \cos \frac{1}{2} q_y - \cos q_y - \right.$$

$$\left. - i\sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} q_x \sin \frac{1}{2} q_y \right), \quad (12)$$

причем, выполняется свойство $\gamma_{s,p,d}(0) = 0$. Для простоты обозначений мы полагаем параметр ячейки

СкК, a , равным единице. Для оптимальной конфигурации a зависит от поля, b .

Удобное свойство $\hat{\mathcal{K}}_{\mathbf{q}=0} = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$ было фактически получено путем перемасштабирования $u_{br,j} \rightarrow c_{br}u_{br,j}$ и $u_{ccw,j} \rightarrow c_{ccw}u_{ccw,j}$ для всех j с соответствующим образом выбранными (и зависящими от поля) c_{br}, c_{ccw} . Численно мы находим, что коэффициенты $k_2 < 0 < k_3$, $k_a, b < 0$ довольно малы, и их зависимость от поля b показана на рис. 1. На этом графике также показаны другие параметры, p_i, t_i , относящиеся к потенциальной части лагранжиана.

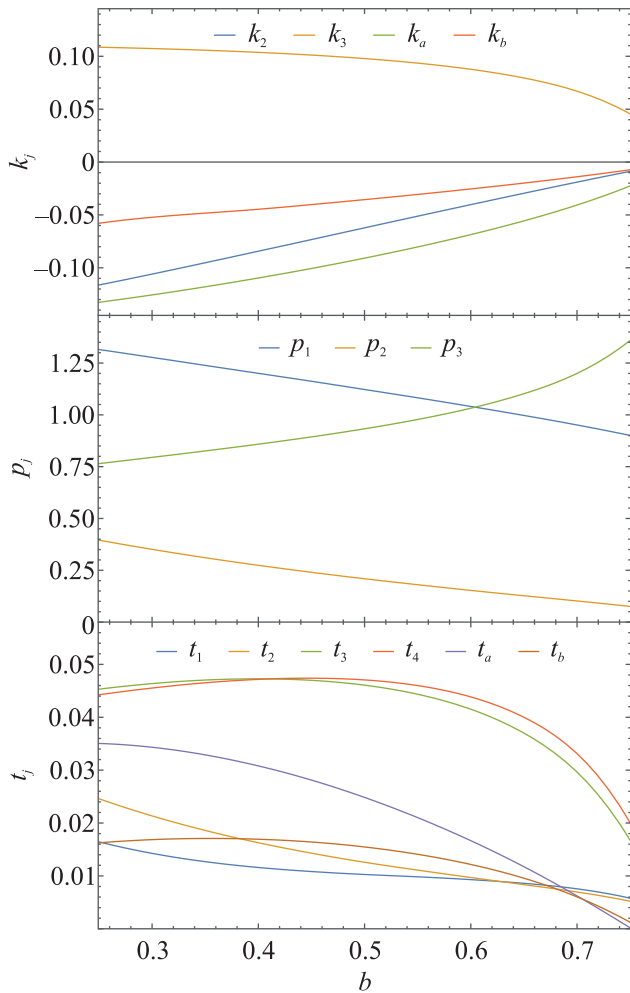


Рис. 1. (Цветной онлайн) Зависимость параметров лагранжиана (11), описывающего дыхательную моду и моду вращения против часовой стрелки, от величины внешнего магнитного поля, b

Несмотря на относительную малость величины k_3 , следует быть внимательным при разложении вблизи точки зоны Бриллюэна, K , т.е. вблизи $\mathbf{q} = \frac{2\pi}{3}(\sqrt{3}, 1)$. В этой точке множитель γ_s обладает минимумом, поэтому величина $\hat{\mathcal{K}}_{\mathbf{q},33}$ становится ма-

лой $1 + k_3\gamma_s \simeq 0.07$, при малых полях, $b \leq 0.4$. Однако, величина $\hat{\mathcal{K}}_{\mathbf{q},33}$ остается положительной во всем диапазоне значений b , как и должно быть в хорошо определенной теории.

Спектр возбуждений определяется уравнением $\det(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbf{q}}) = 0$, где $\hat{\mathcal{L}}_{\mathbf{q}} = \omega\hat{\mathcal{K}}_{\mathbf{q}} - \hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{q}}$. Корни этого уравнения возникают парами, $\omega = \pm\epsilon_1(\mathbf{q})$ и $\omega = \pm\epsilon_2(\mathbf{q})$. В точке Γ , когда $\mathbf{q} = 0$, уравнение сильно упрощается. В этом случае $\gamma_s = \gamma_p = \gamma_d = 0$, и матрица лагранжиана принимает следующий вид:

$$\hat{\mathcal{L}}_{\mathbf{q}=0} = \begin{pmatrix} \omega - p_1 & -p_2 & 0 & 0 \\ -p_2 & -\omega - p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega - p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega - p_3 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

и спектр дается как $\pm\epsilon_1$ и $\pm\epsilon_2$, где

$$\epsilon_1 = (p_1^2 - p_2^2)^{1/2}, \quad \epsilon_2 = p_3.$$

Оказывается, что $\epsilon_1 \simeq \epsilon_2 \sim 1$ во всей значимой области полей, b , при этом энергии совпадают при $b = b_c \simeq 0.6$. Соответствующая зависимость энергии мод Вг и ССВ в точке Γ приведена на рис. 2. Видно, что щель между ветками Вг и ССВ закрывается при b_c и вновь открывается при дальнейшем росте b .

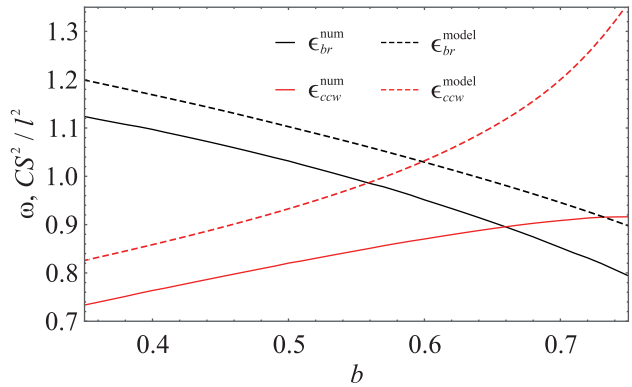


Рис. 2. (Цветной онлайн) Энергии дыхательной моды и моды вращения против часовой стрелки в точке Γ , $\mathbf{q} = 0$, вычисленные в двух подходах. Результаты эффективной модели, ур. (13), обозначены пунктирными линиями, а результат полного вычисления, описанного в работе [14], показан сплошными линиями

На рисунке 2 видно также качественное согласие наших результатов с полным расчетом магннного спектра, детали которого были опубликованы ранее, см. [14]. Главное отличие состоит в том, что в полном расчете соответствующие дисперсионные ветки обладают более низкой энергией; что может объясняться виртуальными переходами на более высокие уровни

энергии, которые присутствуют в полном расчете и отсутствуют в упрощенной модели (11).

Эффективный редуцированный гамильтониан. Чтобы показать смену топологического характера двух зон после переоткрытия щели, сосредоточимся на окрестности точки $\mathbf{q} = 0$. При $b = b_c$ и $\mathbf{q} = 0$ спектр становится дважды вырожденным с $\omega = \pm\epsilon_1$. В первую очередь, мы хотим свести задачу к рассмотрению двух идентичных секулярных уравнений, каждое из которых давалось бы гамильтонианом 2×2 . При этом возникают два технических момента. Во-первых, недиагональная форма ур. (13) говорит о конечной гибридизации между фазой скирмиона и его радиусом, даже в однородном пределе, см. определение u_{br} выше. Такая гибридизация отсутствует для ССВ моды в точке $\mathbf{q} = 0$. Во-вторых, кинетическое слагаемое, $\hat{K}_{\mathbf{q}}$, недиагонально, $k_{a,b} \neq 0$, в отличие от ранее исследованного случая гиротропной моды [16], и это свойство оказывается существенным в численных оценках.

В точке Γ мы можем привести лагранжиан, $\hat{L}_{\mathbf{q}}$, к диагональному виду при помощи преобразования $\hat{L}_{\mathbf{q}=0} \rightarrow U_0^\dagger \hat{L}_{\mathbf{q}=0} U_0$, где

$$U_0 = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix},$$

и $\tanh 2\theta = -p_2/p_1$. Теперь рассмотрим блок $\hat{L}_{\mathbf{q}}$, составленный из первых и третьих строк и столбцов матрицы. Соответствующий блок 2×2 в кинетическом слагаемом при $\mathbf{q} = 0$ является единичной матрицей, а при $\mathbf{q} \neq 0$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 + k_2\gamma_s & \tilde{k}_a\gamma_p^* \\ \tilde{k}_a\gamma_p & 1 + k_3\gamma_s \end{pmatrix}$ величина \tilde{k}_a определяется ниже.

Ограничиваясь в вычислениях точностью $\mathcal{O}(q^2)$ и применяя простые \mathbf{q} -зависящие преобразования подобия к лагранжиану, мы можем привести указанный выше блок кинетического слагаемого к виду единичной матрицы. Опуская дальнейшие подробности, приведем конечное выражение:

$$\hat{L}_{\mathbf{q}}^{(1)} \simeq (\omega - E_0)\mathbf{1} - \mathcal{H},$$

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mu + tq^2 & v(q_x - iq_y) \\ v(q_x + iq_y) & -\mu - tq^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mu &= (\epsilon_1 - \epsilon_2)/2, & \epsilon_0 &= (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2, \\ v &= 3(\tilde{t}_a + \epsilon_0\tilde{k}_a), \\ t &= \frac{3}{4}(t_3 - \tilde{t}_1 + k_2\epsilon_1 - k_3\epsilon_2 + 6\tilde{k}_a^2\mu), \\ E_0 &= \epsilon_0 + \frac{3}{4}q^2(-t_3 - \tilde{t}_1 + k_2\epsilon_1 + k_3\epsilon_2 + \\ &+ 12\tilde{k}_a\tilde{t}_a + 12\tilde{k}_a^2\epsilon_0), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{t}_a &= t_a \cosh \theta + t_b \sinh \theta, \\ \tilde{k}_a &= k_a \cosh \theta + k_b \sinh \theta, \\ \tilde{t}_1 &= t_1 \cosh 2\theta - t_2 \sinh 2\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Второй блок, $\hat{L}_{\mathbf{q}}^{(2)}$, может быть получен из первого, $\hat{L}_{\mathbf{q}}^{(1)}$, заменой $\omega \rightarrow -\omega$ и $q_y \rightarrow -q_y$. Два оставшихся блока в $\hat{L}_{\mathbf{q}}$, связывающих $\hat{L}_{\mathbf{q}}^{(1)}$ и $\hat{L}_{\mathbf{q}}^{(2)}$, малы в меру $\mathcal{O}(q)$ и могут быть опущены в окрестности точки Γ . Зависимость параметров эффективного гамильтониана \mathcal{H} от поля b приведена на рис. 3. Собственные моды гамильтониана (14) даются выражениями:

$$\epsilon_{\pm, \mathbf{q}} = E_0 \pm \sqrt{(\mu + tq^2)^2 + v^2q^2}. \quad (16)$$

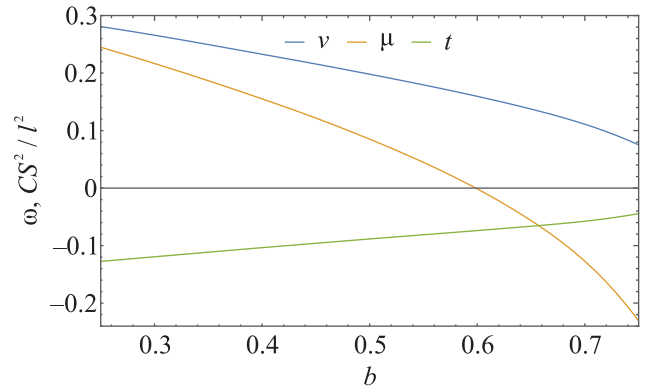


Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимость параметров эффективного гамильтониана 2×2 , ур. (14), от внешнего магнитного поля, b

Топологический характер спектра проявляется в кривизне Берри, $\Omega(\mathbf{q})$, которая легко вычисляется для упрощенной модели, ур. (14). Согласно стандартной формуле, для n -ой зоны с дисперсией $\epsilon_{n\mathbf{q}}$ кривизна Берри $\Omega_n(\mathbf{q})$ дается следующим выражением:

$$\Omega_n(\mathbf{q}) = i \sum_m \frac{\langle n | \frac{\partial \hat{H}_{\mathbf{q}}}{\partial q_x} | m \rangle \langle m | \frac{\partial \hat{H}_{\mathbf{q}}}{\partial q_y} | n \rangle - (q_x \leftrightarrow q_y)}{(\epsilon_{n\mathbf{q}} - \epsilon_{m\mathbf{q}})^2}. \quad (17)$$

В общем случае суммирование по m в (17) проводится по всем зонам. В нашем случае двух близко расположенных уровней, $\epsilon_{+, \mathbf{q}} - \epsilon_{-, \mathbf{q}} \ll E_0 \sim 1$, можно

ограничиться переходами только между этими двумя уровнями, когда знаменатель (17) мал. Переходы с $|\epsilon_{n\mathbf{q}} - \epsilon_{m\mathbf{q}}| \simeq 2E_0$ могут быть отброшены. Это значит, что из суммы по m остается только одно слагаемое. После несложных вычислений, для зоны $\epsilon_{+, \mathbf{q}}$ можно получить:

$$\Omega(\mathbf{q}) = \frac{v^2(tq^2 - \mu)}{2((\mu + tq^2)^2 + v^2q^2)^{3/2}}. \quad (18)$$

Для зоны $\epsilon_{-, \mathbf{q}}$ следует заменить $\Omega(\mathbf{q}) \rightarrow -\Omega(\mathbf{q})$.

Выражение для интегрального веса (числа Черна):

$$\int d^2\mathbf{q} \Omega(\mathbf{q}) = \frac{\pi(tq^2 + \mu)}{\sqrt{(\mu + tq^2)^2 + v^2q^2}} \Big|_{q=0}^{\infty} = \pi(\text{sgn } t - \text{sgn } \mu).$$

Видно, что для $\mu t < 0$ магновы топологически нетривиальны, в нашем случае это условие выполняется при $b < b_c \simeq 0.6$. Для больших полей, $b > b_c$, выполняется, $\mu t > 0$, поэтому спектр становится топологически тривиальным.

Такой переход наблюдался ранее с ростом магнитного поля в схожей модели [17], а также с изменением величины магнитной анизотропии в модели на решетке с четырехспиновым взаимодействием [18].

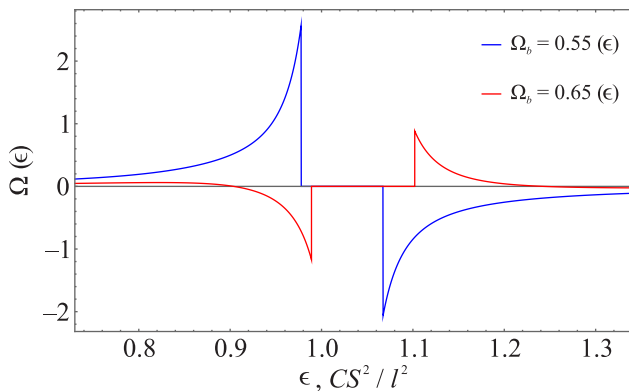


Рис. 4. (Цветной онлайн) Плотность кривизны Берри $\Omega(\epsilon)$ для двух разных значений магнитного поля: зеленая линия $b = 0.55$, а красная линия $b = 0.65$

Топологический характер спектра магновов может проявляться в появлении краевых состояний [13, 17], а также в аномальном поведении холловской теплопроводности, см. [20]. В случае теплопроводности полезно ввести понятие плотности кривизны Берри, которую мы определяем следующим образом:

$$\Omega(\epsilon) = V^{-1} \sum_{n\mathbf{q}} \Omega_n(\mathbf{q}) \delta(\epsilon - \epsilon_{n\mathbf{q}}). \quad (19)$$

Вблизи точки переоткрытия щели при $b = b_c$ для упрощенной модели (14) это выражение сводится к

$$\Omega(\epsilon) = \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \Omega(\mathbf{q}) (\delta(\epsilon - \epsilon_{+, \mathbf{q}}) - \delta(\epsilon - \epsilon_{-, \mathbf{q}})), \quad (20)$$

где $\Omega(\mathbf{q})$ дается (18). Итоговое выражение достаточно громоздко и здесь не приводится. На рисунке 4 показана зависимость $\Omega(\epsilon)$ для двух конкретных наборов параметров E_0, v, μ, t , относящихся к двум разным случаям $\mu t > 0$ и $\mu t < 0$.

Заключение. Мы построили теорию топологического перехода, происходящего в спектре возбуждений гексагональной решетки скирмионов при увеличении внешнего магнитного поля. С ростом поля щель между двумя зонами спиновых волн, наблюдаемыми в экспериментах по магнитному резонансу, закрывается, что сопровождается изменением топологического характера обеих зон. Мы надеемся, что это явление, в случае подтверждения методом магнитного резонанса, может быть в дальнейшем исследовано в экспериментах по холловской теплопроводности.

Работа поддержана Российским научным фондом, грант # 22-22-20034 и Санкт-Петербургским научным фондом, грант # 33/2022.

1. H. Vakili, J.-W. Xu, W. Zhou, M.N. Sakib, M.G. Morshed, T. Hartnett, Y. Quessab, K. Litzius, C.T. Ma, S. Ganguly, M.R. Stan, P.V. Balachandran, G.S.D. Beach, S.J. Poon, A.D. Kent, and A.W. Ghosh, *J. Appl. Phys.* **130**, 070908 (2021).
2. M.-K. Lee and M. Mochizuki, *Phys. Rev. Appl.* **18**, 014074 (2022).
3. A. Fert, N. Reyren, and V. Cros, *Nat. Rev. Mater.* **2**, 1 (2017).
4. K. Everschor-Sitte, J. Masell, R.M. Reeve, and M. Kläui, *J. Appl. Phys.* **124**, 240901 (2018).
5. N. Nagaosa and Y. Tokura, *Nature Nanotech.* **8**, 899 (2013).
6. M. Garst, J. Waizner, and D. Grundler, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **50**, 293002 (2017).
7. A.A. Belavin and A.M. Polyakov, *JETP Lett.* **22**, 245 (1975).
8. A.N. Bogdanov and D. Yablonskii, *ZhETF* **95**, 178 (1989).
9. A. Bogdanov and A. Hubert, *J. Magn. Magn. Mater.* **138**, 255 (1994).
10. S. Mühlbauer, B. Binz, F. Jonietz, C. Pfleiderer, A. Rosch, A. Neubauer, R. Georgii, and P. Böni, *Science* **323**, 915 (2009).
11. C. Schütte and M. Garst, *Phys. Rev. B* **90**, 094423 (2014).

12. S.-Z. Lin, C. D. Batista, and A. Saxena, *Phys. Rev. B* **89**, 024415 (2014).
13. A. Roldán-Molina, A. S. Nunez, and J. Fernández-Rossier, *New J. Phys.* **18**, 045015 (2016).
14. V. E. Timofeev and D. N. Aristov, *Phys. Rev. B* **105**, 024422 (2022).
15. O. Petrova and O. Tchernyshyov, *Phys. Rev. B* **84**, 214433 (2011).
16. V. E. Timofeev and D. N. Aristov, *JETP Lett.* **118**, 455 (2023).
17. S. A. Díaz, T. Hirose, J. Klinovaja, and D. Loss, *Physical Review Research* **2**, 013231 (2020).
18. K. Mæland and A. Sudbø, *Phys. Rev. Res.* **4**, L032025 (2022).
19. K. A. van Hoogdalem, Y. Tserkovnyak, and D. Loss, *Phys. Rev. B* **87**, 024402 (2013).
20. R. Matsumoto, R. Shindou, and S. Murakami, *Phys. Rev. B* **89**, 054420 (2014).
21. W. Döring, *Z. Naturforsch. A* **3**, 373 (1948).
22. V. E. Timofeev, A. O. Sorokin, and D. N. Aristov, *JETP Lett.* **109**, 207 (2019).
23. V. E. Timofeev, A. O. Sorokin, and D. N. Aristov, *Phys. Rev. B* **103**, 094402 (2021).
24. V. E. Timofeev and D. N. Aristov, *JETP Lett.* **117**, 676 (2023).