

# О нелинейных двух- и трехкомпонентных уравнениях Клейна–Гордона, допускающих локализованные решения с эффектом биений связанных осцилляторов

Р. К. Салимов<sup>+1)</sup>, Т. Р. Салимов\*, Е. Г. Екомасов<sup>+</sup>

<sup>+</sup>Уфимский университет науки и технологий, 450076 Уфа, Россия

\*Московский физико-технический институт, 117303 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 22 марта 2024 г.

После переработки 11 апреля 2024 г.

Принята к публикации 13 апреля 2024 г.

В данной работе представлены уравнения для двух и трех скалярных полей, допускающие локализованные решения, которые проявляют эффект биений связанных осцилляторов. Периодически амплитуда колебаний локализованного возмущения для одного поля постепенно уменьшается до минимума, а остальных скалярных полей – увеличивается до максимума, затем процесс повторяется в обратном направлении. При этом, первоначально другие поля, кроме одного, находятся либо в состоянии фонового решения с малой амплитудой, либо равны нулю. Подобные решения могут быть интересны с точки зрения аналогии с осцилляциями нейтрино. Представлены так же уравнения движения, в которых при возмущении одной из компонент обязательно появляется возмущение второй и третьей даже при нулевом фоновом состоянии. Показано, что для этих уравнений выполняется закон сохранения энергии.

DOI: 10.31857/S1234567824100124, EDN: VMYZVM

Солитоноподобные решения нелинейных уравнений часто рассматриваются как протяженные модели частиц [1–6]. Например, модель Скирма [7–9], описывающая внутреннюю структуру барионов и легких ядер. Одним из недостатков солитонного подхода является достаточно малое количество не комплекснозначных моделей, имеющих устойчивые локализованные решения для двух и более компонент. Ранее в [10] были рассмотрены нелинейные уравнения Клейна–Гордона с нелинейностью дробной степени вида  $\frac{u}{(u^2+v^2)^{(n/(2n+1))}}$ , имеющие двухкомпонентные локализованные, не расплывающиеся в течение всего времени наблюдения численные решения в 2D случае. Подобные модели интересны тем, что для них нет ограничения размерности, как, например, для уравнения  $\sin$ -Гордон, которое имеет не распадающиеся бризерные решения только в пространственно одномерном случае. Но подобные долгоживущие локализованные решения в 2D случае были возможны лишь при определенных начальных условиях. Естественным продолжением исследования уравнений с подобной нелинейностью будет рассмотрение уравнений, имеющих локализованные решения для всех скалярных полей при локализованном возмущении одного из них, при любых начальных услови-

ях. В таких моделях потенциально возможно перераспределение энергии из локализованного решения для одного поля в локализованное решение для другого. Численные эксперименты показывают справедливость этого предположения.

Для простоты рассматриваем пространственно одномерный случай. Далее воспользуемся векторными обозначениями. Численно исследовались решения уравнений вида (1) для двух и трех компонент ( $r = 2, 3$ )

$$\mathbf{u}_{xx} - \mathbf{u}_{tt} = \alpha |\mathbf{u}|^{\delta-1} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = (u^1, \dots, u^r) \quad (1)$$

Подобная векторная запись напоминает многокомпонентные обобщения связанных уравнений НУШ [11, 12]. В отличие от этих уравнений, в которых локализованные связанные решения возможны при нелинейности в виде степеней с натуральными показателями [12], в системах типа (1) такие долгоживущие локализованные многокомпонентные решения удалось получить только при нелинейности дробной степени меньше единицы. В частности, исследовались уравнения вида (1) для  $r = 2$  с нелинейностью вида  $\sin(|\mathbf{u}|\mathbf{u})/|\mathbf{u}|$ , являющиеся обобщениями уравнения  $\sin$ -Гордон. При существовании начальных фоновых колебаний компоненты  $u^2$  локализованное возмущение быстро расплывалось. Только в случае  $u^2 = 0$  обычного уравнения  $\sin$ -

<sup>1)</sup>e-mail: salimovrkr@yandex.ru

Гордон сохранялось локализованное решение. Этот случай использовался для тестирования численной схемы.

В работе в основном представлены результаты для значения  $\delta = \frac{1}{11}$  как частного случая рациональной степени  $\delta = \frac{k}{n}$ . Функция вида  $|\mathbf{u}|^{\delta-1}\mathbf{u}$ ,  $n > k$  является наиболее простым видом нечетной по  $u^i$  функции, которая остается нелинейной вблизи нуля. Отличия подобных моделей от моделей с нелинейностями в виде натуральных степеней были указаны выше. Эмпирически было установлено, что при уменьшении параметра  $\delta$  уменьшается первоначальное излучение из локализованного решения и уменьшается период биений. Поэтому для наглядности существования эффекта биений было выбрано значение  $\delta = \frac{1}{11}$ , нечетность  $k$  и  $n$  здесь не существенна, важна лишь малость  $\delta$ . Дальнейшее уменьшение параметра  $\delta$  приводит к более быстрому изменению функции  $|\mathbf{u}|^{\delta-1}\mathbf{u}$  вблизи нуля. При этом для сохранения точности требуется меньший шаг по времени, что повышает трудоемкость расчетов.

Также исследовались эти уравнения со слагаемыми, содержащими первые производные по времени и сохраняющими консервативность системы.

$$\mathbf{u}_{xx} - \mathbf{u}_{tt} = \alpha|\mathbf{u}|^{\delta-1}\mathbf{u} + F(\mathbf{u})\mathbf{u}_t, \quad \mathbf{u} = (u^1, \dots, u^r). \quad (2)$$

Здесь  $F$  – кососимметрическая матрица вида  $f(|\mathbf{u}|)A$ , где  $f$  – скалярная функция,  $A$  – кососимметрическая матрица. Эти уравнения обеспечивают сохранение энергии.

Действительно, умножим уравнение для каждой компоненты  $u^i$  на соответствующую производную  $u_t^i$  и сложим все уравнения. В силу кососимметричности матрицы  $A$  сумма  $A_{ij}u_t^j u_t^i = 0$ . Далее интегрируем по  $x$  и получаем закон сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left( \frac{\alpha|\mathbf{u}|^{\delta+1}}{\delta+1} + \frac{\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x}{2} + \frac{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_t}{2} \right) dx = 0. \quad (3)$$

При расчетах использовался самый простой вид кососимметричной матрицы  $A$  из  $\pm 1$  на недиагональных элементах.

Численное исследование уравнений с дробной степенью достаточно специфично. Поэтому, из соображений устойчивости, при численном исследовании использовался псевдоспектральный метод, ранее уже применявшийся для решения уравнений типа Клейна–Гордона [13]. Решение раскладывалось в ряд по тригонометрическим функциям. Далее коэффициенты разложения находились разностным по времени методом с помощью метода Рунге–Кутты четвертого порядка. Количество функций составляло порядка 1000 для конечной длины  $R = 20 - 30$ .

Ограничение по конечному времени счета проводилось из соображений контроля сохранения энергии. При потере энергии в системе из-за численных погрешностей порядка  $10^{-2}$  от начальной (на временах  $t \sim 200$ ) счет прекращался.

В численных экспериментах для уравнения (1) при  $r = 2$ ,  $\alpha = 1$  и при начальных условиях вида

$$u^1(x, 0) = \frac{1}{\cosh(2(x - x_0))}; u_t^1(x, 0) = 0 \quad (4)$$

$$u^2(x, 0) = 0; u_t^2 = \frac{0.1}{\cosh(2(x - x_0))}; \quad (5)$$

получаем локализованные решения с периодическим перераспределением энергии из локализованного решения одной компоненты поля в другую. На рисунках 1 и 2 показано изменение во времени уровня

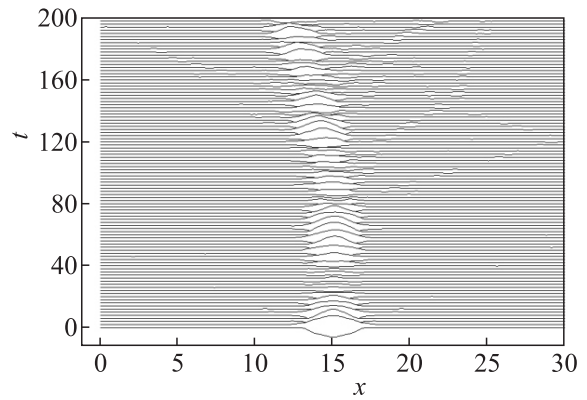


Рис. 1. Изменение со временем локализованного решения для 1-й компоненты  $u^1$  для уравнения (1)

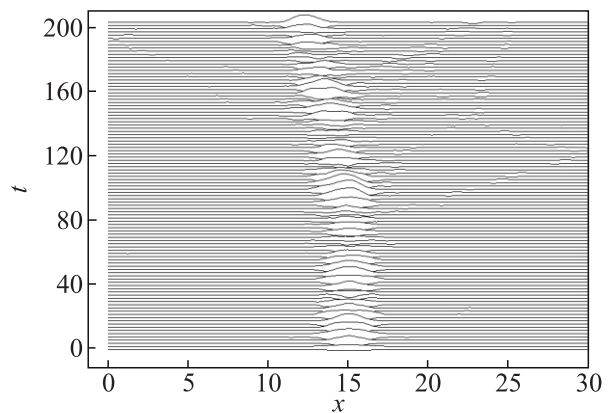


Рис. 2. Изменение со временем локализованного решения для для 2-й компоненты  $u^2$  для уравнения (1)

компонент  $u^1$  и  $u^2$ . На этих рисунках видно, что когда амплитуда колебаний локализованного решения

для одного скалярного поля максимальна, для другого скалярного поля она минимальна.

На рисунке 3 показаны изменения максимальных амплитуд локализованных решений для каждой компоненты поля  $(u^1, u^2)$ . Здесь видна аналогия с биениями связанных осцилляторов.

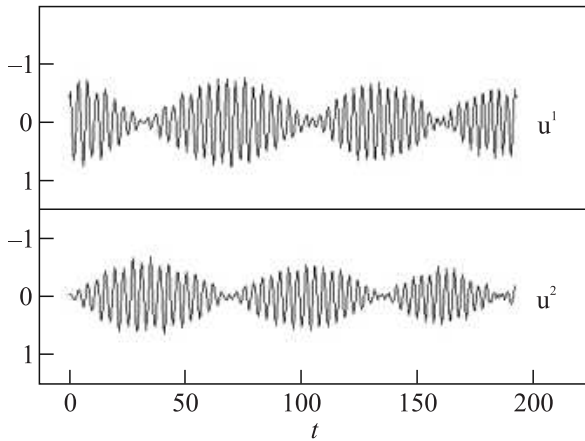


Рис. 3. Изменения максимальных амплитуд локализованных решений для каждой компоненты поля  $(u^1, u^2)$  для уравнения (1)

Численно исследовалось также трехкомпонентное уравнение (1). При этом также наблюдался эффект биений связанных осцилляторов и некоторое излучение энергии из локализованного состояния. Наиболее стабильные решения при исследовании уравнения для 3 компонент наблюдались в случае уравнения (2) при  $\alpha = 1$  и при начальных условиях вида

$$u^1(x, 0) = 0.1 + \frac{1.5}{\cosh(2(x - x_0))}; u_t^1(x, 0) = 0 \quad (6)$$

$$u^2(x, 0) = 0; u_t^2 = 0.1; \quad (7)$$

$$u^3(x, 0) = 0; u_t^3 = -0.06; \quad (8)$$

и функции  $f$  вида

$$f = \frac{1}{|\mathbf{u}|^{1/2}} - \frac{1}{0.2}; |\mathbf{u}|^{1/2} < 0.2, \quad (9)$$

$$f = 0; |\mathbf{u}|^{1/2} \geq 0.2. \quad (10)$$

В этом случае получаем локализованные решения с периодическим перераспределением энергии из локализованного решения одной компоненты поля в две другие и обратно. На рисунке 4 показано изменение во времени уровня функции  $u^2$ .

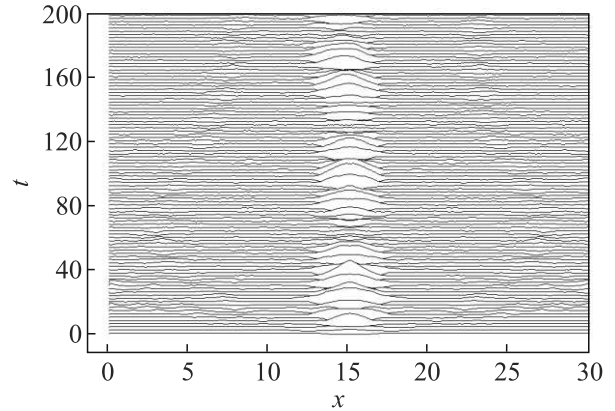


Рис. 4. Изменение со временем локализованного решения для скалярного поля  $u^2$  для уравнения (2)

На рисунке 5 показаны изменения максимальных амплитуд локализованных решений для каждой компоненты поля  $u^1, u^2, u^3$  для уравнения (2). На рисунках 4 и 5 видно, что энергия из локализованного решения компоненты  $u^1$  переносится в локализованные решения для компонент  $u^2, u^3$ . Подобное наблюдается и для других значений амплитуды начальных фоновых колебаний полей  $u^2$  и  $u^3$ .

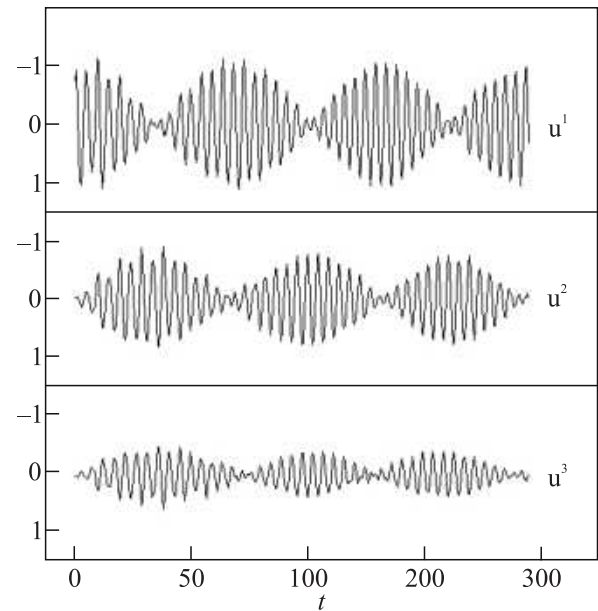


Рис. 5. Изменения максимальных амплитуд локализованных решений для каждой компоненты поля  $u^1, u^2, u^3$  для уравнения (2)

Подобный результат представляется достаточно интересным, так как имеет некую аналогию с осцилляциями 3 сортов нейтрино, или, другими словами, с превращениями одного типа нейтрино в нейтрино другого сорта [14, 15]. Действительно, в представлен-

ной модели мы наблюдаем периодический процесс, при котором амплитуда колебаний локализованного возмущения для одного поля постепенно уменьшается до минимума, а остальных скалярных полей – увеличивается до максимума, затем процесс повторяется в обратном направлении.

Рассмотрим теперь кратко, в рамках проведенных численных экспериментов, как меняются решения при изменении начальных условий и параметров. Влияние начальных условий проявляется в том, что величина амплитуд биений и их период зависит от величины малых начальных амплитуд фоновых колебаний. Так, например, при изменении начальных условий (6)–(8) для 3-й компоненты до значения  $u^3 = -0.1$  увеличивается максимальная амплитуда колебаний 3-й компоненты  $u^3$ , которая становится равна максимальной амплитуде колебаний 2-й компоненты  $u^2$ . Также от величины начальной амплитуды начальных фоновых колебаний зависит период биений амплитуды, в частности, при уменьшении начальной амплитуды компоненты  $u^2$  для уравнения (1) увеличивался период биений.

Как уже отмечалось выше, при увеличении параметра  $\delta$  увеличивается первоначальное излучение из локализованного решения и увеличивается период биений. Например, при  $\delta = 5/11$  для уравнения (1) при начальных условиях (4)–(5) период установившихся биений увеличился в 2 раза по сравнению со случаем  $\delta = 1/11$ . При значении  $\delta = 1/2$  для уравнения (1) при начальных условиях (4)–(5) в установившемся режиме начальное возмущение разбивается на три локализованных решения, примерно одинаковых размеров и формы, период установившихся биений увеличивается более, чем в 2 раза по сравнению со случаем  $\delta = 1/11$ . При  $\delta = 1/11$  для уравнения (1) при тех же начальных условиях наблюдается одно локализованное решение большой амплитуды см. рис. 1.

Из уравнения (1) видно, что если существуют решения вида  $u^i(x, t)$  для одного параметра  $\alpha$ , то будут существовать решения вида  $\lambda u^i(\beta x, \beta t)$ , для изменившегося параметра  $\gamma\alpha$ . При этом выполняется соотношение  $\lambda^{1-\delta}\beta^2 = \gamma$ . В численных экспериментах для уравнения (1) увеличение параметра  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 4$ ) при одинаковых начальных условиях (4), (5) приводит к увеличению частоты, уменьшению размеров и увеличению амплитуды установившихся решений. Таким образом, поведение решений качественно соответствует соотношению  $\lambda^{1-\delta}\beta^2 = \gamma$ . Период биений при этом существенно не меняется.

Влияние слагаемого с кососимметричной матрицей можно наблюдать, сравнивая поведение решений

с этим слагаемым и без него при прочих равных условиях. В основном действие этих слагаемых проявляет себя наиболее сильно при нулевых и очень малых ( $\sim 0, 01$ ) амплитудах фоновых колебаний невозмущенных компонент. Так, например, при возмущении одной компоненты при начальном нулевом состоянии ( $r = 2, u_t^1 = 0, u^2 = 0, u_t^2 = 0$ ) системы (2) при функции

$$f = \exp(|\mathbf{u}|) - \exp(0.2); |\mathbf{u}| < 0.2, \quad (11)$$

$$f = 0; |\mathbf{u}| \geq 0.2 \quad (12)$$

и начальном возмущении  $u^1 = 1.2/\cosh(2(x - x_0))$  проявляется эффект биений. Без этого слагаемого, как и ожидалось, биения не наблюдаются. При очень малых фоновых колебаниях ( $\sim 0.01$ ) это слагаемое наиболее сильно влияет на период биений. При значениях амплитуд начальных фоновых колебаний порядка ( $\sim 0.1$ ) влияние слагаемого с кососимметричной матрицей не является определяющим.

Хотя уравнения (2) в общем не являются лоренц-инвариантными, при определенных условиях их можно сделать таковыми. Пусть функция  $f$  не равна нулю, только если ее какой-либо лоренц-инвариантный аргумент меньше некоторой константы, например,  $f(|\mathbf{u}|) = 0$  при  $|\mathbf{u}| > |\mathbf{u}_0|$ . Тогда при устойчивом фоновом решении, при котором функция  $f$  остается равной нулю, уравнения можно рассматривать как лоренц-инвариантные. Под устойчивостью здесь будем понимать свойство возвращения к первоначальному состоянию при возмущениях. При этом небольшие отклонения от устойчивого решения можно рассматривать как временные нарушения лоренц-инвариантности и Т-четности. Возможность подобного механизма для уравнений (2) может представлять интерес с точки зрения рассмотрения связи нарушения СРТ четности с физикой нейтрино. Вопрос об этой связи является достаточно актуальным [16, 17].

Также интерес представляет возможность изменения в процессе эволюции решения функции  $f$ , такого, что первоначально  $f$  была не нулевой, а затем стала равна нулю везде. Таким образом появляется механизм первоначального нарушения лоренц-инвариантности и Т-четности, который затем проявляться не будет. В свою очередь, это первоначальное нарушение Т-четности, может привести к первоначальному нарушению других симметрий. Кроме того, модель (2) интересна тем, что в данном уравнении есть слагаемые, обеспечивающие некий конформизм для комбинаций полей, так как при возмущении

нии одной из компонент обязательно появляется возмущение других. Учитывая описанные потенциальные возможности, представленные модели, по мнению авторов, достойны дальнейшего изучения. Кроме того они имеют перспективы получения локализованных решений в 2D и 3D случаях.

**Финансирование работы.** Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Уфимского университета науки и технологий – федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

**Конфликт интересов.** Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. H. Yamanoto, Progress of Theoretical Physics **58**(3), 1014 (1977)
2. A. M. Kosevich, Physica D **41**, 253 (1990).
3. Yu. P. Rybakov and B. Saha, Phys. Lett. A **122**, 5 (1996).
4. N. S. Manton, Nonlinearity **21**(11), T221 (2008).
5. A. Maccari, EJTP **3**(10), 39 (2006).
6. В. Г. Маханьков, Физика элементарных частиц и атомного ядра **14**, 123 (1983).
7. В. Г. Маханьков, Ю. В. Рыбаков, В. И. Санюк, УФН **162**(2), 1 (1992).
8. C. Adam, C. Naya, J. Sanchez-Guillen, and A. Wereszczynski, Phys. Rev. Lett. **111**, 232501 (2013).
9. C. Naya and P. Sutcliffe, Phys. Rev. Lett. **121**(23), 232002 (2018).
10. Р. К. Салимов, Т. Р. Салимов, Е. Г. Екомасов, Письма в ЖЭТФ **112**(6), 357 (2020).
11. В. С. Герджиков, Н. А. Костов, Т. И. Валчев, ТМФ **159**(3), 438 (2009).
12. A. S. Desyatnikov, D. E. Pelinovsky, and J. Yang, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **12**(7), 35 (2006).
13. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, М. (1988).
14. С. С. Герштейн, Е. П. Кузнецов, В. А. Рябов, УФН **167**(8), 811 (1997).
15. С. М. Биленький, УФН **173**(11), 1171 (2003).
16. И. С. Цукерман, УФН **175**(8), 863 (2005).
17. А. Е. Лобанов, А. Е. Чухнова, ЖЭТФ **162**(3), 364 (2022).