

# Редуцированная характеристика перестраиваемых линейно-оптических интегральных схем

Л. В. Бигуаа<sup>\*+1</sup>, К. Г. Катамадзе<sup>\*+</sup>, Б. И. Бантыш<sup>+</sup>, Ю. И. Богданов<sup>+</sup>

<sup>+</sup> Физико-технологический институт им. К. А. Валиева РАН, 117218 Москва, Россия

<sup>\*</sup> Центр квантовых технологий, физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 февраля 2024 г.

После переработки 25 апреля 2024 г.

Принята к публикации 8 мая 2024 г.

Перестраиваемые линейно-оптические схемы являются важным элементом как классических, так и квантовых информационных технологий. Масштабирование таких схем становится возможным только при переходе к интегральному исполнению, что усложняет их характеристику из-за невозможности реконструкции каждого элемента по отдельности. Существующие методы характеристики линейно-оптических схем требуют многократных измерений фаз матричных элементов передаточной матрицы при различных значениях управляющих параметров, что представляет собой значительные экспериментальные трудности. В данной работе предлагается новый подход: мы демонстрируем, что, измерив лишь коэффициенты пропускания для определенного набора значений управляющих параметров оптической схемы, можно построить математическую модель, способную предсказывать коэффициенты пропускания для произвольных значений параметров. Этот метод успешно апробирован в численном эксперименте на примере перестраиваемого четырехканального интерферометра, реализующего произвольное унитарное преобразование. Предложенный метод открывает новые возможности для более эффективной характеристики и проектирования перестраиваемых линейно-оптических схем.

DOI: 10.31857/S1234567824120115, EDN: XVPRCN

**1. Введение.** Использование классических и квантовых свойств света открывает новые возможности для методов обработки информации [1]. Линейно-оптические схемы (многоканальные интерферометры) играют важную роль в классической и квантовой оптической связи [2], в квантовых вычислениях [3–6], и задачах машинного обучения [7–9]. Математически любая линейно-оптическая схема полностью описывается с помощью передаточной матрицы  $M_{ij}$ , связывающей электрические поля во входных  $E_{in}^{(i)}$  и в выходных  $E_{out}^{(j)}$  каналах:

$$E_{out}^{(j)} = \sum_i M_{ij} E_{in}^{(i)}. \quad (1)$$

В идеальном случае передаточная матрица является унитарной, но при наличии оптических потерь свойство унитарности теряется. Квадраты модулей ее элементов  $|M_{ij}|^2$  являются коэффициентами пропускания оптического излучения из  $i$ -го входа в  $j$ -й выход и измеряются элементарно. Фазы матричных элементов измеряются интерференционным [10, 11] или корреляционным [12–14] способом, что является

более сложной и затратной по времени экспериментальной задачей.

В большинстве задач передаточную матрицу необходимо перестраивать, чтобы иметь возможность точно реализовать то или иное заданное преобразование. В интегральных оптических схемах это делается с помощью изменения оптической длины различных плечей интерферометра посредством термо- или электрооптического эффекта [15–17]. Таким образом можно построить интегральную схему, реализующую произвольное унитарное преобразование [18–21], однако подбор значений управляющих параметров, позволяющих получить заданное преобразование с необходимой точностью, является сложной задачей, которая может решаться двумя способами.

Первый способ основан на физической итерационной подстройке параметров и измерении передаточной матрицы на каждой итерации [22, 23]. Поскольку перестройка и измерение передаточной матрицы занимают достаточно большое время, этот способ не является оптимальным.

Второй способ заключается в том, чтобы сначала измерить некоторое количество передаточных матриц схемы для разных наборов значений управляю-

<sup>1</sup>)e-mail: Leon.006w@yandex.ru

щих параметров, затем построить математическую модель, описывающую их связь, а затем уже численно подобрать значения параметров, реализующих заданное преобразование [24–26]. Последняя стадия этого процесса является сравнительно быстрой, но на первой стадии все равно необходимо полностью (с учетом фаз) измерить большое количество передаточных матриц.

Однако, в ряде приложений, таких как реализация квантового генератора случайных чисел на основе квантовых блужданий [27], симуляция квантового переноса [16], квантовое распределение ключей [28], реализация оптических переключателей для однофотонных источников [29] и протоколов распределения запутанности [30, 31], где можно использовать такие переключатели, фазы элементов передаточной матрицы не играют никакой роли. Поэтому представляет интерес решение задачи характеристики перестраиваемой линейно-оптической схемы в редуцированном виде, когда сначала измеряются только модули матричных элементов (коэффициенты пропускания схемы) при различных значениях управляющих параметров, а затем строится математическая модель схемы, позволяющая предсказывать значения коэффициентов пропускания при произвольных значениях управляющих параметров.

Настоящая работа посвящена решению этой проблемы на примере четырехканального интерферометра, реализующего произвольное унитарное преобразование. При этом структура интерферометра считается известной, но неизвестны значения параметров его элементов.

**2. Математическая модель.** Мы исследуем возможность редуцированной характеристики перестраиваемых линейно-оптических схем на примере четырехканального интерферометра, построенного по схеме Клементса [19], реализующего произвольное унитарное преобразование, структура которого изображена на рис. 1. Интерферометр состоит из набора волноводов и светоделителей. Часть волноводов содержит управляемые фазовые элементы. Каждый волновод с контролируемым фазовым набегом осуществляет преобразование поля следующего вида:

$$E_{\text{out}} = \sqrt{T} E_{\text{in}} e^{i(\theta+\phi)}, \quad (2)$$

где  $T$  – коэффициент пропускания по мощности,  $\theta$  – некоторый неизвестный начальный фазовый сдвиг, а  $\phi$  – контролируемый фазовый сдвиг. Для пассивных волноводов  $\phi \equiv 0$ . Поскольку общий фазовый сдвиг всех выходных полей не влияет на финальное распределение мощности оптического излучения, часть начальных фазовых сдвигов  $\theta$  можно занулить.

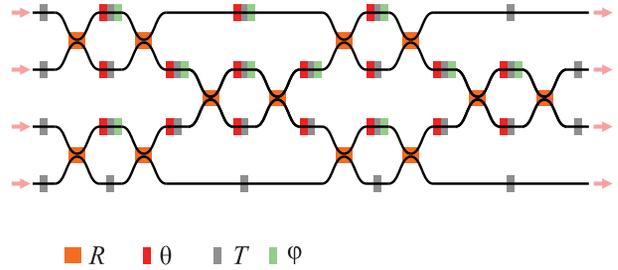


Рис. 1. (Цветной онлайн) Структура исследуемой линейно-оптической схемы. Параметры схемы, подлежащие определению обозначены цветом: оранжевый – коэффициенты связи светоделителей  $R$ ; серый – коэффициенты пропускания волноводов  $t$ ; красный – начальные фазовые сдвиги  $\theta$ . Зеленым обозначены контролируемые фазовые сдвиги  $\phi$

Каждый светоделитель осуществляет двухмодовое преобразование полей:

$$\begin{pmatrix} E_{\text{out}}^{(1)} \\ E_{\text{out}}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-R} & -\sqrt{R} \\ \sqrt{R} & \sqrt{1-R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\text{in}}^{(1)} \\ E_{\text{in}}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $R$  – коэффициент связи (доля излучения, которая переходит из одной моды в другую). Таким образом, все светоделители считаются унитарными, а все потери и фазовые сдвиги переносятся в волноводы. В результате вектор неизвестных параметров  $\xi$  состоит из 12 коэффициентов связи  $R$ , 28 коэффициентов пропускания  $T$  и 17 фазовых сдвигов  $\theta$ , а вектор контролируемых фаз  $\phi$  состоит из 10 элементов. Зная параметры  $\xi$  и  $\phi$ , можно рассчитать передаточную матрицу интерферометра  $M_{ij}(\xi, \phi)$  и его коэффициенты пропускания по мощности  $T_{ij}(\xi, \phi) = |M_{ij}(\xi, \phi)|^2$ .

Измерение коэффициентов пропускания интерферометра  $T_{ij}$  происходит следующим образом. На  $i$ -й вход подается оптическое излучение мощности  $P$ , и измеряются мощности выходного излучения в каждом из выходных каналов  $P_{ij}$ , где  $j = 1, \dots, 4$ . Процедура повторяется 4 раза для  $i = 1, \dots, 4$ . В результате коэффициенты пропускания можно определить как  $T_{ij} = P_{ij}/P$ . Однако, в реальном эксперименте измеренные значения могут отличаться от реальных. Как правило, наибольший вклад в инструментальные погрешности вносят шумы детектора. В численном эксперименте это моделируется следующим образом. К каждой рассчитанной выходной мощности  $P_{ij}$  добавляется случайная величина  $x_{ij}$ , имеющая нормальное распределение с нулевым средним значением и среднеквадратичным отклонением  $\sigma_{ij} = \eta P_{ij}$ , где  $\eta$  – отношение шум/сигнал, которое считается одинаковым для всех измерений. При этом все слу-

чайные величины  $x_{ij}$  независимы друг от друга и принимают новые значения при каждом новом измерении. Таким образом, измеренные значения мощности  $\tilde{P}_{ij}$  будут отличаться от идеальных, а измеренные значения коэффициентов пропускания будут равны  $\tilde{T}_{ij} = \tilde{P}_{ij}/P$ .

**3. Алгоритм характеристики.** Алгоритм характеристики состоит из этапа обучения, на котором происходит определение оптимальных значений неизвестных параметров модели оптической схемы  $\hat{\xi}$  и этапа валидации, на котором проверяется, насколько хорошо полученная модель описывает результат эксперимента. Если модель не проходит валидацию, то этап обучения повторяется. Кроме того, в численном эксперименте проводилась процедура тестирования, которая повторяла процедуру валидации на большем объеме экспериментальных данных. Ниже мы рассмотрим подробнее оба этапа.

*3.1. Этап обучения.* Случайным образом генерируется  $K_{ed} = 30$  конфигураций управляющих параметров  $\{\phi^{(k)}\}$ . Для каждой конфигурации  $\phi^{(k)}$  измеряются все коэффициенты пропускания схемы  $\tilde{T}_{ij}^{(k)}$ . Для тех же значений управляющих параметров и некоторых значений неизвестных параметров  $\xi'$  можно рассчитать коэффициенты пропускания  $T_{ij}^{(k)} = T_{ij}(\xi', \phi^{(k)})$ . Тогда оптимальные значения параметров  $\hat{\xi}$  могут быть найдены методом глобальной минимизации некоторой меры близости  $\Delta(\xi')$  между рассчитанными  $T_{ij}^{(k)}$  и измеренными  $\tilde{T}_{ij}^{(k)}$  коэффициентами пропускания. Простейшим вариантом такой меры может быть сумма квадратов их разностей:

$$\Delta_T(\xi') = \sqrt{\sum_k [\delta_T(\xi', \phi^{(k)})]^2}, \quad (4)$$

где

$$\delta_T(\xi', \phi^{(k)}) = \frac{1}{4} \sqrt{\sum_{i,j} [T_{ij}(\xi', \phi^{(k)}) - \tilde{T}_{ij}^{(k)}]^2}. \quad (5)$$

Однако в ряде задач важны не абсолютные, а относительные коэффициенты пропускания  $\tau_{ij} \equiv T_{ij}/T_{i0}$ , где  $T_{i0} = \sum_j T_{ij}$  – полное пропускание схемы при подключенном  $i$ -м входе. Фактически,  $\tau_{ij}$  – это коэффициенты деления мощности излучения между разными выходами, сумма которых равна единице. Для оптимизации коэффициентов деления можно минимизировать меру близости

$$\Delta_\tau(\xi') = \sqrt{\sum_k [\delta_\tau(\xi', \phi^{(k)})]^2}, \quad (6)$$

где

$$\delta_\tau(\xi', \phi^{(k)}) = \frac{1}{4} \sqrt{\sum_{i,j} [\tau_{ij}(\xi', \phi^{(k)}) - \tilde{\tau}_{ij}^{(k)}]^2}. \quad (7)$$

В численном эксперименте мы минимизировали сумму квадратов этих функций:

$$\Delta(\xi') = \sqrt{\Delta_T^2(\xi') + \Delta_\tau^2(\xi')} \quad (8)$$

и в результате получали оценку неизвестных параметров схемы  $\hat{\xi}$ . При этом выбор такой целевой функции обусловлен желанием добиться высокой точности предсказания одновременно как для абсолютных значений коэффициентов пропускания  $T_{ij}$ , так и для относительных коэффициентов деления  $\tau_{ij}$ .

Алгоритм был написан на языке Python, а минимизация проводилась методом дифференциальной эволюции [32] из библиотеки `scipy.optimize`. Явно заданные параметры метода следующие: количество итераций – 100, толерантность – 0.0001; параметры рекомбинации и мутации – 0.7 и 0.35; параметр `popsize` – 40.

*3.2. Этапы валидации и тестирования.* На этапе валидации полученной оценки генерируется новая случайная выборка из  $K_{val} = 400$  конфигураций управляющих параметров  $\{\phi^{(k)}\}$ . Для каждой конфигурации снова измеряются коэффициенты пропускания  $\tilde{T}_{ij}^{(k)}$  и рассчитывается мера близости  $\delta_\tau(\hat{\xi}, \phi^{(k)})$ . Если для всех конфигураций  $\{\phi^{(k)}\}$  эта мера оказывалась меньше некоторого порогового значения  $\delta_\tau^{th}$ , то валидация считается пройденной. В противном случае стохастический алгоритм оптимизации запускался еще раз. В ходе работы было показано, что разумным значением  $\delta_\tau^{th}$  является соотношение шум/сигнал  $\eta$ . В этом случае для прохождения валидации оптимизационный алгоритм было достаточно перезапустить не более 70 раз. При этом все повторы алгоритма оптимизации и этапа валидации проводились на одном и том же наборе измерений. Мера близости абсолютных значений коэффициентов пропускания  $\delta_T$  на этапе валидации не проверялась, поскольку опыт показал, что она всегда оказывалась достаточно малой.

На этапе тестирования еще раз генерируется случайная выборка из  $K_{test} = 10^4 \gg K_{val}$  конфигураций управляющих параметров  $\{\phi^{(k)}\}$ . Для более полного анализа результатов для каждой конфигурации рассчитывались три меры близости:  $\delta_T(\hat{\xi}, \phi^{(k)})$ ,  $\delta_\tau(\hat{\xi}, \phi^{(k)})$ , а также

$$\delta_{T0}(\hat{\xi}, \phi^{(k)}) = \frac{\sum_{i,j} T_{ij}(\xi', \phi^{(k)})}{\sum_{i,j} \tilde{T}_{ij}^{(k)}}. \quad (9)$$

Последняя мера близости показывает, во сколько раз предсказанное суммарное пропускание схемы отличается от экспериментального. В идеальном случае  $\delta_{T0} \rightarrow 1$ , в то время как  $\delta_T, \delta_\tau \rightarrow 0$ .

Важным отличием этапа тестирования от этапа валидации является то, что на этапе тестирования нас интересуют истинные значения коэффициентов пропускания, поэтому при тестировании детекторы считаются идеальными и не добавляют шумов.

Заметим, что описанный алгоритм не позволяет определить истинные значения параметров схемы  $\xi_{\text{true}}$ , поскольку эта задача не имеет единственного решения. Но схема с параметрами  $\hat{\xi}$  будет давать те же распределения оптических мощностей, при тех же значениях управляющих параметров, что и исходная, чего достаточно для практических применений.

В частности, результаты измерений инвариантны относительно переноса оптических потерь от начала схемы к концу, а также относительно перераспределения постоянных фазовых сдвигов.

**4. Результаты численного эксперимента.**

Численный эксперимент проводился с 15-ю различными оптическими схемами, параметры которых  $\xi_{\text{true}}$  выбирались следующим образом: коэффициенты пропускания  $T$  на входах и выходах схемы выбирались случайным образом из диапазона 0.025 – 0.178 (включая границы), коэффициенты пропускания внутренних волноводов – из диапазона 0.8–1, коэффициенты связи светоделителей  $R$  выбирались случайным образом из диапазона 0.4–0.8, а все фазы  $\theta$  выбирались случайно от 0 до  $2\pi$ . Эти параметры соответствуют возможностям изготовления оптических интегральных схем методом фемтосекундной лазерной печати. Границы параметров учитывались в процессе оптимизации.

Для каждого интерферометра проводилась характеристика с разным уровнем шумов детекторов  $\eta = 10^{-9}, 10^{-8}, \dots, 10^{-1}$ . Качество характеристики оценивалось на основе расчета мер близости коэффициентов пропускания  $\delta_T$ , коэффициентов деления  $\delta_\tau$  и полного пропускания  $\delta_{T0}$  на тестовой выборке. Для каждого коэффициента шум/сигнал все три меры близости вычислялись для 15 различных схем и  $10^4$  конфигураций управляющих элементов (фактический объем статистической выборки для каждой схемы).

На рисунке 2 показаны примеры гистограмм всех трех мер близости для случая самых больших шумов  $\eta = 10^{-1}$ . При этом можно заметить, что на гистограмме (с) рис. 2 значения меры близости для коэффициентов пропускания больше единицы, т.е. алго-

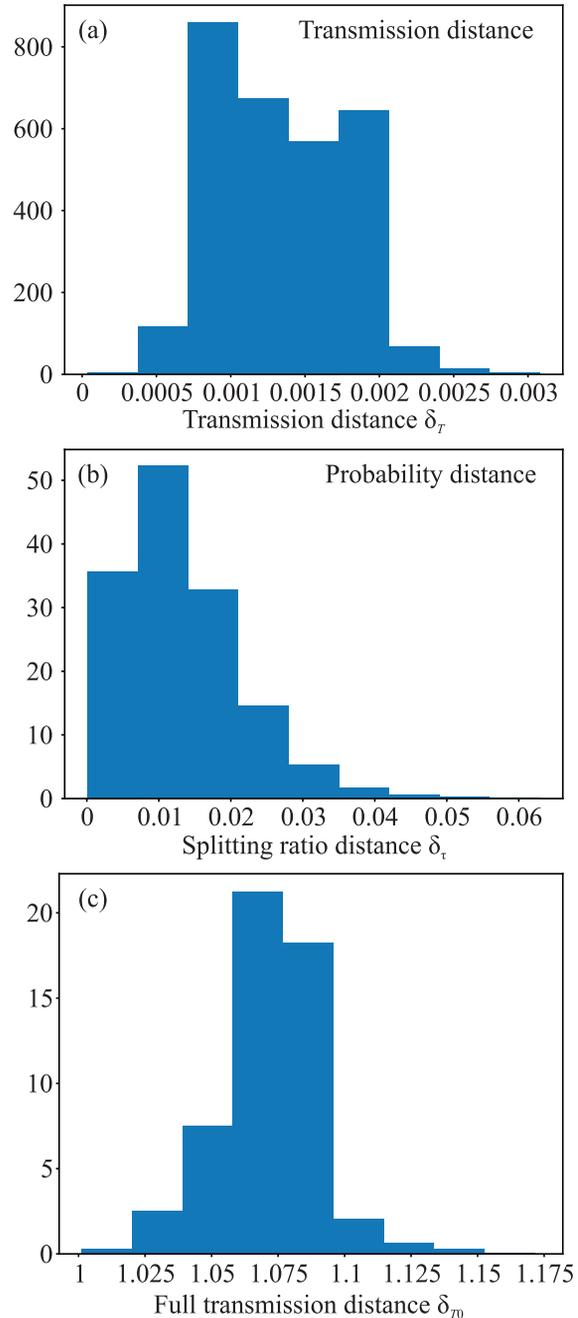


Рис. 2. (Цветной онлайн) Гистограммы распределений мер близости  $\delta$  для соотношения шум/сигнал  $\eta = 10^{-1}$ . (a) – Мера близости коэффициентов пропускания  $\delta_T$ . (b) – Мера близости коэффициентов деления  $\Delta\delta_\tau$ . (c) – Мера близости коэффициентов полного пропускания  $\delta_{T0}$ .

ритм систематически предсказывает большие коэффициенты пропускания. Мы связываем такое поведение с особенностями использованного метода оптимизации.

На рисунке 3 приведены диаграммы типа “ящик с усами” [33] для распределений мер близости для

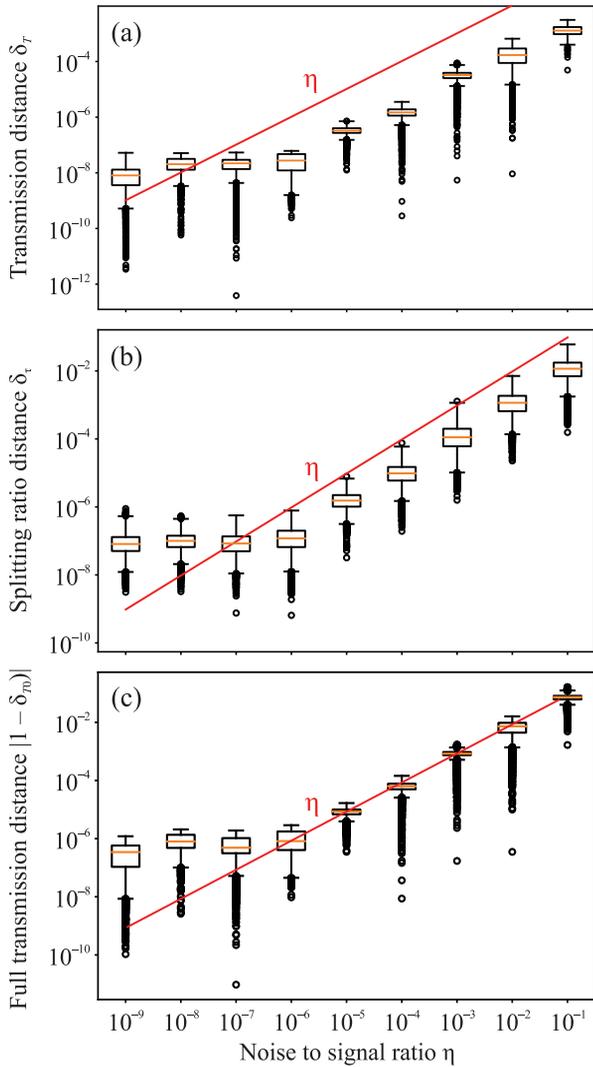


Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимость мер близости  $\Delta\delta$  от соотношения шум/сигнал  $\eta$ . (a) – Мера близости коэффициентов пропускания  $\delta_T$ . (b) – Мера близости коэффициентов деления  $\delta_{T_0}$ . (c) – Мера близости коэффициентов полного пропускания  $\delta_{T_0}$ . Пунктиром на каждом из графиков показаны значения  $\eta$ .

всех остальных значений шумов. Данные диаграммы устроены следующим образом: границами ящика с усами служат соответственно 1-й и 3-й квартили, линия в середине ящика – это медиана. Каждый ус продолжается до крайней из точек, отстоящих не далее, чем на 1.5 межквартильных расстояния от соответствующей границы ящика. Более удаленные точки (при наличии таковых), не попадающие в указанные границы, идентифицируются как выбросы и отмечаются отдельными точками. С практической точки зрения, выбросы, отвечающие малым значениям мер близости несущественны.

По представленным графикам видно, что при уровне шумов  $\eta > 10^{-6}$  все меры близости пропор-

циональны  $\eta$ , но при этом  $\delta_T \sim \eta/100$ ,  $\delta_{T_0} \sim \eta/10$ , а  $|1 - \delta_{T_0}| \sim \eta$ . Таким образом, исследуемая калибровка с большей точностью позволяет предсказывать соотношения коэффициентов пропускания, чем полное пропускание схемы. При уровне шумов  $\eta < 10^{-6}$  все меры близости выходят на константы, отвечающие погрешностям численного счета, в частности, погрешности алгоритма оптимизации и ошибке округления.

**Закключение.** В работе исследована возможность редуцированной калибровки перестраиваемых линейно-оптических схем, при которой измеряются только модули матричных элементов передаточной матрицы. На примере четырехканального интерферометра, построенного по схеме Клемента в численном эксперименте показано, что проведя измерения для сравнительно небольшого набора значений управляющих параметров (30 различных конфигураций), можно построить ее математическую модель, которая будет предсказывать коэффициенты пропускания (модули элементов передаточной матрицы) схемы при произвольных значениях управляющих параметров. При этом погрешность предсказания пропорциональна отношению шум/сигнал детекторов, использующихся при калибровочных измерениях.

Что касается масштабирования данного подхода на линейно-оптические схемы большей размерности, то этот вопрос является предметом дальнейших исследований, поскольку из-за увеличения числа неизвестных параметров вычислительная сложность оптимизационного алгоритма существенно возрастает. В то же время, результаты настоящего исследования позволяют предположить, что и для схем большей размерности все меры близости восстановленной модели схемы будут иметь тот же порядок, что и инструментальная погрешность измерений.

**Финансирование работы.** Работа выполнена в рамках проекта # 22-12-00263 Российского научного фонда.

**Конфликт интересов.** Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. P. Minzioni, C. Lacava, and T. Tanabe, *J. Opt.* **21**, 063001 (2019).
2. N. C. Harris, J. Carolan, D. Bunandar, M. Prabhu, M. Hochberg, T. Baehr-Jones, M. L. Fanto, A. M. Smith, C. C. Tison, P. M. Alsing, and D. Englund, *Optica* **5**, 1623 (2018).
3. J. Carolan, C. Harrold, C. Sparrow, E. Martin-Lopez, *Science* **349**, 711 (2015).
4. H.-S. Zhong, Y. Y. Li, and W. Li, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 250505 (2018).

5. W. Asavanant, Y. Shiozawa, S. Yokoyama, B. Charoensombutamon, H. Emura, R.N. Alexander, S. Takeda, J.-I. Yoshikawa, N.C. Menicucci, H. Yonezawa, and A. Furusawa, *Science* **366**, 373 (2019).
6. J. Wang, F. Sciarrino, A. Laing, and M. G. Thompson, *Nature Photon.* **14**, 273 (2019).
7. R. Hamerly, L. Bernstein, A. Sludds, and M. Marin, Soljaić, and D. Englund, *Phys. Rev. X* **9**, 021032 (2019).
8. G. Wetzstein and, A. Ozcan, S. Gigan, S. Fan, D.R. Englund, M. Soljačić, C. Denz, D.A.B. Miller, and D. Psaltis, *Nature* **588**, 39 (2020).
9. H. Zhang, M. Gu, and X.D. Jiang, *Nat. Commun.* **12**, 457 (2021).
10. S. Rahimi-Keshari, M.A. Broome, R. Fickler, A. Fedrizzi, T.C. Ralph, and A.G. White, *Opt. Express* **21**, 13450 (2012).
11. K.V. Jacob, E.A. Mirasola, S. Adhikari, and P.J. Dowling, *Phys. Rev. A* **98**, 052327 (2018).
12. A. Laing and J.L. O'Brien, arXiv:1208.2868 [quant-ph] (2012).
13. A. Peruzzo, A. Laing, A. Politi, T. Rudolph, and J.L. O'Brien, *Nat. Commun.* **2**, 1 (2010).
14. K.G. Katamadze, G. Avosopiants, A.V. Romanova, Y.I. Bogdanov, and S. Kulik, *Laser Phys. Lett.* **18**, 075201 (2021).
15. J. Carolan, C. Harrold, C. Sparrow et al. (Collaboration), *Science* **349**, 711 (2015).
16. N.C. Harris, G.R. Steinbrecher, M. Prabhu, Y. Lahini, J. Mower, D. Bunandar, C. Chen, F.N.C. Wong, T. Baehr-Jones, M. Hochberg, S. Lloyd, and D.R. Englund, *Nature Photon.* **11**, 447 (2015).
17. C. Sparrow, E. Martin-Lopez, N. Maraviglia, A. Neville, C. Harrold, J. Carolan, Y.N. Joglekar, T. Hashimoto, N. Matsuda, J.L. O'Brien, D.P. Tew, and A. Laing, *Nature* **557**, 660 (2018).
18. M. Reck, A. Zeilinger, H. J. Bernstein, and P. Bertani, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 58 (1994).
19. W.R. Clements, P.C. Humphreys, B.J. Metcalf, W.S. Kolthammer, and I.A. Walsmley, *Optica* **3**, 1460 (2016).
20. S. A. Fldzhyan, M. Y. Saygin, and S. Kulik, *Opt. Lett.* **45**, 2632 (2019).
21. M. Y. Saygin, I. V. Kondratyev, I. V. Dyakonov, S. Mironov, S. Straupe, and S. P. Kulik, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 010501 (2019).
22. D. Pérez-López, A. López, P. Dasmahapatra, and J. Capmany, *Nat. Commun.* **11**, 6359 (2020).
23. I. V. Dyakonov, I. Pogorelov, I. B. Bobrov, A. A. Kalinkin, P. Dyakonov, S. A. Evlashin, S. Straupe, and S. Kulik, *Phys. Rev. Appl.* **10**, 044048 (2018).
24. S. Z. Kuzmin, I. V. Dyakonov, and S. Kulik, *Opt. Express* **29**, 38429 (2021).
25. B. I. Bantysh, K. G. Katamadze, A. Y. Chernyavskiy, and Y. I. Bogdanov, *Opt. Express* **31**, 16729 (2023).
26. B. I. Bantysh, A. Y. Chernyavskiy, S. A. Fldzhyan, and Y. I. Bogdanov, *Laser Phys. Lett.* **21**, 015203 (2023).
27. M. Gräfe and A. Szameit, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **53**, 073001 (2020).
28. Y. Ding, D. Bacco, K. Dalgaard, X. Cai, X. Zhou, K. Rottwitt, and L.K. Oxenløwe, *npj Quantum Inf.* **3**(25), 1 (2017).
29. D. D. Bühler, M. Weiss, A. Crespo-Poveda, E.D.S. Nysten, J. J. Finley, K. Müller, P.V. Santos, M.M. de Lima, and H. J. Krenner, *Nat. Commun.* **13**(6998), 1 (2022).
30. D. Nadlinger, P. Drmota, B. C. Nichol, G. Araneda, D. Main, R. Srinivas, D.M. Lucas, C. Ballance, K. Ivanov, E. Y.-Z. Tan, P. Sekatski, R. L. Urbanke, R. Renner, N. Sangouard, and J.-D. Bancal, *Nature* **607**, 682 (2021).
31. T. van Leent, M. Bock, F. Fertig, R. Garthoff, S. Eppelt, Y. Zhou, P. Malik, M. M. Seubert, T. Bauer, W. Rosenfeld, W. Zhang, C. Becher, and H. Weinfurter, *Nature* **607**, 69 (2021).
32. R. Storn and K.V. Price, *Journal of Global Optimization* **11**, 341 (1997).
33. J. W. Tukey, *Exploratory data analysis*, Addison-Wesley series in behavioral science: quantitative methods, Addison-Wesley Publishing Corporation, Reading, Massachusetts (1977).