Письма в ЖЭТФ, том 119, вып. 12, с. 869 – 874

Массы u, d и s кварков

А. А. Осипов[1)]

Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Россия

Поступила в редакцию 3 мая 2024 г.
После переработки 3 мая 2024 г.
Принята к публикации 15 мая 2024 г.

Исходя из выражений для квадратов масс псевдоскалярных мезонов m_π^2 и m_K^2, полученных с точностью до второго порядка по нарушению киральной симметрии, определяются отношения масс легких кварков: m_s/m_d и m_u/m_d. Фит теоретических выражений m_π^2 и m_K^2 по их феноменологическим значениям ведет к функциональной зависимости между величинами m_s/m_d и m_u/m_d, которая описывается алгебраической кривой третьего порядка. Дополнительное ограничение возникает, если привлечь результат вычислений на решетке $m_s/m_{ud} = 27.23(10)$, представленный FLAG для случая четырех кварковых ароматов. Это существенно уменьшает погрешность ($\sim 2\%$) для величины отношения $m_u/m_d = 0.455(8)$. Затем мы получаем абсолютные значения масс кварков.

DOI: 10.31857/S1234567824120012, EDN: ECIDGV

Токовые массы u, d и s кварков являются фундаментальными параметрами Стандартной модели, и поэтому определение их численных значений относится к числу первостепенных задач современной физики частиц. В квантовой хромодинамике (КХД) они отвечают за явное нарушение киральной $SU(3)_L \times SU(3)_R$ симметрии, которое описывается гамильтонианом

$$H_m = \sum_{q=u,d,s} m_q \bar{q} q. \tag{1}$$

Произведение $m_q \bar{q} q$ инвариантно относительно преобразований ренормгруппы (в приближении главных логарифмов). Известно, что на энергетическом масштабе $\mu \simeq 1$ ГэВ (в $\overline{MS}$- схеме вычитаний) массы легких кварков равны $m_u \simeq 4.2$ МэВ, $m_d \simeq 7.5$ МэВ, $m_s \simeq 150$ МэВ [1] (см. также [2–5]). Поскольку $m_q/\mu \ll 1$, H_m можно рассматривать, как малое возмущение в окрестности кирального предела $m_q = 0$.

Отношение кварковых масс $m_q(\mu)/m_{q'}(\mu)$ в $\overline{MS}$-схеме не зависит от выбора точки вычитания μ, и может быть получено из массовых формул псевдоскалярных мезонов стандартными методами алгебры токов [6]

$$\begin{aligned} m_{\pi^+}^2 &= B_0(m_u + m_d) + \gamma_{\pi^+}, \\ m_{\pi^0}^2 &= B_0(m_u + m_d) + \gamma_{\pi^0}, \\ m_{K^+}^2 &= B_0(m_u + m_s) + \gamma_{K^+}, \\ m_{K^0}^2 &= B_0(m_d + m_s) + \gamma_{K^0}. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь B_0 – величина, пропорциональная $SU(3)$ кварковому конденсату $B_0 = -\langle \bar{q} q \rangle / F^2$, F – константа распада пиона в киральном пределе; $m_{\pi,K}$ – феноменологические значения мезонных масс; $\gamma_{\pi,K}$ – электромагнитный вклад в собственную энергию псевдоскаляров. Согласно теореме Дашена [7] в лидирующем приближении по m_q имеют место равенства: $\gamma_{K^0} = \gamma_{\pi^0} = 0$, $\gamma_{\pi^+} = \gamma_{K^+} = m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2$. Тогда приходим к известным формулам Вайнберга

$$\begin{aligned} \frac{m_u}{m_d} &\overset{\text{LO}}{=} \frac{m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2 + 2m_{\pi^0}^2 - m_{\pi^+}^2}{m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2} = 0.56, \\ \frac{m_s}{m_d} &\overset{\text{LO}}{=} \frac{m_{K^+}^2 + m_{K^0}^2 - m_{\pi^+}^2}{m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2} = 20.18. \end{aligned} \tag{3}$$

Систематические вычисления следующей (NLO) поправки к результату Вайнберга [8, 9] показали, что выход за рамки алгебры токов ведет к функциональной зависимости отношений $x = m_u/m_d$ и $y = m_s/m_d$. Согласно низкоэнергетической теореме [8] кривая $f(x,y) = 0$ является эллипсом. Напротив, фитирование массовых формул, полученных с точностью до первой поправки к результату алгебры токов (2), показывает, что x и y принадлежат (с учетом приближений сделанных в [9]) кривой второго порядка, каноническая форма которой есть парабола. Поскольку вид функции $f(x,y)$ важен для извлечения теоретической информации о величинах отношений кварковых масс x и y, имеет смысл более подробно остановиться на обоих методах, чтобы понять их плюсы и минусы. Изучению этого вопроса и посвящена настоящая заметка.

[1)]e-mail: aaosipov@jinr.ru

В основе нашего анализа лежат формулы

$$
\begin{aligned}
m_{\pi^+}^2 &= B_0(m_u+m_d)[1+\Delta(m_u+m_d)]+\gamma_{\pi^+},\\
m_{K^+}^2 &= B_0(m_u+m_s)[1+\Delta(m_u+m_s)]+\gamma_{K^+},\\
m_{K^0}^2 &= B_0(m_d+m_s)[1+\Delta(m_d+m_s)]+\gamma_{K^0},
\end{aligned}\qquad (4)
$$

в которых учтен NLO вклад в собственную энергию псевдоскалярных мезонов. Эти соотношения могут быть получены в $1/N_c$ киральной теории возмущений ($1/N_c\chi$PT) [10, 11], и тогда параметр $\Delta = 8B_0(2L_8 - L_5)/F^2$ выражается через низкоэнергетические константы эффективного кирального лагранжиана. К формулам (4) мы приходим и в модели Намбу–Иона-Лазинио, используя правила счета, принятые в $1/N_c\chi$PT: $1/N_c, p^2, m_q = \mathcal{O}(\delta)$. В этом случае $\Delta = \delta_M/(2M_0)$ [12], где M_0 – щель в фермионном спектре, а безразмерная константа δ_M определяется всей совокупностью параметров модели. В дальнейшем величина параметра Δ будет фиксироваться исходя из современных оценок КХД на решетке. Следует также отметить, что величины параметров Δ и B_0 не влияют на вид функции $f(x,y)$.

Подчеркнем, что при выводе формул (4), помимо разложения по степеням масс кварков и импульсов, вершины эффективного мезонного лагранжиана классифицировались в соответствии с их поведением в пределе большого числа цветовых степеней свободы N_c. Это позволило расширить группу симметрии теории до $U(3)_L \times U(3)_R$, включив в рассмотрение η'-мезон, и как сле,дствие, учесть известное решение $U(1)$-проблемы [13–18], и подавить процессы, нарушающие правило Цвейга. Благодаря $1/N_c$ разложению, в выражении (4) отсутствует вклад киральных логарифмов, который имеет следующий порядок малости $\mathcal{O}(\delta^3)$. Это важная деталь позволяет избавиться от неоднозначности, возникающей при вычислениях x и y, которая связана с нефизической симметрией лагранжиана киральной теории возмущений относительно преобразований Каплана–Манохара [9].

Выход за рамки алгебры токов ведет к нарушению теоремы Дашена. Это, в первую очередь, касается вкладов γ_{π^+} и γ_{K^+}. Для нейтральных мод попрежнему можно считать, что в (4) $\gamma_{K^0} = \gamma_{\pi^0} = 0$. Вклад виртуальных фотонов в собственную энергию заряженного пиона находим из формулы

$$\gamma_{\pi^+} = (m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2) - (\bar m_{\pi^+}^2 - \bar m_{\pi^0}^2). \qquad (5)$$

Чистый КХД-вклад мал $(\bar m_{\pi^+}^2 - \bar m_{\pi^0}^2) \sim (m_d - m_u)^2$ и может быть вычислен в χPT, которая дает оценку $\bar m_{\pi^+} - \bar m_{\pi^0} = 0.17(3)$ МэВ [8]. Отсюда следует, что

$$\gamma_{\pi^+} = 1.21(1)\times 10^{-3}\,\text{ГэВ}^2 \quad [19,\ 20]. \qquad (6)$$

В случае заряженного каона отклонение от теоремы Дашена ($\gamma_{K^+} = \gamma_{\pi^+}$) можно охарактеризовать параметром ϵ [21], а именно,

$$\gamma_{K^+} = \gamma_{\pi^+} + \epsilon(m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2). \qquad (7)$$

В недавнем обзоре результатов, полученных различными коллаборациями, моделирующими КХД на решетке, FLAG [22] приводит следующие усредненные значения ϵ

$$\epsilon = 0.79(6) \quad (N_f = 2+1+1), \qquad (8)$$

$$\epsilon = 0.73(17) \quad (N_f = 2+1). \qquad (9)$$

В дальнейшем мы будем использовать первую из оценок. Она имеет меньшую ошибку и отвечает симуляциям с четырьмя кварковыми ароматами, $m_u = m_d \neq m_s \neq m_c$. Это дает

$$\gamma_{K^+} = 2.21(8)\times 10^{-3}\,\text{ГэВ}^2, \qquad (10)$$

что, при сравнении с (6), указывает на существенное нарушение теоремы Дашена.

Система трех уравнений (4) имеет четыре свободных параметра (например, m_dB_0, $m_d\Delta$, x, y). По этой причине результатом ее решения будет связь $f(x,y) = 0$. Чтобы найти функцию $f(x,y)$, рассмотрим два отношения

$$
\begin{aligned}
r_x &= \frac{m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2 + m_{\pi^+}^2 - \gamma_{K^+} - \gamma_{\pi^+}}{m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2 + \gamma_{K^+} - \gamma_{\pi^+}}\\
&= \frac{x + m_d\Delta[y(x-1) + x(x+1)]}{1 + m_d\Delta[y(1-x) + 1 + x]},
\end{aligned}\qquad (11)
$$

$$
\begin{aligned}
r_y &= \frac{m_{K^+}^2 + m_{K^0}^2 - m_{\pi^+}^2 - \gamma_{K^+} + \gamma_{\pi^+}}{m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2 + \gamma_{K^+} - \gamma_{\pi^+}}\\
&= \frac{y + m_d\Delta[y(y+x) + y - x]}{1 + m_d\Delta[y(1-x) + 1 + x]},
\end{aligned}\qquad (12)
$$

где на втором шаге мы использовали формулы (4). С одной стороны, из экспериментальных значений масс π^+, K^+, K^0 мезонов и полученных выше оценок (6) и (10), получаем $r_x = 0.498(5)$, $r_y = 19.32(6)$, с другой стороны, исключая зависимость от параметра $m_d\Delta$ в (11) и (12), приходим к уравнению

$$(y^2 - 1)(1 - xr_x) = (1 - x^2)(yr_y - 1). \qquad (13)$$

Это плоская алгебраическая кривая третьего порядка (кубика) рода $g = 1$. Она имеет три независимые ветви: две гиперболические и одну прямолинейную (гиперболического типа). Именно последней ветви принадлежит точка $(x,y) = (r_x, r_y)$.

Результат (13) не зависит от выбора отношений r_x, r_y. Любая произвольно выбранная пара

$$r_\alpha = \frac{(\alpha_P, \bar{m}_P^2)}{(\bar{\alpha}_P, \bar{m}_P^2)}, \quad r_\beta = \frac{(\beta_P, \bar{m}_P^2)}{(\bar{\beta}_P, \bar{m}_P^2)}, \tag{14}$$

где $\bar{m}_P^2 = m_P^2 - \gamma_P$, и $(\alpha_P, \bar{m}_P^2) = \alpha_{K^+}\bar{m}_{K^+}^2 + \alpha_{K^0}\bar{m}_{K^0}^2 + \alpha_{\pi^+}\bar{m}_{\pi^+}^2$, после исключения зависимости от Δ приведет к уравнению

$$\begin{aligned}&(\alpha_P, \mu_P^2)(\beta_P, \mu_P) - (\alpha_P, \mu_P)(\beta_P, \mu_P^2)\\ &+ r_\alpha[(\bar{\alpha}_P, \mu_P)(\beta_P, \mu_P^2) - (\bar{\alpha}_P, \mu_P^2)(\beta_P, \mu_P)]\\ &+ r_\beta[(\bar{\beta}_P, \mu_P^2)(\alpha_P, \mu_P) - (\bar{\beta}_P, \mu_P)(\alpha_P, \mu_P^2)]\\ &= r_\alpha r_\beta[(\bar{\beta}_P, \mu_P^2)(\bar{\alpha}_P, \mu_P) - (\bar{\beta}_P, \mu_P)(\bar{\alpha}_P, \mu_P^2)].\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $\mu_P = m_i + m_j$, индексы (i, j) соответствуют кварковому составу конкретного мезонного состояния P: $(u, d) \to \pi^\pm$, $(u, s) \to K^\pm$, $(d, s) \to K^0, \bar{K}^0$.

Зависимость от произвольных параметров α_P, β_P, $\bar{\alpha}_P$, $\bar{\beta}_P$ факторизуется. Для этого r_α и r_β в (15) необходимо выразить через r_x и r_y. В результате уравнение примет вид

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}(\alpha_P, \beta_P, \bar{\alpha}_P, \bar{\beta}_P, r_x, r_y)\\ &\times [(y^2-1)(1-xr_x) - (1-x^2)(yr_y-1)] = 0.\end{aligned}$$

Если функция $\mathcal{F} \neq 0$, то имеет место уравнение (13). В противном случае, r_α и r_β не являются независимыми переменными. Таким образом, вид кривой (14) не зависит от выбора пары r_α, r_β. Более того, в случае, когда $\bar{\alpha}_P = \bar{\beta}_P$, как это, например, имеет место в (11), (12), отношения приводят к уравнению (13) независимо от того, производится δ-разложение отношений (14) в ряд или нет.

Действительно, δ-разложение дает

$$r_\alpha = k_\alpha[1 + l_\alpha(m_d\Delta) + \mathcal{O}(\delta^2)], \tag{16}$$

где коэффициенты k_α и l_α являются функциями отношений кварковых масс x, y и параметров α_P, $\bar{\alpha}_P$

$$k_\alpha = \frac{(\alpha_P, \mu_P)}{(\bar{\alpha}_P, \mu_P)}, \quad l_\alpha = \frac{1}{m_d}\left[\frac{(\alpha_P, \mu_P^2)}{(\alpha_P, \mu_P)} - \frac{(\bar{\alpha}_P, \mu_P^2)}{(\bar{\alpha}_P, \mu_P)}\right].$$

Очевидно, что если рассмотреть два элемента r_α и r_β, то можно исключить зависимость от параметра $m_d\Delta$ и, таким образом, найти уравнение, связывающее y и x

$$k_\alpha k_\beta(l_\alpha - l_\beta) = k_\alpha l_\alpha r_\beta - k_\beta l_\beta r_\alpha. \tag{17}$$

Если $\bar{\alpha}_P = \bar{\beta}_P$, (17) описывает кубическую кривую (13). Если же $\bar{\alpha}_P \neq \bar{\beta}_P$, различные пары r_α, r_β ведут к различным алгебраическим кривым. Некоторые следствия такого поведения изучались в [12, 23]. Наибольший интерес здесь представляет случай $l_\alpha = l_\beta$. Тогда из (17) следует, что $r_\alpha/r_\beta = k_\alpha/k_\beta$, т.е. в данном двойном отношении NLO вклады отсутствуют. Это составляет содержание хорошо известной низкоэнергетической теоремы [8]. Например, рассмотрим киральное разложение следующих отношений

$$\begin{aligned}r_1 &= \frac{m_{K^+}^2 - \gamma_{K^+}}{m_{\pi^+}^2 - \gamma_{\pi^+}}\\ &= \frac{m_s + m_u}{m_d + m_u}\left[1 + \Delta(m_s - m_d) + \mathcal{O}(\delta^2)\right],\\ r_2 &= \frac{m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 + \gamma_{K^+}}{m_{K^0}^2 - m_{\pi^+}^2 + \gamma_{\pi^+}}\\ &= \frac{m_d - m_u}{m_s - m_u}\left[1 + \Delta(m_s - m_d) + \mathcal{O}(\delta^2)\right].\end{aligned} \tag{18}$$

У них $l_1 = l_2$, и как следствие

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_s^2 - m_u^2}{m_d^2 - m_u^2} \equiv Q_1^2\,. \tag{19}$$

Очевидно, что здесь переменные x и y принадлежат эллипсу. В этом случае мы имеем три степени свободы $m_d\Delta, x, y$ для фитирования двух феноменологических значений r_1, r_2. Безразмерный параметр $m_d\Delta$ отвечает за положение точки на кривой (напомним, что в случае кубической кривой для этого необходимо фиксировать значения двух параметров: $m_d\Delta$ и m_dB_0). Уравнение эллипса (19) в переменных r_x, r_y принимает вид

$$(y^2-1)(1-r_x^2) = (1-x^2)(r_y^2-1). \tag{20}$$

Из сравнения уравнений (13) и (20) (см. рис. 1), видно, что обе кривые содержат одни и те же параметры r_x и r_y. Разница в том, что в случае эллипса они образуют общий фактор, который определяет главную полуось данной геометрической фигуры

$$Q_1 = \sqrt{\frac{r_y^2 - r_x^2}{1 - r_x^2}} = 22.28(15). \tag{21}$$

В приведенной численной оценке указана погрешность, которая вызвана ошибкой в величине ϵ (8). Этот результат находится в прекрасном согласии с оценкой $Q_{\rm GL} = 22.1(7)$ [19], где $Q_{\rm GL} \equiv (m_s^2 - m_{ud}^2)/(m_d^2 - m_u^2)$, и $m_{ud} = (m_u + m_d)/2$, полученной из экспериментальных данных по $\eta \to 3\pi$ распадам. Он также согласуется с оценкой FLAG: $Q_{\rm GL} = 22.5(5)$ [22]. Высокая точность численной оценки (21) объясняется прецизионными данными современных вычислений КХД на решетке для величины ϵ.

В случае кубики параметры r_x и r_y независимы. Как следствие, отношение кварковых масс Q_1^2 меняется вдоль кубической кривой и, поэтому ее определение требует дополнительного предположения, которое, как мы покажем, в случае физических значений масс кварков ведет к результату $Q_1 = 22.24(16)$.

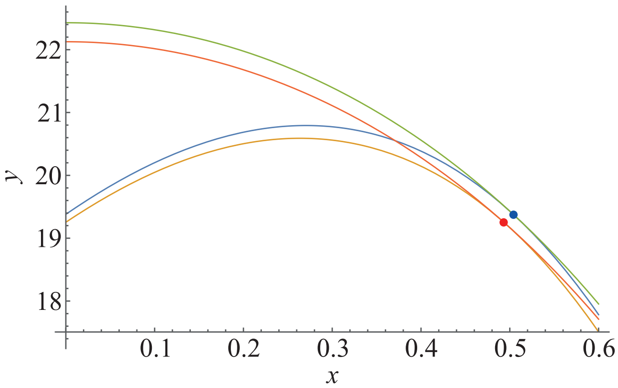

Рис. 1. (Цветной онлайн) Функция $y = m_s/m_d$ от $x = m_u/m_d$ в NLO приближении для случая, когда выполняется низкоэнергетическая теорема Гассера–Лойтвилера (эллипс, верхние кривые), и когда выполняются массовые формулы (кубика, нижние кривые). Поскольку теорема Дашена нарушена, для каждого из случаев изображены две кривые, охватывающие интервал $\epsilon = 0.79(6)$. Кривые имеют общую касательную в точке (r_x, r_y). Воображаемая горизонтальная линия $y = r_y$ пересекает кубическую кривую в точках (r_x, r_y) и $(0, r_y)$

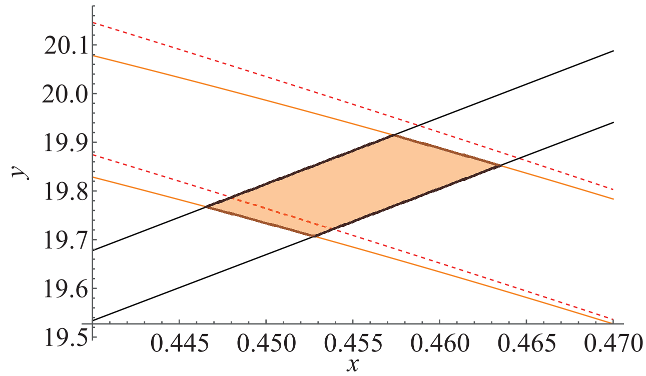

Рис. 2. (Цветной онлайн) Допустимые значения для отношений кварковых масс $x = m_u/m_d$ и $y = m_s/m_d$. Сравниваются эллипс (пунктирные линии, отвечающие области $Q_1 = 22.24(16)$) и кубика (сплошные линии, отвечающие области $\epsilon = 0.79(6)$). Тонкие прямые линии выделяют область $S = 27.23(10)$, полученную FLAG в результате обработке решеточных данных для $N_f = 2 + 1 + 1$ [22]. Пересечение полос, отвечающих рассматриваемым значениям S и кубики (закрашено), выделяет область физических значений для отношений x и y

Предположение связано с использованием отношения $S = m_s/m_{ud} = 27.23(10)$ [22], которое известно из КХД расчетов на решетке, и малочувствительно к поправкам, связанным с нарушением теоремы Дашена. Электромагнитный вклад в эту величину составляет $\simeq 0.18\,\%$ [24], т.е. действительно очень мал. Знание S позволяет существенно ограничить область допустимых значений для x и y и таким образом повысить точность теоретических расчетов величины отношения m_u/m_d. Эта идея не нова. Она уже использовалась в [19], где авторам на основе кварковых отношений $Q_{\rm GL} = 22.1(7)$ и $S = 27.23(10)$ удалось установить, что $m_u/m_d = 0.44(3)$. Теперь эту оценку можно улучшить благодаря высокой точности (8).

Результат наших расчетов представлен на рис. 2. Он демонстрирует прекрасное согласие данных, полученных независимо как на основе низкоэнергетической теоремы, так и с использованием кубической кривой

$$\begin{aligned} m_u/m_d &= 0.455(8) \quad (\text{кубика}), \\ m_u/m_d &= 0.456(8) \quad (\text{эллипс}). \end{aligned} \tag{22}$$

Как мы уже отмечали, величина кваркового конденсата $\langle\bar{q}q\rangle(\mu)$ связана с низкоэнергетической константой $B_0(\mu)$, и зависит от ренормгруппового масштаба μ в $\overline{MS}$ схеме вычитаний. Однако произведение $m_q(\mu)B_0(\mu)$ инвариантно относительно преобразований ренормгруппы. Поскольку это произведение является одним из внутренних параметров кубики, мы можем оценить массы отдельных кварков, если известно B_0, и наоборот. Решеточные оценки $B_0(\mu)$ в настоящее время не отличаются высокой точностью. Для наших расчетов мы воспользуемся результатом $B_0(2\,\text{ГэВ}) = 2.682(36)(39)$ ГэВ [26], суммарная ошибка которого сравнительно мала $\sim 2\,\%$.

Чтобы найти абсолютные значения масс кварков, необходимо решить систему трех уравнений (4). Для этого, при заданном значении $B_0(2\,\text{ГэВ})$, мы варьируем параметр Δ так, чтобы решение принадлежало выделенной (закрашенной) области на рис. 2. Соответствующие результаты собраны в табл. 1.

В первой строке таблицы представлены результаты решения системы уравнений (4), отвечающие значениям $B_0 = 2.682(53)$ ГэВ. Чтобы получить представление о роли погрешности, вносимой величиной B_0, мы приводим также результаты расчетов, выполненных при строго фиксированном значении $B_0 = 2.66$ ГэВ (см. вторую строку табл. 1). Для этого мы взяли среднее арифметическое центральных значений $B_0 = 2.682(53)$ ГэВ [26] и ЕТМ коллаборации $B_0 = 2.64(20)$ ГэВ [27]. В третьей строке приведены значения, распространяемые PDG [25], а четвертая и пятая строки представляют оценки FLAG [22], сделанные для случая четырех и трех ароматов кварков соответственно. Они получены путем усреднения результатов различных решеточных коллабораций в соответствии с критериями отбора FLAG.

Таблица 1. Массы легких кварков m_u, m_d, m_s, усредненное по изоспину значение $m_{ud} = (m_u + m_d)/2$ (все в [МэВ]), и отношения масс кварков m_u/m_d, Q_1, $R = (m_s - m_{ud})/(m_d - m_u)$. Все величины соответствуют шкале $\mu = 2$ ГэВ в $\overline{MS}$-схеме вычитаний

Источник	Условия	m_u	m_d	m_{ud}	m_s	m_u/m_d	Q_1	R
Данная	$B_0 = 2.682(53)$ ГэВ	2.14 ± 0.07	4.70 ± 0.12	3.42(7)	93.13 ± 2.25	0.455(8)	22.23(16)	35.02(61)
статья	$B_0 = 2.66$ ГэВ	2.16 ± 0.03	4.74 ± 0.03	3.447(2)	93.85 ± 0.41	0.455(8)	22.23(16)	35.02(61)
PDG [25]	–	$2.16^{+0.49}_{-0.26}$	$4.67^{+0.48}_{-0.17}$	$3.45^{+0.35}_{-0.15}$	$93.4^{+8.6}_{-3.4}$	$0.474^{+0.056}_{-0.074}$	–	–
FLAG [22]	$N_f = 2{+}1{+}1$	2.14 ± 0.08	4.70 ± 0.05	3.410(43)	93.44 ± 0.68	0.465(24)	22.5(5)	35.9(1.7)
	$N_f = 2{+}1$	2.27 ± 0.09	4.67 ± 0.09	3.364(41)	92.03 ± 0.88	0.485(19)	23.3(5)	38.1(1.5)

Сравнение результатов, представленных в первых двух строчках табл. 1, показывает, что ошибка $\simeq 2\,\%$ в величине B_0 вместе с существующей $\simeq 1.5\,\%$ погрешностью в определении значений ϵ и S ведет к суммарной ошибке $\simeq 3\%$ для масс кварков. Этой точности достаточно, чтобы утверждать, что наши результаты полностью согласуются с данными, представленными PDG, а также средними значениями, приведенными FLAG. Кроме того, из этого можно заключить, что используемое для расчетов δ-разложение, лежащее в основе исходной формулы для нашего анализа (4), оказывается эффективным инструментом для расчета масс легких кварков.

Поскольку в литературе имеется большое количество оценок кварковых масс, отнесенных к масштабу $\mu = 1$ ГэВ, мы приведем соответствующие результаты наших вычислений. В начале заметки мы указали результат Вайнберга для масс кварков. Он позволяет оценить величину константы $B_0(1\,\text{ГэВ}) \simeq 1.58$ ГэВ. Действительно, формулы (2) при данном значении B_0 дают $m_u = 4.1$ МэВ, $m_d = 7.4$ МэВ, $m_s = 149$ МэВ. Учет NLO поправки приводит к следующим оценкам (для разрешенной области рис. 2): $m_u = 3.63(5)$ МэВ, $m_d = 7.98(4)$ МэВ, $m_s = 158.0(7)$ МэВ. По ним можно судить и о величине NLO вклада в массы легких кварков, который здесь колеблется от 11 до 6 %.

Подводя итог, можно сделать вывод, что кубика является еще одним полезным источником для извлечения теоретической информации о массах легких кварков. С одной стороны, данная кривая в области физических масс кварков прекрасно согласуется с требованием низкоэнергетической теоремы Гассера–Лойтвилера, с другой стороны, она позволяет оценить не только отношения масс кварков, но и их абсолютные значения. Полученные нами оценки представляются разумными и в принципе их точность будет расти вместе с уменьшением погрешности в определении низкоэнергетической константы B_0.

Я благодарен Д. И. Казакову, В. А. Осипову, О. В. Теряеву и Б. Хиллер, за интерес к результатам данного исследования и стимулирующие обсуждения.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Объединенного института ядерных исследований. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. S. Weinberg, Trans. New York Acad. Sci. **38**, 185 (1977).
2. H. Leutwyler, Phys. Lett. B **48**, 45 (1974).
3. H. Leutwyler, Nucl. Phys. B **76**, 413 (1974).
4. M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **147**, 385 (1979).
5. Б. Л. Иоффе, УФН **171**, 1273 (2001).
6. M. Gell-Mann, R. Oakes, and B. Renner, Phys. Rev. **175**, 2195 (1968).
7. R. Dashen, Phys. Rev. **183**, 1245 (1969).
8. J. Gasser, H. Leutwyler, Nucl. Phys. B **250**, 465 (1985).
9. D. B. Kaplan and A. V. Manohar, Phys. Rev. Lett. **56**, 2004 (1986).
10. H. Leutwyler, Phys. Lett. B **374**, 163 (1996).
11. H. Leutwyler, Phys. Lett. B **378**, 313 (1996).
12. A. A. Osipov, Phys. Rev. D **108**, 016014 (2023).
13. E. Witten, Nucl. Phys. B **160**, 57 (1979).
14. G. Veneziano, Nucl. Phys. B **159**, 213 (1979).
15. C. Rosenzweig, J. Schechter, and G. Trahern, Phys. Rev. D **21**, 3388 (1980).
16. K. Kawarabayashi and N. Ohta, Nucl. Phys. B **175**, 477 (1980).
17. P. Di Vecchia and G. Veneziano, Nucl. Phys. B **171**, 253 (1980).
18. P. Di Vecchia, F. Nicodemi, R. Pettorino, and G. Veneziano, Nucl. Phys. B **181**, 318 (1981).
19. G. Colangelo, S. Lanz, H. Leutwyler, and E. Passemar, Phys. Rev. Lett. **118**, 022001 (2017).
20. G. Colangelo, S. Lanz, H. Leutwyler, and E. Passemar, Eur. Phys. J. C **78**, 947 (2018).

21. S. Aoki, Eur. Phys. J. C **77**, 112 (2017).
22. S. Aoki, Eur. Phys. J. C **82**, 869 (2022).
23. A. A. Osipov, JETP Lett. **115**(6), 305 (2022).
24. A. Bazavov, C. Bernard, N. Brown et al. (Fermilab Lattice and MILC Collaborations), Phys. Rev. D **98**, 074512 (2018).
25. R. L. Workman, V. D. Burkert, V. Crede et al. (Particle Data Group), Prog. Theor. Exp. Phys. **2022**, 083C01 (2022).
26. S. Borsanyi, S. Dürr, Z. Fodor, S. Krieg, A. Schäfer, E. E. Scholz, and K. K. Szabó, Phys. Rev. D **88**, 014513 (2013).
27. R. Baron, P. Boucaud, P. Dimopoulos et al. (ETM Collaboration), JHEP **1008**, 097 (2010).