

# Локальный квенч в технике Келдыша<sup>1)</sup>

А. А. Радовская<sup>ID+2)</sup>, А. Г. Семенов<sup>ID+\*</sup>

<sup>+</sup>Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

<sup>\*</sup>Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 октября 2023 г.

После переработки 3 ноября 2023 г.

Принята к публикации 14 ноября 2023 г.

В работе исследована задача о квантовой эволюции скалярного поля после мгновенного локального возмущения (квенча). В рамках техники Келдыша разработан подход к описанию квенча из произвольного начального состояния. Этот подход не использует процедуру аналитического продолжения, которая может быть неоднозначной в ряде случаев. Для простого примера вычислена эволюция плотности энергии после квенча, проанализирована зависимость от ширины области взаимодействия и начальных условий.

DOI: 10.31857/S1234567823240096, EDN: nmcmnx

**1. Введение.** Исследования физических явлений, возникающих при квантовой эволюции систем с большим числом степеней свободы, интересны как сами по себе так и в приложении к различным областям современной физики, таким как физика конденсированного состояния вещества, космология, столкновения тяжелых ионов и др. Например, в экспериментах с ультрахолодными атомами есть возможность изменять конфигурацию ловушки и/или длину рассеяния, что приводит систему в неравновесное состояние. Это, в свою очередь, позволяет напрямую наблюдать квантовую эволюцию многочастичной системы [1].

В общем виде начальное состояние квантовой системы задается матрицей плотности  $\hat{\rho}(t_0) = \hat{\rho}_0$ . В частности, в состоянии теплового равновесия  $\hat{\rho}_0 \sim e^{-\hat{H}/T}$ , где  $\hat{H}$  – это гамильтониан системы, а  $T$  – температура. После унитарной эволюции происходит измерение наблюдаемой, которой соответствует самосопряженный оператор  $\hat{O}$ . Среднее значение оператора в момент времени  $t$  определяется как след с матрицей плотности  $\langle \hat{O} \rangle_t = \text{tr}(\hat{O}\hat{\rho}(t))$ .

Не всегда матрица плотности в начальный момент времени  $\hat{\rho}_0$  известна в явном виде. Другим способом задать начальное состояние системы можно описав корреляции, присутствующие в начальный момент времени. Другими словами, определив всевозможные средние  $\langle \hat{A}_1 \dots \hat{A}_n \rangle_{t_0} = \text{tr}(\hat{A}_1 \dots \hat{A}_n \hat{\rho}_0)$  от полного набора операторов  $\{\hat{A}_i\}$ .

Кроме того, начальное состояние квантовой системы может быть создано путем контролируемого возмущения известного равновесного состояния. В этом случае такое начальное состояние определяется протоколом его приготовления. Пусть исследуемая система приведена в состоянии равновесия с окружением, после чего в ней скачком меняются какие-либо параметры, например, константа взаимодействия или масса. С точки зрения нового Гамильтониана исходное состояние является неравновесным, и система начинает эволюционировать к новому равновесию. Такой процесс скачкообразного изменения параметров всей системы называется глобальным квенчем (global quench) [2–9]. Если система возмущается в окрестности некоторой точки  $\mathbf{x}_q$  путем действия оператора  $\hat{Q}(\mathbf{x}_q)$ , то такой процесс в литературе называется локальным квенчем (local quench) [10–13]. Интересно, что в ряде случаев он эквивалентен геометрическому квенчу, описывающему процесс слияния двух подсистем в теории поля [4, 14]. После возмущения матрица плотности системы имеет вид

$$\hat{\rho}(t_0 + 0) = \frac{\hat{Q}(\mathbf{x}_q)\hat{\rho}_0\hat{Q}^\dagger(\mathbf{x}_q)}{\text{tr}(\hat{Q}^\dagger(\mathbf{x}_q)\hat{Q}(\mathbf{x}_q)\hat{\rho}_0)}.$$

В частности, оператор вида  $\hat{Q}(\mathbf{x}_q) = e^{i\hat{V}(\mathbf{x}_q)}$  с самосопряженным  $\hat{V}(\mathbf{x}_q)$  может быть проинтерпретирован как результат влияния мгновенной добавки  $\delta H(t) = -\delta(t-t_0)\hat{V}(\mathbf{x}_q)$  к исходному Гамильтониану.

В недавних работах [10, 12, 13] исследовался локальный квенч в свободной скалярной теории поля. В этих работах использовалась процедура аналити-

<sup>1)</sup>См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала [www.jetpletters.ac.ru](http://www.jetpletters.ac.ru)

<sup>2)</sup>e-mail: [gaan@ipi.ru](mailto:gaan@ipi.ru)

ческого продолжения из мнимого времени, которая не всегда является прозрачной и имеет ряд ограничений на исследуемые начальные состояния.

В настоящей работе описывается подход к решению задачи о локальном квенче в реальном времени с использованием техники Келдыша. Этот подход позволяет изучать более широкий класс начальных состояний. Кроме того, такой подход довольно просто обобщить на случай взаимодействующих теорий.

План статьи следующий: во втором разделе кратко описывается техника Келдыша и квазиклассическое приближение в ее рамках. В третьем разделе дана постановка задачи о локальном квенче и получено ее общее решение в рамках описанного выше подхода, а также рассмотрен пример квадратичного квенча для различных начальных условий. В оставшихся двух разделах обсуждаются полученные результаты и возможности для дальнейших исследований.

**2. Квазиклассическое приближение в технике Келдыша.** Неравновесные квантово-полевые системы удобно изучать, используя технику Келдыша [1, 15–17]. В этом подходе среднее от оператора вычисляется как след с матрицей плотности. Поскольку эволюция матрицы плотности со временем определяется двумя операторами эволюции, в теории происходит удвоение степеней свободы. Это можно представить как эволюцию полей вперед  $\varphi_F$  и назад по времени  $\varphi_B$  на контуре Келдыша [18].

Удобно перейти от базиса полей  $\varphi_F, \varphi_B$  к базису так называемых “классических”  $\varphi_{cl}$  и “квантовых”  $\varphi_q$  полей:

$$\begin{aligned} \varphi_{cl}(x) &= \frac{1}{2}(\varphi_F(x) + \varphi_B(x)), \\ \hbar\varphi_q(x) &= \varphi_F(x) - \varphi_B(x). \end{aligned} \quad (1)$$

Такой переход удобен при изучении квазиклассического разложения теории. Кроме того, вершины в новом базисе выглядят проще. Тогда среднее оператора в момент времени  $t$  выглядит как [20]:

$$\begin{aligned} \langle O[\hat{\varphi}(\mathbf{x})] \rangle_t &= \int \mathcal{D}\Pi(\mathbf{x}) \mathcal{D}\Phi(\mathbf{x}) \mathcal{W}[\Phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{x})] \times \\ &\times \int_{i.c.} \mathcal{D}\varphi_{cl}(t, \mathbf{x}) \int \mathcal{D}\varphi_q(t, \mathbf{x}) O[\varphi_{cl}(t, \mathbf{x})] e^{\frac{i}{\hbar} S_K[\varphi_{cl}, \varphi_q]}. \end{aligned} \quad (2)$$

Действие на контуре Келдыша определяется как разница действий на верхней и нижней части контура  $S_K[\varphi_F, \varphi_B] = S[\varphi_F] - S[\varphi_B]$ . Интеграл с обозначением i.c. означает интегрирование по полям  $\varphi_{cl}$  с заданными начальными условиями  $\varphi_{cl}(t_0, \mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})$ ,  $\partial_t \varphi_{cl}(t_0, \mathbf{x}) = \Pi(\mathbf{x})$ . Начальные условия для интегрирования по  $\varphi_q$  не заданы.

Функционал Вигнера выражается через матрицу плотности системы в начальном состоянии, тем самым определяя все свойства в начальный момент времени  $t_0$ :

$$\begin{aligned} W[\Phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{x})] &= \int \mathcal{D}\beta(\mathbf{x}) e^{i \int d^{d-1} \mathbf{x} \beta(\mathbf{x}) \Pi(\mathbf{x})} \times \\ &\times \langle \Phi(\mathbf{x}) + \frac{\hbar}{2} \beta(\mathbf{x}) | \hat{\rho}(t_0) | \Phi(\mathbf{x}) - \frac{\hbar}{2} \beta(\mathbf{x}) \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Для скалярной теории поля с действием

$$S = \frac{1}{2} \int d^d x \left( \partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) - m^2 \varphi^2(x) - \frac{g}{2} \varphi^4(x) \right)$$

действие Келдыша выглядит как

$$\begin{aligned} S_K[\varphi_{cl}, \varphi_q] &= -\hbar \int_{t_0}^{\infty} dt \int d^{d-1} \mathbf{x} \left( \varphi_q A[\varphi_{cl}] + \frac{g\hbar^2}{4} \varphi_{cl} \varphi_q^3 \right), \\ A[\varphi_{cl}] &= (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \varphi_{cl} + g\varphi_{cl}^3. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь условие  $A[\varphi_{cl}] = 0$  является уравнением движения для скалярного поля и выделяет поля на классической траектории. Легко видеть, что квазиклассическое приближение можно сделать, разложив последнее слагаемое  $\frac{g\hbar^2}{4} \varphi_{cl} \varphi_q^3$  в формуле (4)

$$\begin{aligned} e^{-i \frac{g\hbar^2}{4} \int_{t_0}^{\infty} dt \int d^{d-1} \mathbf{x} \varphi_{cl} \varphi_q^3} &= \\ = 1 - i \frac{g\hbar^2}{4} \int_{t_0}^{\infty} dt \int d^{d-1} \mathbf{x} \varphi_{cl} \varphi_q^3 + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Лидирующий вклад такого разложения известен как Классическое Статистическое Приближение или Квазиклассический метод. С учетом только первого вклада интегралы по полям  $\varphi_q$  и  $\varphi_c$  могут быть взяты и конечный ответ получится [19]:

$$\begin{aligned} \langle O[\hat{\varphi}(\mathbf{x})] \rangle_t &= \\ &= \int \mathcal{D}\Phi(\mathbf{x}) \mathcal{D}\Pi(\mathbf{x}) W[\Phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{x})] O[\phi_c(t, \mathbf{x})], \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\phi_c$  – это решение классических уравнения движения

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi_c + g\phi_c^3 = 0 \quad (7)$$

с начальными условиями

$$\phi_c(t_0, \mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}), \quad \partial_t \phi_c(t_0, \mathbf{x}) = \Pi(\mathbf{x}). \quad (8)$$

Другими словами, для того чтобы найти среднее от оператора, нужно взять его значение на классической траектории и усреднить по всем начальным

условиям с весом в виде функционала Вигнера. Для такого усреднения удобно ввести обозначение

$$\int \mathfrak{D}\Phi(\mathbf{x})\mathfrak{D}\Pi(\mathbf{x})W[\Phi(\mathbf{x}),\Pi(\mathbf{x})](\dots) \equiv \langle \dots \rangle_{i.c.}, \quad (9)$$

тогда среднее (6) запишется как

$$\langle O[\hat{\varphi}(\mathbf{x})] \rangle_t = \langle O[\phi_c(t, \mathbf{x})] \rangle_{i.c.} \quad (10)$$

Легко увидеть, что квазиклассическое разложение в технике Келдыша построено по параметру  $\hbar^2 g$ , поэтому для невзаимодействующей системы классическое приближение дает точный ответ. Поскольку в данной работе исследуется кванч во невзаимодействующей системе, то именно формула (6), (10) будет использована в дальнейшем. Однако вышеприведенные выкладки показывают как можно естественным образом включить взаимодействие в исследование кванча.

**3. Локальный кванч.** Рассмотрим локальное возмущение системы в точке  $\mathbf{x}_q$  в момент времени  $t_q$  или, другими словами, локальный кванч с оператором

$$\hat{Q}(\mathbf{x}_q) = e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}V(\hat{\varphi}_s(\mathbf{x}_q))}. \quad (11)$$

Здесь функция  $V(\hat{\varphi}(\mathbf{x}_q))$  зависит только от значения поля в некоторой окрестности точки  $\mathbf{x}_q$ , таким образом, что поле  $\hat{\varphi}_s(\mathbf{x}_q) = \int d^{d-1}\mathbf{x}\eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)\hat{\varphi}(\mathbf{x})$  определено в одной точке, а “размыто” (“smeared”) в окрестности этой точки. Здесь  $\alpha$  это размерный параметр, описывающий величину возмущения, а  $\eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)$  – гладкая функция, не равная нулю лишь в малой окрестности точки  $\mathbf{x}_q$ . Поскольку произведения операторов поля в совпадающих точках не всегда хорошо определены, то будем предполагать, что функция “размытия”  $\eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)$  всегда имеет конечную ширину. Таким образом, оператор  $\hat{Q}(\mathbf{x}_q)$  возбуждает систему в некоторой малой окрестности точки  $\mathbf{x}_q$ . Заметим, что такое возмущение можно реализовать, добавив к исходному гамильтониану дельтообразное по времени возмущение  $\delta\hat{H}(t) = \alpha\delta(t - t_q)V(\hat{\varphi}_s(\mathbf{x}_q))$ . Отсюда видно, что, например, возмущение с  $\alpha V(\hat{\varphi}_s(\mathbf{x}_q)) = g\hat{\varphi}_s^4(\mathbf{x}_q)$  соответствует мгновенному появлению взаимодействия в системе в точке  $\mathbf{x}_q$ .

За эволюцию системы после такого возмущения отвечает матрица плотности

$$\hat{\rho}(t_0) \rightarrow \hat{\rho}_Q(t_q, \mathbf{x}_q) = \hat{Q}(\mathbf{x}_q)\hat{\rho}(t_q)\hat{Q}^\dagger(\mathbf{x}_q). \quad (12)$$

Ниже будем считать, что кванч произошел в начальный момент времени  $t_q = t_0 = 0$ . Тогда, согласно

формуле (3), функционал Вигнера после локального кванча будет выглядеть как

$$W_Q[\Phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{x})] = \int \mathfrak{D}\beta(\mathbf{x})e^{i\int d^{d-1}\mathbf{x}\beta(\mathbf{x})\Pi(\mathbf{x})} \times \langle \Phi(\mathbf{x}) + \frac{\hbar}{2}\beta(\mathbf{x})|\hat{Q}(\mathbf{x}_q)\hat{\rho}(t_0)\hat{Q}^\dagger(\mathbf{x}_q)|\Phi(\mathbf{x}) - \frac{\hbar}{2}\beta(\mathbf{x}) \rangle. \quad (13)$$

Заметим, что

$$-i\frac{\delta}{\delta\Pi(\mathbf{y})}e^{i\int d^{d-1}\mathbf{x}\beta(\mathbf{x})\Pi(\mathbf{x})} = \beta(\mathbf{y})e^{i\int d^{d-1}\mathbf{x}\beta(\mathbf{x})\Pi(\mathbf{x})}. \quad (15)$$

Тогда функционал Вигнера после кванча может быть переписан как

$$W_Q[\Phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{x})] = Q\left(\Phi_s, \frac{\delta}{\delta\Pi_s}\right)W[\Phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{x})], \quad (16)$$

где мы ввели обозначения

$$Q\left(\Phi_s, \frac{\delta}{\delta\Pi_s}\right) = e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}\left(V\left(\Phi_s - i\frac{\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\Pi_s}\right) - V\left(\Phi_s + i\frac{\hbar}{2}\frac{\delta}{\delta\Pi_s}\right)\right)}, \quad (17)$$

$$\Phi_s = \int d^{d-1}\mathbf{x}\eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)\Phi(\mathbf{x}), \quad (18)$$

$$\frac{\delta}{\delta\Pi_s} = \int d^{d-1}\mathbf{x}\eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)\frac{\delta}{\delta\Pi(\mathbf{x})}. \quad (19)$$

В этих выражениях зависимость от точки кванча  $\mathbf{x}_q$  входит неявно через функцию “размытия”  $\eta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_q)$ .

Тогда, после функционального интегрирования по частям, среднее от оператора запишется как

$$\langle \hat{O} \rangle_t^Q = \int \mathfrak{D}\Phi(\mathbf{x})\mathfrak{D}\Pi(\mathbf{x})W[\Phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{x})] \times \langle O\left(\Phi_s, -\frac{\delta}{\delta\Pi_s}\right)O[\phi_c(t, \Phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{x}))] \rangle. \quad (20)$$

Видно, что, для того чтобы найти среднее от оператора после кванча, нужно провести суммирование по начальным условиям с прежним функционалом Вигнера, но от модифицированной наблюдаемой. Поскольку чаще всего рассматриваются полиномиальные наблюдаемые, такие как плотность энергии или корреляционные функции полей, то, в отсутствие взаимодействия, лишь конечное число вариационных производных  $\frac{\delta}{\delta\Pi_s}$  для них будет ненулевым. Это означает, что данный метод дает точный ответ даже для неквадратичных возмущений  $V(\hat{\varphi}_s)$ .

Формула (20) выражает главный результат этой статьи. Далее мы проиллюстрируем ее применение.

*3.1. Кванч  $V(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}^2$ .* Для простоты проведем вычисления в 1+1D теории поля. Рассмотрим локальное возмущение вида

$$\hat{Q}(x_q) = e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}\hat{\varphi}_s^2(x_q)}. \quad (21)$$

Если считать, что в малой области  $\Delta x$  вблизи точки  $x_q$  на короткое время  $\Delta t$  масса поля поменялась с  $m$  на  $M$ , то  $\alpha \approx \frac{M^2 - m^2}{2} \Delta t \Delta x$ .

Согласно формуле (17):

$$Q\left(\Phi_s, -\frac{\delta}{\delta\Pi_s}\right) = e^{2\alpha\Phi_s \cdot \frac{\delta}{\delta\Pi_s}}. \quad (22)$$

В качестве наблюдаемой выберем плотность энергии системы

$$\varepsilon(t, x) = \frac{1}{2}(\partial_t\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 + \frac{1}{2}m^2\varphi^2. \quad (23)$$

Последний ингредиент, который необходим для того чтобы воспользоваться формулой (20) и посчитать среднюю плотность энергии после действия локального квенча, это решение классического уравнения движения (7). Нетрудно показать, что без взаимодействия оно равно:

$$\begin{aligned} \phi_c(t, x) &= \quad (24) \\ &= -\int dy \left( \partial_t G_R(t, x - y) \Phi(y) + G_R(t, x - y) \Pi(y) \right), \end{aligned}$$

где запаздывающая функция Грина определяется из запаздывающего решения уравнения

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2 + m^2)G_R(t, x - x') = -\delta(t)\delta(x - x'), \quad (25)$$

и равна

$$\begin{aligned} G_R(t, x - x') &= -\theta(t) \int \frac{dp}{2\pi} \frac{\sin(\omega_p t)}{\omega_p} e^{-ip(x-x')}, \\ \omega_p &= \sqrt{p^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь можно посчитать среднюю плотность энергии после квенча. Для краткости выпишем выражение для  $\phi_c^2(t, x)$ . Слагаемые с производными вычисляются аналогично. Поскольку классическое решение является линейной функцией начальных условий, то экспоненту в выражении (22) достаточно разложить до второго порядка. Все высшие вариационные производные обращаются в ноль. Таким образом, с учетом формул (22), (24), получим:

$$\begin{aligned} Q\left(\Phi_s, -\frac{\delta}{\delta\Pi_s}\right) \phi_c^2(t, x) &= \phi_c^2(t, x) - \\ &- 4\alpha\phi_c(t, x)\Phi_s \cdot G_R^s(t, x) + 4\alpha^2\Phi_s^2 \cdot \left(G_R^s(t, x)\right)^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь мы ввели обозначение для “размытой” запаздывающей функции Грина

$$G_R^s(t, x) = \int dy \eta(y - x_q) G_R(t, x - y). \quad (28)$$

Далее необходимо провести усреднение по начальным условиям с функционалом Вигнера. Функционал нормирован на единицу, запаздывающая функция Грина не зависит от начальных условий, а среднее от классических решений равно Келдышевской функции Грина [20]:

$$\begin{aligned} iG_K(t - t', x - x') &= \\ &= \int \mathfrak{D}\Phi(x)\mathfrak{D}\Pi(x)W[\Phi(x), \Pi(x)]\phi_c(t, x)\phi_c(t', x'), \end{aligned} \quad (29)$$

которая стандартным образом определяется через след с начальной матрицей плотности

$$iG_K(t - t', x - x') = \frac{1}{2}tr(\hat{\rho}(t_0)\{\hat{\varphi}(t, x), \hat{\varphi}(t', x')\}).$$

С учетом обозначения интегрирования по начальным условиям (9), введем “размытую” Келдышевскую функцию Грина  $G_K^s(t, x)$  и постоянную  $\langle\Phi_s^2\rangle_{i.c.}$ :

$$\begin{aligned} \langle\phi_c(t, x)\Phi_s\rangle_{i.c.} &= iG_K^s(t, x) \equiv \\ &\equiv \int dy \eta(y - x_q) iG_K(t, x - y), \\ \langle\Phi_s^2\rangle_{i.c.} &\equiv \int dydz \eta(y - x_q)\eta(z - x_q) iG_K(0, y - z). \end{aligned} \quad (30)$$

Тогда для плотности энергии после квенча (21) получим

$$\begin{aligned} \langle\hat{\varepsilon}\rangle_t^Q &= \langle\hat{\varepsilon}\rangle_t - 2i\alpha\left(m^2G_K^s(t, x)G_R^s(t, x) + \right. \\ &+ \partial_t G_K^s(t, x)\partial_t G_R^s(t, x) + \partial_x G_K^s(t, x)\partial_x G_R^s(t, x)\left. + \right. \\ &+ 2\alpha^2\langle\Phi_s^2\rangle_{i.c.}\left(m^2\left(G_R^s(t, x)\right)^2 + \left(\partial_t G_R^s(t, x)\right)^2 + \right. \\ &\left. + \left(\partial_x G_R^s(t, x)\right)^2\right). \end{aligned} \quad (31)$$

Плотность энергии (31) является действительной величиной. Мнимая единица входит в определение Келдышевской функции Грина (32). Келдышевская функция Грина в совпадающих точках и временах сингулярна. Однако  $\langle\Phi_s^2\rangle_{i.c.}$  регуляризована при помощи функций “размытия”  $\eta(x - x_q)$ . Для устранения подобных расходимостей эта функция и была введена в определении квенча (11). Ее физический смысл в том, что энергия выделяется не точно в точке  $x_q$ , а в некоторой окрестности, задаваемой функцией “размытия”. Таким образом, конечный ответ будет зависеть от этой функции и расходиться при ее стремлении к дельта-функции.

Явный вид Келдышевской функции Грина зависит от начальных условий задачи, и в случае, когда

они характеризуются одночастичной функцией распределения  $f_p$ , для свободной теории равен:

$$iG_K(t, x-x') = \hbar \int \frac{dp}{2\pi} \frac{\cos(\omega_p t)}{2\omega_p} (2f_p+1) e^{-ip(x-x')}. \quad (32)$$

Используя явный вид функций Грина легко посчитать полную энергию, которую система получила в результате действия квенча:

$$\delta E = \int dx (\langle \hat{\epsilon} \rangle_t^Q - \langle \hat{\epsilon} \rangle_t) = 2\alpha^2 \langle \Phi_s^2 \rangle_{i.c} \int dy \eta^2(y). \quad (33)$$

Заметим, что выражение (31) содержит три вклада. Первый вклад представляет собой плотность энергии системы до квенча. Этот вклад может расходиться, как это бывает с вакуумной энергией в квантовой теории поля. Эта расходимость не имеет отношения к рассматриваемой нами проблеме и может быть устранена стандартными методами [21]. Второй вклад (пропорциональный  $\alpha$ ) отвечает линейному отклику системы на локальное возмущение. Как следует из формулы Кубо, данное слагаемое описывает перераспределение энергии между различными частями системы и не дает вклада в энергию, поглощаемую системой (33). Вся энергия, поглощенная системой в результате квенча, описывается третьим слагаемым выражения (21).

Полная энергия (33) существенно зависит от функции размытия  $\eta(x-x_q)$ . В случае локального квенча эта функция отлична от нуля только в малой окрестности точки  $x_q$  размера  $\epsilon$  и стремится к  $\delta(x-x_q)$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Функция размытия входит в выражение для  $\langle \Phi_s^2 \rangle_{i.c}$ . Келдышевская функция Грина в совпадающих точках расходится стандартным образом и требует регуляризации. Поэтому при  $\epsilon = 0$  средний квадрат поля  $\langle \Phi_s^2 \rangle_{i.c}$  зависит от ультрафиолетового масштаба  $\Lambda$ . В  $1+1$  мерной скалярной теории поля эта зависимость логарифмическая  $\langle \Phi_s^2 \rangle_{i.c} \sim \log \frac{\Lambda}{m}$ . Если  $\epsilon$  конечно, то  $\langle \Phi_s^2 \rangle_{i.c}$  сходится и в случае  $\epsilon \Lambda \gg 1$  ультрафиолетовое поведение теории становится несущественным. Кроме того, полная поглощенная системой энергия (33) содержит в явном виде интеграл от  $\eta^2(x)$ . Простые размерные оценки (или явное вычисление с гауссовой функцией размытия) дают  $\int dx \eta^2(x) \sim \frac{1}{\epsilon}$ . Таким образом, наиболее сингулярный вклад в полную энергию равен

$$\delta E \sim \frac{1}{\epsilon} \log \left( \frac{\min(\Lambda, \epsilon^{-1})}{m} \right). \quad (34)$$

Заметим, что подход, используемый в работе, можно применять для любого начального состояния

системы. На рис. 1а, с показана плотность энергии системы после квенча (31) для вакуумного начального состояния ( $f_p = 0$ ), а на рис. 1b, d – для случая, когда система в начальный момент времени находилась при температуре  $T \gtrsim m$  с бозевской функцией распределения  $f_p = (e^{\hbar\omega_p/T} - 1)^{-1}$ . Видно, что чем выше температура, тем среда сильнее возбуждается при действии локального возмущения. Этот эффект является прямым проявлением бозевской статистики рассматриваемой задачи. Локальный квенч для систем, в начальный момент времени находящихся при конечной температуре, также был рассмотрен в [13].

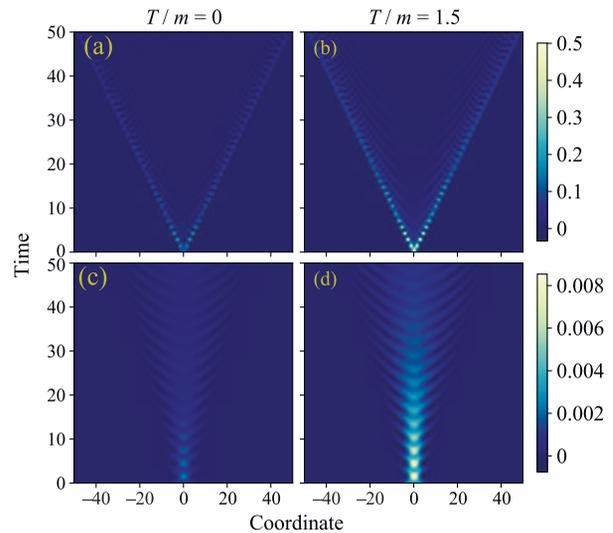


Рис. 1. (Цветной онлайн) Распределение плотности энергии в пространстве в зависимости от времени после локального квенча в точке  $x_q = 0$ . В качестве начального состояния системы выбрано тепловое с температурами  $T = 0$  (a), (c) и  $T = 1.5m$  (b), (d). Функция размытия предполагается гауссовой с шириной  $\epsilon m = 0.25$  (a), (b) и  $\epsilon m = 2$  (c), (d). Координата и время измеряются в единицах обратной массы

Верхние и нижние картинки на рис. 1 отличаются величиной ширины функции размытия  $\epsilon$ . Эта величина определяет максимальный импульс рождаемых при квенче частиц  $p_{\max} \sim \frac{1}{\epsilon}$ . Это позволяет оценить характерную скорость распространения фронта возмущения плотности энергии как максимальную групповую скорость частиц  $v_{\max}$ :

$$v_{\max} = \frac{\partial \omega_p}{\partial p} \sim \frac{p_{\max}}{\sqrt{p_{\max}^2 + m^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 \epsilon^2}}. \quad (35)$$

Если область возмущения мала ( $\epsilon \ll m^{-1}$ ), то возмущение распространяется со скоростью света  $v_{\max} \sim 1$  (рис. 1a, b). В обратном случае ( $\epsilon \gg m^{-1}$ ) групповая скорость мала  $v_{\max} \sim \frac{1}{m\epsilon}$  и фронт рас-

пространяется медленнее (рис. 1с, d). Подобная смена режима наблюдалась в работе [10] для квенча  $\hat{Q} \sim \hat{\varphi}$ . Судя по всему, такое поведение является универсальным и не зависит от начального состояния и конкретного вида оператора квенча.

**4. Обсуждение.** В предыдущем разделе мы подробно рассмотрели эволюцию плотности энергии после квенча вида  $\hat{Q}(x_q) = e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}\hat{\varphi}_s^2(x_q)}$ . Можно показать, что для более общего вида оператора квенча  $\hat{Q}(x_q) = e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}V(\hat{\varphi}_s(x_q))}$  с произвольным  $V(\hat{\varphi}_s(x_q))$  плотность энергии после квенча дается выражением:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\varepsilon} \rangle_t^Q &= \langle \hat{\varepsilon} \rangle_t - \alpha \left( m^2 G_R^s(t, x) \langle \phi_c(t, x) V'(\Phi_s) \rangle_{i.c.} + \right. \\ &+ \partial_t G_R^s(t, x) \langle \partial_t \phi_c(t, x) V'(\Phi_s) \rangle_{i.c.} + \\ &+ \partial_x G_R^s(t, x) \langle \partial_x \phi_c(t, x) V'(\Phi_s) \rangle_{i.c.} \left. \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \alpha^2 \langle V'(\Phi_s) V'(\Phi_s) \rangle_{i.c.} \left( m^2 (G_R^s(t, x))^2 + \right. \\ &\left. + (\partial_t G_R^s(t, x))^2 + (\partial_x G_R^s(t, x))^2 \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Входящие в это выражение средние по начальным условиям  $\langle \dots \rangle_{i.c.}$  могут не быть простыми парными корреляторами как в рассмотренном выше примере. В этом случае характерное поведение плотности энергии будет напрямую зависеть от корреляций присутствовавших в системе в начальный момент времени.

Выражение (36) позволяет провести сравнение с результатами, полученными ранее в конформной теории поля. В рамках конформной теории может быть эффективно рассмотрен случай, когда  $\hat{Q}(x)$  – это примарное поле. В качестве такого примера мы рассмотрим вершинный оператор  $\hat{Q}(x) = \hat{Y}_\alpha(x) =: e^{i\alpha\hat{\varphi}(x)} :$  с конформными размерностями  $h = \bar{h} = \alpha^2/(8\pi)$  [22]. Здесь при помощи  $: \dots :$  обозначено нормальное упорядочение. На языке техники Келдыша мы должны рассмотреть случай потенциала  $V(\varphi) = -\varphi$  и вакуумного начального состояния  $T = 0$  ( $f_p = 0$ ). Кроме того, необходимо выбрать функцию “размытия” в виде:

$$\eta(x) = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ipx - \epsilon\omega_p} = \frac{m\epsilon}{\pi\sqrt{x^2 + \epsilon^2}} K_1 \left( m\sqrt{x^2 + \epsilon^2} \right), \quad (37)$$

где  $K_\nu(z)$  – функция Макдональда,  $\epsilon$  – малый параметр (ширина функции “размытия”). Доказательство этого утверждения выходит за рамки формата писем, поэтому мы поместили его в дополнительные материалы (см. дополнительные материалы). Кроме того, в дополнительных материалах мы рассмотрели оператор квенча вида  $\hat{Q}(x) = \hat{\varphi}(x)$ , который не является примарным, но был подробно рассмотрен в работе [10].

Для потенциала вида  $V(\varphi) = -\varphi$  выражение (36) сводится к следующему:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\varepsilon} \rangle_t^Q &= \langle \hat{\varepsilon} \rangle_t + \frac{1}{2} \alpha^2 \left( m^2 (G_R^s(t, x))^2 \right. \\ &\left. + (\partial_t G_R^s(t, x))^2 + (\partial_x G_R^s(t, x))^2 \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Для функции “размытия” (37) все интегралы могут быть вычислены точно. В частности, “размытая” запаздывающая функция Грина имеет вид

$$\begin{aligned} G_R^s(t, x) &= \int dy \eta(y - x_q) G_R(t, x - y) \\ &= -\theta(t) \int \frac{dp}{2\pi} \frac{\sin(\omega_p t)}{\omega_p} e^{-ip(x-x_q) - \epsilon\omega_p} \\ &= \frac{i}{2\pi} \theta(t) \left( K_0 \left( m\sqrt{(x-x_q)^2 + (\epsilon - it)^2} \right) \right. \\ &\left. - K_0 \left( m\sqrt{(x-x_q)^2 + (\epsilon + it)^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Особенно просто ответ выглядит в случае безмассового поля  $m \rightarrow 0$  (которое описывается конформной теорией с центральным зарядом  $c = 1$ ), когда

$$G_R^s(t, x) = \frac{i}{4\pi} \log \left( \frac{(x-x_q)^2 + (\epsilon + it)^2}{(x-x_q)^2 + (\epsilon - it)^2} \right), \quad (40)$$

а значит плотность энергии после квенча равна:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\varepsilon} \rangle_t^Q &= \langle \hat{\varepsilon} \rangle_t + \frac{\alpha^2}{4\pi^2} \left( \frac{\epsilon^2}{((x-x_q-t)^2 + \epsilon^2)^2} + \right. \\ &\left. + \frac{\epsilon^2}{((x-x_q+t)^2 + \epsilon^2)^2} \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Этот ответ полностью совпадает с результатами работы [24] (формула (34)) и работы [10] (формулы (2.7), (2.9)) с учетом выбора нормировки поля и определения плотности энергии.

Далее рассмотрим вопрос о расходимостях, которые могут возникнуть при вычислении плотности энергии после локального квенча вида  $\hat{Q}(x_q) = e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}V(\hat{\varphi}_s(x_q))}$ . При конечной величине ширины функции “размытия”  $\epsilon$  входящие в выражение (36) “размытые” запаздывающие функции Грина  $G_R^s(t, x)$  не содержат особенностей на действительной оси (см., например, выражения (39), (40)), поэтому все возможные расходимости могут возникать только при вычислении средних по начальным условиям. В общем случае эти средние определяются формой Вигнеровского функционала, что требует отдельного детального исследования. Однако для гауссовых начальных условий анализ расходимостей может быть проведен при помощи теоремы Вика. В этом случае возникают два типа спариваний  $\langle \Phi_s^2 \rangle_{i.c.}$

и  $G_K^s = \langle \phi_c \Phi_s \rangle_{i.c.}$ . Можно показать, что для конечной  $\epsilon$  интегралы, входящие в выражения (30) также будут сходящимися. Таким образом, для гауссовых начальных условий итоговый ответ для плотности энергии после рассматриваемого квенча будет конечным, по крайней мере, для полиномиальных  $V(\hat{\varphi}_s)$ . Заметим, что при анализе расходимостей важно различать ширину функции размытия  $\epsilon$  и параметр ультрафиолетового обрезания теории  $\lambda$  (34). При  $\epsilon \gg \Lambda^{-1}$  после квенча не возбуждаются степени свободы с энергией  $\sim \Lambda$ , а значит итоговый ответ не чувствителен к ультрафиолетовому поведению теории.

**5. Заключение.** В работе предложен новый подход к описанию локального возмущения (квенча) в скалярной теории поля с использованием техники Келдыша. В рамках данного подхода не используется процедура аналитического продолжения, которая в ряде случаев может быть неоднозначной [10]. Кроме того, представленный в работе метод позволяет рассматривать системы, находящиеся в исходный момент времени в произвольном начальном состоянии.

Для квенча  $\hat{Q}(x_q) = e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}\hat{\varphi}_s^2(x_q)}$  вычислена эволюция плотности энергии как для вакуумного начального состояния, так и для состояния с произвольной начальной функцией распределения  $f_p$ . Описаны два режима распространения фронта возмущения, зависящие от величины области локального возмущения (ширины функции “размытия”  $\epsilon$ ).

Подход к описанию динамики системы после мгновенного локального возмущения, полученный в данной работе, может быть обобщен на случай ненулевого взаимодействия, по крайней мере, в квазиклассическом приближении в технике Келдыша. Это является темой для дальнейших исследований.

- 
1. J. Berges, arXiv:1503.02907.
  2. P. Ruggiero, P. Calabrese, T. Giamarchi, and L. Foini, *SciPost Phys.* **13**, 111 (2022).
  3. P. Calabrese and J. Cardy, *J. Stat. Mech.* **2007**, P06008 (2007).
  4. P. Calabrese and J. Cardy, *J. Stat. Mech.* **2016**, 064003 (2016).
  5. S. Sotiriadis, P. Calabrese, and J. Cardy, *Europhys. Lett.* **87**, 20002 (2009).
  6. S. Sotiriadis and J. Cardy, *Phys. Rev. B* **81**, 134305 (2010).
  7. S.R. Das, D.A. Galante, and R.C. Myers, *J. High Energ. Phys.* **2015**, 73 (2015).
  8. S.R. Das, D.A. Galante, and R.C. Myers, *J. High Energ. Phys.* **2016**, 164 (2016).
  9. D. Szász-Schagrin, I. Lovas, and G. Takács, *Phys. Rev. B* **105**, 014305 (2022).
  10. D.S. Ageev, A.I. Belokon, and V.V. Pushkarev, *J. High Energ. Phys.* **2023**, 188 (2023).
  11. D. Horvath, S. Sotiriadis, M. Kormos, and G. Takacs, *SciPost Phys.* **12**, 144 (2022).
  12. M. Nozaki, T. Numasawa, and T. Takayanagi, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 111602 (2014).
  13. P. Caputa, J. Simón, A. Štikonas, and T. Takayanagi, *J. High Energ. Phys.* **2015**, 102 (2015).
  14. P. Calabrese and J. Cardy, *J. Stat. Mech.* **2007**, P10004 (2007).
  15. L.V. Keldysh, *ZhETF* **47**, 1515 (1964) [*Sov. Phys. JETP* **20**, 1018 (1965)].
  16. J. Schwinger, *J. Math. Phys.* **3**, 2 (1961).
  17. П.И. Арсеев, *Успехи физических наук* **185**, 1271 (2015).
  18. A.V. Leonidov and A.A. Radovskaya, *Pis'ma v ZhETF* **101**, 235 (2015).
  19. A.V. Leonidov and A.A. Radovskaya, *Eur. Phys. J. C* **79**, 55 (2019).
  20. A.A. Radovskaya and A.G. Semenov, *Eur. Phys. J. C* **81**, 704 (2021).
  21. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков, *Квантовые поля*, 5-е изд., Физматлит, М. (2005) [N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Quantum Fields*, Addison-Wesley, London (1983)].
  22. G. Mussardo, *Statistical field theory: an introduction to exactly solved models in statistical physics*, Oxford University Press, USA (2010).
  23. G. Delfino and M. Sorba, *Nucl. Phys. B* **974**, 115643 (2022).
  24. P. Caputa, M. Nozaki, and T. Takayanagi, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2014**, 093B06 (2014).