

# Динамика “дышащих” скирмионов<sup>1)</sup>

И. С. Лобанов, В. М. Уздин<sup>2)</sup>

Университет ИТМО, физический факультет, 197101 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 21 марта 2024

После переработки 9 апреля 2024 г.

Принята к публикации 10 апреля 2024 г.

Для описания динамики хиральных топологических систем получено обобщенное уравнение Тилиа, учитывающее заданный набор низкоэнергетических возбуждений равновесной магнитной структуры. Для магнитных скирмионов включена “дыхательная” мода, соответствующая изменению их размера. Исследована релаксация магнитной структуры при изменении магнитного поля. Показана важность сохранения гамильтоновой формы уравнений движения. Радиус и спиральность скирмиона оказываются канонически сопряженными переменными, и только их одновременный учет позволяет воспроизвести основные особенности магнитной релаксации при включении (выключении) поля, сопровождающейся осцилляциями радиуса.

DOI: 10.31857/S1234567824100069, EDN: SKAUJN

**1. Введение.** Доменные стенки и другие неколлинеарные магнитные структуры рассматриваются в настоящее время, как кандидаты на роль носителей информации в новых технологиях беговой магнитной памяти [1, 2]. Особый интерес представляют топологические магнитные структуры, которые можно характеризовать топологическими индексами – целыми числами, сохраняющимися при непрерывном изменении намагниченности [3]. Эти системы могут быть локализованы в малой области пространства, что позволяет иметь высокую плотность магнитной записи. Неизменность топологических индексов способствует их устойчивости вплоть до комнатных температур, а возможность быстрого движения под действием малых токов [4] приводит к высокой скорости и энергоэффективности таких технологий памяти. Скирмионы и другие топологические структуры, называемые топологическими солитонами, могут быть использованы и в устройствах передачи информации, сенсорных и логических спинтронных устройствах [5, 6].

Вместе с тем, несмотря на относительно малый размер топологических магнитных структур, даже двумерные скирмионы, наблюдаемые при комнатных температурах, обычно содержат сотни тысяч и даже миллионы отдельных магнитных моментов [7, 8]. Это усложняет анализ их устойчивости и моделирование движения, особенно при наличии локализованных магнитных структур, взаимодействующих

друг с другом. Устойчивость топологических солитонов относительно тепловых флуктуаций и случайных возмущений может быть количественно оценена на основе теории переходного состояния [9, 10]. Стохастическое моделирование динамики здесь не представляется возможным вследствие фундаментальной проблемы “редких событий”: период осцилляций отдельных моментов, как правило, оказывается на 10–15 порядков меньше характерного времени жизни магнитной системы [11].

В общем случае динамика магнитных структур в рамках моделей гейзенберговского типа задается уравнениями Ландау–Лифшица–Гильберта (ЛЛГ) для каждого магнитного момента [12]. Большое число степеней свободы требует решения системы связанных уравнений, что не позволяет проводить моделирование динамики на достаточно больших временах, представляющих интерес для приложений. Вследствие того, что магнитные скирмионы и другие локализованные магнитные топологические структуры при непрерывных преобразованиях намагниченности сохраняют топологические индексы, их пространственная форма кардинально не меняется и в простейшем приближении их часто рассматривают, как жесткие квазичастицы, не меняющие своего магнитного профиля. В этом предположении, из уравнений ЛЛГ, можно получить выражение для скорости магнитной структуры, перемещающейся в пространстве, как единое целое. Такой подход был использован А. Тилем для расчета скорости движения доменных стенок [13]. В дальнейшем он использовался и при описании динамики скирмионов и других тополо-

<sup>1)</sup>См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала [www.jetpletters.ac.ru](http://www.jetpletters.ac.ru)

<sup>2)</sup>e-mail: v\_uzdin@mail.ru

гических структур [14, 15]. Для квазидвумерных систем положение жесткого скирмиона задается координатами  $x$  и  $y$  его центра [16]. Движение топологических солитонов может быть вызвано спин-поляризованным током [17], неоднородным магнитным полем [18] или градиентом анизотропии [19]. Соответствующие члены, входящие в правую часть уравнений ЛЛГ или Тиля, подобны силам в уравнениях движения материальной точки [20, 21].

Хотя приближение жесткой формы позволяет легко описывать динамику топологических солитонов, иногда это приближение оказывается недостаточным, особенно когда необходимо точно определить траекторию движения в пространственно-неоднородных средах через достаточно большой промежуток времени. Поэтому были разработаны теории, позволяющие выйти за пределы этого приближения, учитывая тепловые эффекты [22] и усреднение по высокочастотным возбужденным состояниям локализованной магнитной структуры [23]. В то же время в скирмионных структурах наряду с модами, соответствующими их движению в целом, существуют другие квазиузеловые моды и низкочастотные возбуждения [24], которые могут существенно влиять на магнитный профиль и движение, особенно при наличии неоднородностей. В настоящей работе получено обобщенное уравнение Тиля, которые учитывают соответствующие степени свободы. Общий теоретический подход используется для описания релаксации скирмионных состояний при изменении внешнего магнитного поля. Сравнение с результатами моделирования динамики для совокупности всех магнитных моментов, составляющих систему, показывает важность сохранения гамильтоновой формы уравнений движения при выделении набора возбуждений, включенных в обобщенное уравнение Тиля.

**2. Микромагнитная модель и анзац для скирмиона.** Будем рассматривать тонкую магнитную пленку с взаимодействием Дзялошинского–Мории (ДМ), в которой могут существовать различные хиральные топологические солитоны [25], в частности, магнитные скирмионы. Описание таких структур возможно на основе обобщенной модели Гейзенберга, включающей наряду с симметричным обменным взаимодействием магнитную анизотропию, антисимметричный обмен ДМ и взаимодействие со внешним магнитным полем [9, 26]. Магнитное дипольное взаимодействие для тонкой пленки может учитываться посредством перенормировки параметра анизотропии [27]. В рамках непре-

рывной микромагнитной модели энергию системы запишем в виде [28, 29]

$$E = d \int_{\Omega} (w_{ex} + w_{DM} + w_a + w_z) dS. \quad (1)$$

Здесь интегрирование идет по поверхности пленки  $\Omega$ , через  $d$  обозначена ее толщина. Магнитные конфигурации, однородные по толщине пленки, будем задавать единичным вектором, направленным вдоль намагниченности в каждой точке поверхности  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ . В сферической системе координат

$$\mathbf{n} = (\cos \psi \sin \theta, \sin \psi \sin \theta, \cos \theta).$$

Плотности различных вкладов в энергию задаются следующим образом: гейзенберговский обмен в (1) определяется параметром обменной жесткости  $A$ :

$$w_{ex} = A(\nabla \mathbf{n})^2,$$

плотность энергии взаимодействия ДМ – величиной и направлением вектора ДМ. Будем для этого вклада использовать выражение,

$$w_{DM} = D(n_z \nabla \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \nabla)n_z),$$

которое стабилизирует доменные стенки неелевского типа.

Плотность энергии одноосной анизотропии задается константой анизотропии  $K > 0$ . Ось анизотропии  $\mathbf{z}$ , предполагается перпендикулярной плоскости пленки:

$$w_a = K(1 - n_z^2).$$

Наконец, плотность зеэмановской энергии взаимодействия с внешним полем  $H$ , направленным вдоль оси  $z$ , пропорциональна намагниченности насыщения  $M_s$ :

$$w_z = \mu_0 H M_s (1 - n_z).$$

Величины  $A$ ,  $D$ ,  $K$ ,  $M_s$  будем предполагать одинаковыми по всей магнитной пленке. В качестве естественной меры длины удобно использовать период спиновой спирали  $L_D = 4\pi A/D$ .

Магнитным скирмионам соответствуют локальные минимумы функционала (1). Точного аналитического решения для поля  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ , соответствующего скирмиону, при произвольных значениях магнитных параметров не существует. Однако, приближенно, магнитный профиль достаточно хорошо воспроизводится выражениями, содержащими всего несколько параметров, имеющих простой физический смысл. Такие анзацы, на основе аналитических выражений для профиля доменных стенок [30], хорошо воспроизводит экспериментально наблюдаемые магнитные конфигурации скирмионов в системе Fe/Ir(111) [31].

Учитывая аксиальную симметрию скирмиона, зададим  $\mathbf{r}$  в полярных координатах относительно центра скирмиона  $(X, Y)$

$$\mathbf{r} = (X + r \cos \phi, Y + r \sin \phi).$$

В этом случае зенитный угол  $\theta$  зависит только от  $r$ , а азимутальный  $\psi$  связан с  $\chi$  соотношением  $\psi = \phi - \chi$ , где постоянная  $\chi$ , называемая спиральностью (*helicity*) структуры, представляет собой угол между намагниченностью в плоскости пленки и радиальным направлением от центра скирмиона. Равновесная спиральность определяется направлением вектора ДМ и в рассматриваемом случае неелевского скирмиона равна 0.

Для зависимости  $\theta(r)$  используются выражения (анзацы), включающие в качестве подгоночных параметров радиус скирмиона и ширину доменной стенки на его границе. Конкретный аналитический вид в разных работах отличается, хотя равновесный профиль выглядит достаточно близко. Так в [31, 29, 32] используется зависимость

$$\theta = 2 \arctan \exp \frac{r - \rho}{w} + 2 \arctan \exp \frac{r + \rho}{w} - \pi, \quad (2)$$

тогда как в [28]:

$$\theta = 2 \arctan \frac{\sinh(\rho/w)}{\sinh(r/w)}, \quad (3)$$

где  $\rho$  – радиус скирмиона, а  $w$  – ширина его доменной стенки.

Рассчитанная в рамках микромагнитной модели (1) магнитная конфигурация неелевского скирмиона при параметрах, используемых ниже, представлена в дополнительных материалах. Там же приведена магнитная текстура блоховского скирмиона, которая получается при другом виде взаимодействия ДМ, и показаны величины, входящие в анзацы (2) и (3).

Энергия модельного скирмиона может быть найдена подстановкой анзаца (2) или (3) в функционал (1). Так подстановка (3) дает следующее выражение для энергии [28]:

$$E = 2\pi d (AI_1 + D \cos \chi I_2 + KI_3 + HI_4), \quad (4)$$

в терминах интегралов

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \left( \left( \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \rho d\rho, \\ I_2 &= \int_0^\infty \left( \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{\sin(2\theta)}{2\rho} \right) \rho d\rho, \\ I_3 &= \int_0^\infty \sin^2 \theta \rho d\rho, \quad I_4 = \int_0^\infty (1 - \cos \theta) \rho d\rho. \end{aligned}$$

Для интегралов может быть получена приближенная оценка [28]:

$$\begin{aligned} I_1 &\sim 2 \left( \frac{\rho}{w} + \frac{w}{\rho} \right), \quad I_2 \sim -\pi\rho, \\ I_3 &\sim 2w\rho, \quad I_4 \sim 2 \left( \frac{\rho^2}{2} + \frac{\pi^2 w^2}{24} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Использование вместо приближения (3) выражения (2) дает близкие значения для энергии скирмиона, так как основной вклад в обменную энергию происходит от области вблизи доменной границы, в окрестности которой обе аппроксимации имеют одинаковые асимптотики. Например, полученные в работе [32] вклады в энергию для анзаца (2) совпадают с формулами (5), за исключением множителя перед  $w^2$  в интеграле  $I_4$ , который равен  $\approx 0.76$  для анзаца (3) и  $\approx 0.82$  для (2).

Энергия произвольной магнитной текстуры может быть найдена численно. Мы использовали вариант квадратурных формул, дающих ошибку  $o(h^3)$  для элемента размера  $h$  (см. дополнительные материалы). Намагниченность задается в узлах квадратной решетки, которая разбивается на элементы, содержащие  $3 \times 3$  узлов. Внутри каждого элемента намагниченность определяется биквадратичной интерполяцией по этим узлам. На границе элементов выполняются условия непрерывности. Входящие в формулы для энергии производные находятся из биквадратичной интерполяции. Интегралы приближенно вычисляются с помощью трехточечных квадратурных формул Гаусса–Лобатто.

**3. Обобщенное уравнение Тилиа для топологических солитонов.** Динамика намагниченности топологических солитонов может быть описана уравнением ЛЛГ

$$\partial_t \mathbf{n} = -\gamma \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{\text{eff}} + \alpha \mathbf{n} \times \partial_t \mathbf{n} + \mathbf{T}, \quad (6)$$

где  $\gamma$  – гиромагнитное отношение,  $\alpha$  – параметр затухания, а слагаемое  $\mathbf{T}$  описывает связь намагниченности со спин-поляризованным электрическим током [17]. Эффективное магнитное поле  $\mathbf{H}^{\text{eff}}$  зависит от распределения намагниченности

$$\mathbf{H}^{\text{eff}} = -\frac{1}{\mu_0 M_s} \frac{\delta E}{\delta \mathbf{n}}.$$

Отметим, что если записать уравнение ЛЛГ в полярных координатах, то оно будет иметь гамильтонов вид, если обобщенной координате сопоставить угол  $\psi_i$ , а канонически сопряженному импульсу  $\cos \theta_i$  – [12, 33].

Для численного интегрирования уравнений ЛЛГ будем использовать полуневяную схему [34], которая сохраняет нормировку векторов намагниченности.

Численное решение уравнений ЛЛГ для топологических солитонов в общем виде встречает вычислительные сложности в связи с большим числом степеней свободы, связанных с внутренними степенями свободы локализованной магнитной структуры. Однако, не все эти степени свободы оказываются одинаково важными при описании отклика на внешние воздействия. Если у внешнего возмущения отсутствуют резонансные свойства, то наиболее существенными должно быть низкоэнергетические возбуждения и степени свободы, от которых энергия системы не зависит, называемые нулевыми модами. К ним относится, прежде всего, трансляционные степени свободы. Учет только таких мод для доменных стенок привел к уравнениям Тиля [13], которое может быть использовано, как простейшее приближение и для описания динамики скирмионов [16].

В более общей постановке задачи форма топологического солитона не обязательно сохраняется, и ее изменение можно учесть введением дополнительных параметров в анзац для магнитного профиля, например, как в (2) или (3). В этом случае можно получить уравнения, которые описывают динамику этих параметров, представляющие собой обобщенные уравнения Тиля [23, 35].

Полагая, что намагниченность описывается анзацем

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}; t) = \mathbf{n}(\mathbf{a}(t), \mathbf{r}) \quad (7)$$

с некоторым набором параметров  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_M)$ , и сужая уравнение (6) на степени свободы  $\mathbf{a}$ , получаем обобщенные уравнения Тиля в общем виде [23]:

$$D_{ij}\dot{\mathbf{a}}_j - G_{ij}\dot{\mathbf{a}}_j = F_i, \quad (8)$$

где  $G$  – антисимметричная гиротропная матрица,

$$G_{ij} = \frac{M_s}{\gamma} \int_{\Omega} \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial a_i} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial a_j} d\mathbf{r},$$

$D$  – симметричная матрица коэффициентов диссипации:

$$D_{ij} = \frac{\alpha M_s}{\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial a_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial a_j} d\mathbf{r},$$

а обобщенная сила  $F_i$  имеет вид

$$F_i = - \int_{\Omega} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial a_i} d\mathbf{r} = - \frac{\partial E}{\partial a_i}.$$

Будем считать, что общее уравнение (7) сводится к (3), а параметрами  $a_i$ , от которых зависит магнитная конфигурация, являются радиус скирмиона  $\rho$ , его спиральность  $\chi$  и ширина доменной стенки  $\omega$ . Изменение радиуса является одним из самых низкоэнергетических возбуждений системы, ниже которого по энергии лежат только нулевые трансляционные

моды. Эта степень свободы представляет наибольший интерес при рассмотрении динамического поведения на временах, представляющих практический интерес. Толщину доменной стенки в дальнейшем мы фиксируем так как ей соответствует большая энергия возбуждения и характерное время ее релаксации гораздо меньше, чем у радиуса. Спиральность оставим в качестве параметра, поскольку эта степень свободы оказывается сильно связана с радиусом.

Выбирая в качестве коллективных координат радиус  $\rho$  и спиральность  $\chi$ , получаем уравнения динамики, подставляя анзац (3) в обобщенное уравнение Тиля (8).

Так как магнитная пленка предполагается изотропной и внешнее магнитное поле однородным, динамические уравнения на  $\rho$  и  $\chi$  не зависят от положения центра скирмиона:

$$\begin{cases} \alpha \frac{2\pi I_3}{w^2} \dot{\rho} + \frac{2\pi I_3}{w} \dot{\chi} = \frac{\partial E}{\partial \rho}, \\ -\frac{2\pi I_3}{w} \dot{\rho} + \alpha 2\pi I_3 \dot{\chi} = \frac{\partial E}{\partial \chi}. \end{cases} \quad (9)$$

Движение центра скирмиона при учете тока спинового переноса  $j$  [36] описывается классическим уравнением Тиля:

$$\begin{cases} \alpha \pi I_1 \dot{X} + 4\pi \dot{Y} = \frac{\partial E}{\partial X} - j_x \pi I_1, \\ -4\pi \dot{X} + \alpha \pi I_1 \dot{Y} = \frac{\partial E}{\partial Y} - j_y \pi I_1. \end{cases} \quad (10)$$

Коэффициенты в этих уравнениях представляют собой интегралы, определяемые магнитной текстурой скирмиона, которая может меняться со временем и зависит, в частности, от радиуса скирмиона, спиральности и толщины доменной стенки. Эти коэффициенты ранее возникали в выражении для энергии (1). Приведенные выше приближенные значения соответствующих интегралов (5) [28] имеют достаточную точность для воспроизведения динамики скирмионов, за исключением обменного интеграла  $I_1$ , для которого требуется более точное приближение:

$$I_1 \approx 2 \left( \xi + \frac{1}{\xi} + \frac{\pi^2}{12\xi^3} + \frac{7\pi^4}{240\xi^5} + \frac{31\pi^6}{1344\xi^7} \right),$$

где  $\xi = \rho/w$ .

Для того, чтобы получить динамические уравнения для изменения размера скирмиона при фиксированных остальных параметрах, входящих в (3), достаточно в уравнениях (9) положить  $\dot{\chi} = 0$ . При этом дыхательная мода останется единственной учитываемой в (3), и естественно ожидать монотонного изменения радиуса в процессе релаксации при изменении внешних условий.

Отметим что, в отсутствие диссипации одновременный учет степеней свободы, соответствующих из-

менению радиуса и спиральности сохраняет гамильтонову структуру уравнений динамики, причем спиральность и радиус оказываются канонически сопряженными переменными. Аналогично, сопряженными переменными можно считать и степени свободы, связанные с движением вдоль осей  $x$  и  $y$ .

Степень свободы, связанная с изменением размера структуры, как коллективная переменная может быть определена по-разному. Такая мода возникает, как собственный вектор, соответствующий одному из наименьших собственных чисел, равновесного гессиана энергии [9], и как низкоэнергетическое возбуждение при анализе линеаризованного уравнения ЛЛГ [24], и на основе приведенных выше анзацев (2) и (3). Хотя изменение формы и профиля скирмиона при возбуждении этих мод похоже, они не совпадают тождественно и могут быть связаны с другими степенями свободы магнитной системы по-разному.

**4. Релаксация скирмиона при изменении магнитного поля.** Рассмотрим процесс релаксации размера и магнитного профиля скирмиона при включении и выключении внешнего магнитного поля на основе полного уравнения ЛЛГ и сокращенного описания, включающего радиус скирмиона в качестве одной из переменных в обобщенном уравнении Тилия. Однородное магнитное поле не нарушает аксиальной симметрии системы, но сильно влияет на равновесный радиус локализованной магнитной структуры. Поэтому естественно ожидать, что учет этой степени свободы позволит воспроизвести основные особенности динамического поведения топологического солитона. Изменение радиуса скирмиона проявляется также при движении в гранулированной среде с изменяющейся перпендикулярной магнитной анизотропией [37], при сужении или уширении магнитной дорожки, на которой находится скирмион до величины, сравнимой с его собственным размером [38], в процессе коллапса скирмиона при движении вдоль пути с минимальным перепадом энергии [9, 39]. Поэтому учет таких возбуждений важен для аккуратного описания отклика на различные внешние возмущения.

На рисунке 1с, показана зависимость радиуса скирмиона от времени в процессе установления равновесия. Мы рассмотрели случай анизотропии  $K/(M_s B_0) = 1.28$ , что соответствует  $\rho/w \approx 5.54$  для равновесного скирмиона в отсутствие внешнего поля. Сплошная (красная) кривая соответствует учету всех степеней свободы в уравнении ЛЛГ, а штрихпунктирная (синяя) учету только радиальной переменной в обобщенном уравнении Тилия. В последнем случае имеет место быстрое монотонное

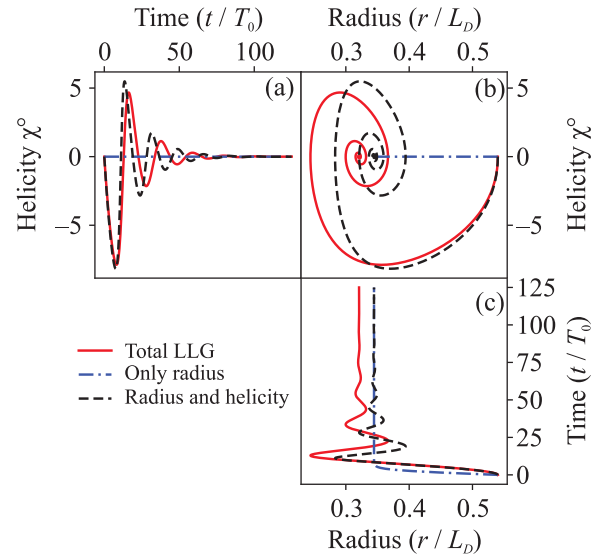


Рис. 1. (Цветной онлайн) Динамика скирмиона при включении внешнего магнитного поля  $B = 0.032B_0$ . Начальное состояние соответствует равновесному скирмиону в отсутствие магнитного поля. Красная сплошная, черная пунктирная и синяя штрихпунктирная линии – решения, полученные с помощью полной системы уравнений ЛЛГ, обобщенного уравнения Тилия с учетом возможности изменения угла хиральности и радиуса и только радиуса, соответственно

уменьшение радиуса от равновесного значения в отсутствие поля до значения в поле  $B = 0.032 B_0$  при неизменных значениях остальных параметров анзаца (3), где  $B_0 = D^2/(2M_s A)$  – характерное магнитное поле. Ларморовская частота  $T_0^{-1} = \gamma B_0$  для этого поля задает естественную единицу времени. Совместное решение уравнений ЛЛГ для всех магнитных моментов демонстрирует гораздо более медленную релаксацию радиуса, сопровождающуюся осцилляциями около нового положения равновесия. Само значение равновесного радиуса также немного отличается в этих двух случаях. Причина различия заключается в том, что при увеличении магнитного поля меняется и ширина доменной стенки скирмиона, хотя ее относительное изменение и значительно меньше, чем у радиуса. При учете изменения ширины доменной стенки на основе анзаца (3) система обобщенных уравнений Тилия будет включать три уравнения (см. дополнительные материалы). Процесс релаксации оказывается ближе к решению полной системы уравнений ЛЛГ для всех степеней свободы, но качественно не отличается от представленного на рис. 1. Осцилляции радиуса при решении полной системы уравнений ЛЛГ говорят о том, что энергия,

связанная с возбуждением дыхательной моды перекачивается в другие моды, а затем возвращается обратно, постепенно рассеиваясь. Величина диссипации  $\alpha$  в уравнении ЛЛГ (6) принята равной 0.05. Это значение характерно для ферромагнитных металлов и разбавленных магнитных полупроводников [17]. Колебания затухают быстрее, если увеличить параметр затухания. Используемый анзац (3) позволяет указать основную моду, которая оказывается связанной с дыхательной в процессе релаксации. Ей соответствует степень свободы, определяющая спиральность скирмиона. Релаксация радиуса при учете и этой степени свободы в обобщенном уравнении Тиля показана на рис. 1 пунктирной (черной) линией.

На рисунке 1а представлены зависимости параметра хиральности от времени, полученные из уравнений ЛЛГ и обобщенного Тиля в тех же приближениях. На рисунке 1б показана зависимость радиуса от параметра спиральности, представляющая собой спираль, напоминающую фазовую траекторию осциллятора с затуханием. Это, по-видимому, не случайное сходство. Обобщенное уравнение Тиля при учете степеней свободы, связанных с изменением радиуса и спиральности можно представить, как и полное уравнение ЛЛГ, в гамильтоновом виде. Если радиус рассматривать, как обобщенную координату, то угол, определяющий спиральность, представляет собой канонически сопряженный обобщенный импульс. Именно эти степени свободы оказываются связанными, и их совместное использование в качестве переменных в обобщенном уравнении Тиля приводит к динамическому поведению, близкому к результату решения полного уравнения ЛЛГ. Хотя спиральность меняется всего примерно на 4 градуса, энергия, связанная с этим возбуждением, того же порядка, что при изменении радиуса скирмиона на 25%. Отметим, что трансляционные моды, соответствующие движению вдоль перпендикулярных направлений в определенном приближении также являются канонически сопряженными. На рисунке 2 показана релаксация радиуса и хирального угла скирмиона при выключении магнитного поля. Здесь, даже с тем же параметром диссипации  $\alpha = 0.05$ , релаксация при решении полного уравнения ЛЛГ идет без нескольких осцилляций: радиус и угол проскакивают точку равновесия, но затем монотонно приближаются к равновесному значению. Такое же поведение получается и из обобщенного уравнения Тиля: включающего эти две степени свободы. Соответствующие кривые показаны, как и на рис. 1, красной сплошной и синей штрих-пунктирной линиями. Если оставить только

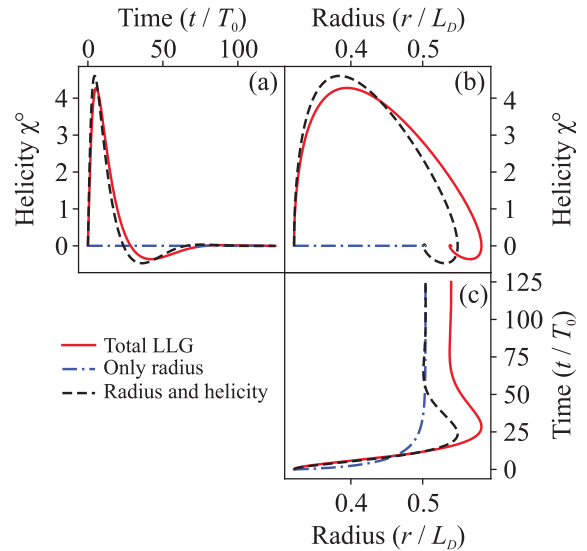


Рис. 2. (Цветной онлайн) Релаксация скирмиона, находящегося в равновесном состоянии во внешнем магнитном поле  $B = 0.032B_0$ , при отключении поля. Красная сплошная, черная пунктирная и синяя штрих-пунктирная линии – решения, полученные с помощью полной системы уравнений ЛЛГ, обобщенного уравнения Тиля с учетом возможности изменения угла хиральности и радиуса и только радиуса, соответственно

дыхательную моду, получается монотонная релаксация к равновесному значению радиуса, показанная на рис. 2 черным пунктиром. Отличие равновесного радиуса при решении уравнения ЛЛГ и обобщенного уравнения Тиля связано, как и на рис. 1, с зависимостью ширины доменной стенки от поля, которая фиксирована в нашем приближении (см. дополнительные материалы). Полученная выше разница релаксации по радиусу и углу и только по радиусу будет особенно существенна, если рассматривается периодическое изменение поля с частотой, сравнимой с обратным временем релаксации. В этом случае эффект можно было бы достаточно просто наблюдать экспериментально.

Рассмотренное выше возмущение системы однородным полем существенно влияет на размер скирмиона, который определяется его радиусом. Относительное изменение ширины доменной стенки существенно меньше. В присутствии точечных дефектов и наноструктурных неоднородностей при движении скирмионов могут возбуждаться и другие низкоэнергетические моды, связанные с локализацией скирмиона вблизи дефектов или деформацией его аксиально симметричной формы [40, 41]. В этом случае для использования обобщенного уравнения Тиля необходим другой анзац для описания магнитного профиля скирмиона. При использовании новой обобщенной

координаты полезно проверить возможность введения канонически сопряженного ей импульса, как на вероятную степень свободы, которую нужно учитывать для адекватного описания динамики.

**5. Заключение.** Для локализованных магнитных структур с большим числом степеней свободы возможно сокращенное описание с гораздо меньшим числом переменных, которое воспроизводит релаксацию и динамику магнитной системы под воздействием внешних полей и токов. Для топологических хиральных структур используется естественный анзац, параметры которого можно связать с внутренними степенями свободы, наиболее легко возбуждаемыми при изменении параметров системы или внешних воздействиях. Они могут включать как степени свободы, от которых энергия не зависит (нулевые моды), так и низкоэнергетические возбуждения, представляющие собой собственные значения гессиана энергии равновесной магнитной конфигурации. Если учитывать только трансляционные нулевые моды, из уравнения ЛЛГ получается уравнение Тилиа, широко используемое, например, для моделирования динамики скирмионов. Изменение радиуса скирмиона позволяет рассматривать дыхательную моду, которой соответствует одно из наименьших положительных собственных значений гессиана. При этом оказывается, что описание динамики и релаксации качественно улучшается при включении дополнительных степеней свободы, которые позволяют сохранить гамильтонову форму уравнений, имеющуюся у уравнений ЛЛГ. Так включение канонически сопряженной к дыхательной моде спиральности позволяет описать колебательный процесс установления равновесного радиуса, особенно важный в условиях малого затухания. Оказывается, что в процессе релаксации энергия переходит из дыхательной моды к канонически сопряженной, спиральной, обладающей большим собственным значением, и обратно. При этом начальному и конечному состояниям, соответствующим разным магнитным полям, отвечает одно и то же значение параметра спиральности. Условие гамильтоновой формы обобщенного уравнения Тилиа позволяет, таким образом, определить переменные, существенные для адекватного сокращенного описания релаксации и динамики.

#### Финансирование работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект # 23-72-10028, <https://rscf.ru/en/project/23-72-10028/>).

**Конфликт интересов.** Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. S. S. P. Parkin, M. Hayashi, and L. Thomas, *Science* **320**, 190 (2008).
2. S. S. P. Parkin and S.-H. Yang, *Nat. Nanotechnol.* **10**, 195 (2015).
3. R. Wiesendanger, *Nat. Rev. Mater.* **1**, 16044 (2016).
4. J. Iwasaki, M. Mochizuki, and N. Nagaosa, *Nat. Commun.* **4**, 1463 (2013).
5. G. Finocchio, F. Büttner, R. Tomasello, M. Carpentieri, and M. Kläu, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **49**, 423001 (2016).
6. A. Fert, N. Reyren, and V. Cros, *Nat. Rev. Mater.* **2**, 17031 (2017).
7. M. N. Potkina, I. S. Lobanov, H. Jónsson, and V. M. Uzdin, *J. Magn. Magn. Mat.*, **549**, 168974 (2022).
8. M. N. Potkina, I. S. Lobanov, H. Jónsson, and V. M. Uzdin, *Phys. Rev. B* **107**, 184414 (2023).
9. И. С. Лобанов, М. Н. Поткина, В. М. Уздин, *Письма ЖЭТФ* **113**, 833 (2021).
10. I. S. Lobanov and V. M. Uzdin, *Phys. Rev. B* **107**, 104405 (2023).
11. I. S. Lobanov and V. M. Uzdin, *Comput. Phys. Commun.* **269**, 108136 (2021).
12. Г. В. Скороцкий, *УФН* **144**, 681 (1984).
13. A. A. Thiele, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 230 (1973).
14. V. M. Kuchkin, K. Chichay, B. Barton-Singer, F. N. Rybakov, S. Blügel, B. J. Schroers, and N. S. Kiselev, *Phys. Rev. B* **104**, 165116 (2021).
15. P. S. Shaban, I. S. Lobanov, V. M. Uzdin, and I. V. Iorsh, *Phys. Rev. B* **108**, 174440 (2023).
16. N. Nagaosa and Y. Tokura, *Nat. Nanotechnol.* **8**, 899 (2013).
17. J. Iwasaki, M. Mochizuki, and N. Nagaosa, *Nat. nanotech.* **8**, 742 (2013).
18. S. L. Zhang, W. W. Wang, D. M. Burn, H. Peng, H. Berger, A. Bauer, C. Pfeleiderer, G. van der Laan, and T. Hesjedal, *Nat. Commun.* **9**, 2115 (2018).
19. X. Wang, W. L. Gan, J. C. Martinez, F. N. Tan, M. B. A. Jalil, and W. S. Lew, *Nanoscale* **10**, 733 (2018).
20. A. Brataas, A. D. Kent, and H. Ohno, *Nat. Mater.* **11**, 372 (2012).
21. I. A. Ado, O. A. Tretiakov, and M. Titov, *Phys. Rev. B* **95**, 094401 (2017).
22. M. Weisshofer, L. Rózsa, and U. Nowak, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 047203 (2021).
23. D. J. Clarke, O. A. Tretiakov, G.-W. Chern, Y. B. Bazaliy, and O. Tchernyshyov, *Phys. Rev. B* **78**, 134412 (2008).
24. S. Z. Lin, C. D. Batista, and A. Saxena, *Phys. Rev. B* **89**, 024415 (2014).
25. V. M. Uzdin, D. Thonig, B. Göbel, and P. F. Bessarab, *Front. Phys.* **11**, 1275990 (2023).
26. J. Hagemester, N. Romming, K. von Bergmann, E. V. Vedmedenko, and R. Wiesendanger, *Nat. Commun.* **6**, 8455 (2015).

27. I. S. Lobanov, V. M. Uzdin, and H. Jónsson, *Phys. Rev. B* **94**, 174418 (2016).
28. X. S. Wang, H. Y. Yuan, and X. R. Wang. *Commun. Phys.* **1**, 31 (2018).
29. F. Büttner, I. Lemesh, and G. S. D. Beach, *Sci. Rep.* **8**, 4464 (2018).
30. H.-B. Braun. *Phys. Rev. B* **50**, 16485 (1994).
31. N. Romming, A. Kubetzka, C. Hanneken, K. von Bergmann, and R. Wiesendanger, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 177203 (2015).
32. E. Lu, A. R. Stuart, A. R. Chalifour, J. C. Davidson, P. S. Keatley, K. S. Buchanan, and K. L. Livesey, *J. Magn. Magn. Mat.* **584**, 171044 (2023).
33. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М. (1986), 528 с.
34. J. H. Mentink, M. V. Tretyakov, A. Fasolino, M. I. Katsnelson, and Th. Rasing, *J. Phys.: Condens. Matter.* **22**(17), 176001 (2010).
35. J. Masell and K. Everschor-Sitte, *Current-Induced Dynamics of Chiral Magnetic Structures: Creation, Motion, and Applications*, in E. Kamenetskii (editors), *Chirality, Magnetism and Magnetoelectricity. Topics in Applied Physics*, Springer, Cham (2021), v. 138.
36. C. Abert, *Eur. Phys. J. B* **92**, 120 (2019).
37. J. V. Kim and M. W. Yoo, *Appl. Phys. Lett.* **110**, 132404 (2017).
38. X. Chen, W. Kang, D. Zhu, X. Zhang, N. Lei, Y. Zhang, Y. Zhou, and W. Zhao, *Appl. Phys. Lett.* **111**, 202406 (2017).
39. V. M. Uzdin, M. N. Potkina, I. S. Lobanov, P. F. Bessarab, and H. Jónsson, *J. Magn. Magn. Mat.* **459**, 236 (2018).
40. C. Reichhardt, C. J. O. Reichhardt, and M. V. Milošević, *Rev. Mod. Phys.* **94**, 035005 (2022).
41. J. Müller and A. Rosch, *Phys. Rev. B* **91**, 054410 (2015).