Письма в ЖЭТФ, том 55, вып.8, стр.460 - 464 25 апреля 1992 г.

# О ФУНКЦИОНАЛЕ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ ДЛЯ СВЕРХПРОВОДНИКОВ С АНИЗОТРОПНЫМ СПАРИВАНИЕМ

*М.Е.Житомирский*

*Институт теоретической физики им.Л.Д.Ландау РАН*

*117334, Москва*

Поступила в редакцию 19 марта 1992 г.

Найдены ограничения на значения феноменологических констант при градиентных членах в функционале Гинзбурга–Ландау. В определенной области параметров в нулевом магнитном поле возникает слоистая сверхпроводящая фаза. Показано, что для такого сверхпроводящего перехода нарушается обычная схема Ландау фазовых переходов второго рода.

Разнообразные свойства сверхпроводников с нетривиальным спариванием можно изучать, исходя, как и в обычном случае, из разложения Гинзбурга–Ландау (ГЛ). Основной интерес представляют сверхпроводники, описываемые близи $T_c$ многокомпонентным параметром порядка, преобразующимся по одному из неодномерных представлений точечной группы кристалла. Соответствующие им типы функционала ГЛ впервые рассматривались в работах [1-3]. Наиболее простым является функционал энергии для векторного параметра порядка $\Delta(\vec{k},\vec{r}) = \eta_x(\vec{r})\phi_x(\vec{k}) + \eta_y(\vec{r})\phi_y(\vec{k})$, возникающего на представлении $E_1$ группы $D_6$ (вид спинового состояния не играет роли):

$$\mathcal{F} = \int dV \left\{\alpha\tau\eta_i^*\eta_i + \beta_1(\eta_i^*\eta_i)^2 + \beta_2|\eta_i\eta_i|^2 + K_1 D_i^*\eta_j^* D_i\eta_j + K_2 D_i^*\eta_i^* D_j\eta_j + \right.$$
$$\left. + K_3 D_i^*\eta_j^* D_j\eta_i + K_4 D_z^*\eta_i^* D_z\eta_i + \frac{\vec{h}^2}{8\pi} - \frac{\vec{h}\vec{H}}{4\pi}\right\};\ \tau = \frac{T}{T_c} - 1;\ i,j = x,y,;\ D_k = \partial_k - i\frac{2e}{\hbar c}A_k. \qquad (1)$$

Прежде чем использовать энергию подобного вида для изучения конкретных физических свойств сверхпроводника, необходимо установить ограничения, накладываемые в теории Ландау на значения феноменологических констант. В этой работе мы изучим их лишь для энергии (1). Обобщение предложенного метода на случай функционалов других симметрий не составляет труда.

Все искомые ограничения связаны с тем, что в нулевом внешнем магнитном поле ($\vec{H}=0$) функционал ГЛ должен описывать переход от симметричной высокотемпературной фазы ($\vec{\eta}=0$) к сверхпроводящей ($\vec{\eta}\neq 0$) при понижении $T$. Отсюда, в первую очередь, вытекает необходимость положительной определенности членов четвертой степени [1-3], в применении к (1) это дает: $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > -\beta_1$. При этом, в зависимости от знака $\beta_2$ ниже $T_c$ возможны два типа однородных состояний различной симметрии:

$$\vec{\eta} \sim (1,0),\ \text{если}\ \beta_2 < 0; \qquad (2а)$$

$$\vec{\eta} \sim (1,i),\ \text{если}\ \beta_2 > 0. \qquad (2б)$$

Кроме того необходимо наложить ограничения на постоянные $K_n$, с которыми градиентные члены входят в энергию (1). До сих пор рассматривались лишь два типа таких условий.

Положим $\vec{A}(\vec{r}) = 0$, производные в этом случае сведутся к обычному дифференцированию, и тогда, чтобы разложение шло по правильно выбранному представлению, такие градиентные члены должны быть положительно определенными. В результате получаем следующие необходимые условия:

$$K_1 > 0, \quad K_4 > 0, \quad K_{123} > 0 \quad (K_{n...m} = K_n + ... + K_m). \tag{3}$$

Для параметра порядка, невзаимодействующего с магнитным полем ($e = 0$), условия (3) являются также достаточными. Мы покажем, что для функционала (1) это не так.

Достаточные условия можно получить, если требование положительной определенности отнести к градиентным членам при любом $\vec{A}(\vec{r})$, то есть считать, что они увеличивают энергию при произвольном выборе $D_i\eta_j$ в каждой точке пространства. Наряду с уже известным $K_4 > 0$, это приводит к более сильным ограничениям [4]:

$$K_1 > |K_3|; \tag{4а}$$

$$K_{123} > |K_2|. \tag{4б}$$

Условия (4) гарантируют, что переход происходит при $T = T_c$ из нормального состояния с $\vec{\eta} = 0$ в одно из состояний (2), что эти состояния устойчивы относительно возникновения любых неоднородностей, для них имеет место эффект Мейснера и обычный знак наклона $H_{c2}(T)$ при $T = T_c$. Тем не менее требуется понять насколько перечисленные свойства сверхпроводящего состояния связаны с условиями (4), а также насколько необходимо выполнение самих этих условий. Например, в теории слабой связи $K_1 = K_2 = K_3$, и даже небольшие эффекты, связанные с электрон-дырочной асимметрией или примесями, могут обратить знак неравенства (4а). К этому вопросу подводят также результаты работы [5], в которой была найдена "магнитная" неустойчивость состояния (2а).

Перейдем к новым единицам, обезразмерив функционал. Для этого полагаем $\alpha = 1$, $\beta_1 = 1$, $K_1 = 1$. Тогда

$$\frac{\vec{h}^2}{8\pi} \to \vec{h}^2, \quad D_k \to D_k = \frac{1}{\kappa}\partial_k + iA_k, \quad \beta_2 \to \beta_2/\beta_1, \quad K_n \to K_n/K_1,$$

$\kappa$ - параметр ГЛ. Для краткости, новые безразмерные постоянные ниже обозначаются по-старому.

Группа симметрии функционала (1) включает непрерывные трансляции, непрерывные повороты вокруг оси $\vec{z}$ и калибровочную группу. Ее неприводимые представления характеризуются волновым вектором $\vec{q}$ (далее $\vec{q}, \vec{A} \perp \vec{z}$; $\vec{h} \parallel \vec{z}$), звездой волнового вектора - окружностью в плоскости $\vec{x}\vec{y}$ и номером представления его малой группы - $C_2$. Поэтому, разложив параметр порядка и магнитное поле по плоским волнам:

$$\eta_i(\vec{r}) = \sum \eta_{iq}\exp(i\vec{q}\vec{r}), \quad \vec{A}(\vec{r}) = \sum \vec{A}_q \exp(i\vec{q}\vec{r}), \quad \vec{A}_q = \vec{A}^*_{-q}, \quad \vec{h}_q = i(\vec{q} \times \vec{A}_q), \tag{5}$$

получаем такие квадратичные члены:

$$\tau(|\eta_{10}|^2 + |\eta_{20}|^2) + \sum_{q\neq 0}\left[\left(\tau + \frac{K_{123}}{\kappa^2}\vec{q}^{\,2}\right)|\eta_q^{\parallel}|^2 + \left(\tau + \frac{1}{\kappa^2}\vec{q}^{\,2}\right)|\eta_q^{\perp}|^2\right]. \tag{6}$$

Новым в теории Ландау рассматриваемых переходов с комплексным параметром порядка является существование квадратичных по $\eta$ инвариантов, линейных по магнитному полю и составленных из базисных функций различных неприводимых представлений:

$$\frac{2}{\kappa}\left(\sum_{k=p+q} p_i A_{iq}\eta^*_{ik}\eta_{jp}\right)+\frac{K_2}{\kappa}\left(\sum_{k=p+q} p_j A_{iq}\eta^*_{ik}\eta_{jp}+\text{к.с.}\right)+$$

$$+\frac{K_3}{\kappa}\left(\sum_{k=p+q} p_j A_{iq}\eta^*_{jk}\eta_{ip}+\text{к.с.}\right). \tag{7}$$

Первый инвариант, который возникает также и для скалярных сверхпроводников, тождественно равен нулю в силу поперечности магнитного поля. Вторая и третья суммы в (7) обуславливают возникновение при $\vec{H}=\vec{0}$ слоистой сверхпроводящей фазы. Аналитическое решение уравнений ГЛ возможно только в некоторых предельных случаях. Перед тем как рассмотреть их, перечислим различные типы симметрии слоистой структуры. Магнитное поле, изменяющееся по закону $h=h\cos(\vec{q}\vec{r})$, обладает следующей группой симметрии (в скобках приведены образующие элементы, $\vec{q}\parallel\vec{x}$) :

$$G=\{L_{2z},\, RT_{\vec{a}/2},\, T_{\vec{b}},\, RU_{2x},\, \sigma_h\},$$

здесь $\vec{a}\parallel\vec{x}$, $a=2\pi/q$, $\vec{b}\parallel\vec{y}$, $R$ - инверсия времени. Для группы $G$ возможны несколько типов сверхпроводящих структур с максимальной симметрией, которые заведомо являются экстремалями функционала ГЛ:

$$\eta_x\sim i,\ \ \eta_y\sim\cos(\vec{q}\vec{r})\ \ \{\exp(i\pi)L_{2z},\ \ \exp(i\pi)RT_{\vec{a}/2},\ \ T_{\vec{b}},\ \ \exp(i\pi)RU_{2x}\} \tag{8а}$$

$$\eta_x\sim\cos(\vec{q}\vec{r}),\ \ \eta_y\sim i\ \ \{\exp(i\pi)L_{2z},\ \ \exp(i\pi)RT_{\vec{a}/2},\ \ T_{\vec{b}},RU_{2x}\} \tag{8б}$$

$$\eta_x\sim\sin(\vec{q}\vec{r}),\ \ \eta_y=0\ \ \{L_{2z},\ \ \exp(i\pi)RT_{\vec{a}/2},\ \ T_{\vec{b}},RU_{2x}\} \tag{8в}$$

$$\eta_x=0,\ \ \eta_y\sim\sin(\vec{q}\vec{r})\ \ \{L_{2z},\ \ \exp(i\pi)RT_{\vec{a}/2},\ \ T_{\vec{b}},\exp(i\pi)RU_{2x}\} \tag{8г}$$

Нарушение условий (4а) и (4б) приводит к двум путям развития неустойчивости однородных состояний в состояния (8а) и (8б) соответственно.

Разумеется все элементы симметрии в (8) должны быть представлены магнитными операторами, которые введены в случае периодических магнитных полей в [6]. Для магнитных трансляций выполняется:

$$T_{\vec{a}}T_{\vec{b}}=T_{\vec{b}}T_{\vec{a}}\exp\left(i\frac{2e}{\hbar c}\oint\vec{A}d\vec{s}\right), \tag{9}$$

где интеграл берется по границе элементарной ячейки. Условие периодичности для сверхпроводящего параметра порядка записывается в виде:

$$T_{\vec{a}}\Delta(\vec{k},\vec{r})=\exp(i\varphi_1)\Delta(\vec{k},\vec{r}),\ \ T_{\vec{b}}\Delta(\vec{k},\vec{r})=\exp(i\varphi_2)\Delta(\vec{k},\vec{r}).$$

Это означает коммутативность магнитных трансляций на основные периоды. Вместе с (9) отсюда следует вывод, что слоистая сверхпроводящая структура, симметричная относительно непрерывных трансляций вдоль одного направления и дискретных вдоль другого, может возникнуть лишь при нулевом потоке магнитного поля через образец. Разрушение слоистых фаз (8а) и (8б) магнитным полем происходит, как и в обычном случае, за счет проникновения вихрей (цепочек вихрей), имеющих конечную энергию, что должно приводить к эффекту Мейснера.

Будем считать нарушенным только условие (4a). Исследуем появление неоднородной структуры соответствующей симметрии (8a). Вблизи точки перехода амплитуды $\eta_{iq}$ с волновыми векторами кратными $2\pi/a$ малы по отношению к амплитуде основной гармоники. Поэтому подставим в (1) $\eta_x \sim \mu$, $\eta_y \sim i\nu\sqrt{2}\cos(\vec{q}\vec{r})$, $h = h\cos(\vec{q}\vec{r})$, тогда энергия примет вид:

$$\mathcal{F}/V = \tau\mu^2 + \left(\tau + \frac{q^2}{\kappa^2}\right)\nu^2 + 2h^2\left(1 + \frac{\lambda^2}{q^2}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{\kappa}K_3 h\mu\nu + \beta_{12}\left(\mu^4 + \frac{3}{2}\nu^4\right) +$$

$$+2(\beta_1 - \beta_2)\mu^2\nu^2, \quad \lambda^2 = \left(\mu^2 + \frac{1}{2}K_{123}\nu^2\right). \tag{10}$$

Минимизируя члены, зависящие от магнитного поля по $h$, получаем:

$$\Delta\mathcal{F}_h/V = -\frac{K_3^2}{\kappa^2}\frac{q^2\mu^2\nu^2}{q^2+\lambda^2}, \quad h = -\frac{K_3 q^2\mu\nu}{\sqrt{2}\kappa(q^2+\lambda^2)}. \tag{11}$$

Затем минимизируем по $q$ :

$$\begin{array}{lll} \Delta\mathcal{F}_{qh}/V = -\frac{\nu^2}{\kappa^2}(|K_3|\mu - \lambda)^2, & q^2 = |K_3|\mu\lambda - \lambda^2, & \text{если } |K_3|\mu > \lambda; \\ \Delta\mathcal{F}_{qh}/V = 0, & q^2 = 0; & \text{если } |K_3|\mu < \lambda. \end{array} \tag{12}$$

Объеденим (12) с членами в (10), независящими от $h$ и $q$:

$$\mathcal{F}/V = \tau(\mu^2 + \nu^2) + \beta_{12}(\mu^2+\nu^2)^2 + \frac{1}{2}\beta_{12}\nu^4 - 4\beta_2\mu^2\nu^2 - \frac{\nu^2}{\kappa^2}(|K_3|\mu - \lambda)^2. \tag{13}$$

При больших по модулю, отрицательных $\beta_2$ минимум (13) с учетом (12) дает фаза (2a): $\nu^2 = 0$, $\mu^2 = |\tau|/2\beta_{12}$. Однако как было отмечено в [5], при $|K_3| \geq 2\kappa\sqrt{\beta}_2 + 1$ она теряет устойчивость. Исследование энергии (13) показывает, что в этой области параметров сверхпроводящий переход по-прежнему является переходом второго рода и происходит при $\tau = 0$ в фазу (8a). Считая $\kappa \gg 1$ и, соответственно, $|K_3| \gg 1$ для выполнения указанного условия, находим:

$$\Delta^2 = |\tau| \bigg/ \left(2\beta_{12} - \left(\frac{K_3^2}{\kappa^2} + 4\beta_2\right)\zeta\right),$$

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{K_3^2}{\kappa^2} + 4\beta_2\right) \bigg/ \left(\frac{K_3^2}{\kappa^2} + 4\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_{12}\right), \quad \mu^2 = \Delta^2(1-\zeta), \quad \nu^2 = \Delta^2\zeta. \tag{14}$$

Вместе с (11) и (12) это означает, что в слоистой фазе $q^2$, $h \sim |\tau|$, и ее симметрия непрерывно меняется вместе с $q$ при удалении от точки перехода.

Удобно представить себе следующую интересную с точки зрения эксперимента картину. На диаграмме (например в плоскости $P, T$) сверхпроводящую и нормальную фазы разделяет кривая, которая может пересекаться с линией $\beta_2(P,T) = 0$. Если нарушено также условие (4a) и $|K_3|/\kappa \ll 1$, то в области где

$$-\frac{(|K_3|-1)^2}{4\kappa^2} \leq \beta_2(P,T) \leq \frac{K_3^4}{2\kappa^4} \tag{15}$$

возникает фаза (8a). Левая граница соответствует линии фазовых переходов второго рода со скачком теплоемкости

$$\Delta C = T_c\left(\frac{\partial\beta_2}{\partial T}\right)^2 \frac{4\tau^2}{\beta_{12}^2(\beta_{12} + (|K_3|-1)K_{123}/\kappa^2)}. \tag{16}$$

При ее пересечении с линией сверхпроводящих переходов возникает поликритическая точка, в которой сходятся три кривые переходов второго рода. Исчезновение при приближении к $T_c$ скачка теплоемкости (16) делает возможным такой тип пересечения.

Наличие в функционале энергии инвариантов (7) нарушает обычную схему Ландау для фазовых переходов второго рода. Хотя при $\tau = 0$ происходит переход второго рода на определенном представлении ($q = 0$), симметрию сверхпроводящей фазы при $\tau < 0$ в области параметров (15) уже нельзя определить путем минимизации одних только инвариантов четвертой степени, построенных на данном представлении.

Правая граница (полученная в приближении $|K_3| \gg 1$) соответствует переходу первого рода между фазами (8а) и (2б), со скрытой теплотой:

$$Q = T_c \frac{\partial \beta_2}{\partial T} \frac{\tau^2}{4}.$$

Подставив в (1) более общее выражение для $\eta_x$ и $\eta_y$, можно показать, что никаких других слоистых фаз с симметрией меньшей максимальной при малых $|K_3|/\kappa$ (малых $\beta_2$) не возникает. В то же время при $|K_3|/\kappa \geq 1$, раньше перехода в фазу (2б) нарушается условие устойчивости фазы (8а):

$$\frac{K_3^2}{\kappa^2} + 3\beta_2 > \beta_2^2.$$

При этом возникнет фаза с меньшей симметрией $\{\exp(i\pi)L_{2z},\ T_{\vec{a}},\ T_{\vec{b}}\}$.

Дополнительные к (3) необходимые ограничения получаются из условия положительной определенности членов четвертой степени в (13):

$$\frac{(|K_3| - 1)^2}{\kappa^2} < (-4\beta_2 + (2 + \sqrt{6})\beta_{12}). \tag{17}$$

Аналогичные результаты для фазы (8б) можно найти, если во всех выше приведенных формулах заменить $|K_3| - 1$ на $|K_2| - K_{123}$. В частности, появится еще одно необходимое условие:

$$\frac{(|K_2| - K_{123})^2}{\kappa^2} < (-4\beta_2 + (2 + \sqrt{6})\beta_{12}). \tag{18}$$

При одновременном нарушении условий (4а) и (4б) возникают фазы с меньшей симметрией, для которых также существуют подобные ограничения, хотя в явном виде их выписать нельзя.

В заключение отметим, что, с учетом реальных значений констант (для $UPt_3$, например, $\kappa \sim 20 - 40$, $\beta_2 \sim 0,2\beta_1$), ограничения типа (17) и (18) на коэффициенты в функционале (1) оказываются ненамного сильнее условий (3).

---


1. Г.Е.Воловик, Л.П.Горьков, ЖЭТФ **88**, 1412 (1985).
2. K.Ueda, and T.M.Rice, Phys. Rev. B **31**, 7114 (1985).
3. E.I.Blount, Phys. Rev. B **32**, 2935 (1985).
4. М.Е.Житомирский, Письма в ЖЭТФ **49**, 333 (1989).
5. M.Palumbo, P.Muzikar, and J.A.Sauls, Phys. Rev. B **42**, 2681 (1990).
6. М.Е.Житомирский, И.А.Лукьянчук, ЖЭТФ **101**, N6, (1992).