

# Теория композитных рамсеевских последовательностей радиочастотных импульсов вне рамок резонансного приближения

В. И. Юдин<sup>+\*×1)</sup>, О. Н. Прудников<sup>+\*</sup>, А. В. Тайченачев<sup>+\*</sup>, М. Ю. Басалаев<sup>+\*×</sup>, В. Г. Пальчиков<sup>°∇</sup>,  
С. Н. Багаев<sup>+\*</sup>

<sup>+</sup>Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

<sup>\*</sup>Институт лазерной физики Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия

<sup>×</sup>Новосибирский государственный технический университет, 630073 Новосибирск, Россия

<sup>°</sup>Всероссийский научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений,  
141570 Менделеево, Россия

<sup>∇</sup>Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, 115409 Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 июня 2024 г.

После переработки 6 июня 2024 г.

Принята к публикации 10 июня 2024 г.

Мы развиваем теорию композитных рамсеевских последовательностей радиочастотных импульсов, взаимодействующих с зеemanовской структурой на долгоживущем энергетическом уровне атома (иона), вне рамок резонансного приближения. Такие последовательности предложено использовать в экспериментах по обнаружению нарушения локальной Лоренц-инвариантности [R. Shaniv, R. Ozeri, M. S. Safronova, S. G. Porsev, V. A. Dzuba, V. V. Flambaum, and H. Häffner, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 103202 (2018)]. Основываясь на Фурье-анализе, нами показано, что учет нерезонансных вкладов приводит к радикальному изменению динамики квантовой системы (по отношению к резонансному приближению) в случае, когда число рамсеевских импульсов превышает несколько десятков. В результате, эффективность использования таких последовательностей радиочастотных импульсов для тестирования локальной Лоренц-инвариантности до конца не определена и требует дополнительных исследований.

DOI: 10.31857/S1234567824130056, EDN: OEENIL

Независимость результатов любого локального эксперимента от скорости и пространственной ориентации измерительных приборов теоретически формулируется как локальная Лоренц-инвариантность (ЛЛИ), которая является одним из основных фундаментальных принципов симметрии в современной физике. Однако в некоторых теориях, объединяющих Стандартную Модель и гравитацию в единую квантово-согласованную теорию, предполагается возможное нарушение симметрии Лоренца на планковском масштабе [1–3].

С точки зрения обнаружения гипотетического нарушения ЛЛИ, прецизионные спектроскопические эксперименты с захваченными атомами и ионами являются в настоящее время одним из наиболее перспективных направлений исследований [4–10]. Например, в работе [9] рассматриваются атомы (ионы), находящиеся на долгоживущем энергетическом уровне с угловым моментом  $J > 1/2$ , в присутствии

статического магнитного поля, снимающего вырождение по магнитным подуровням с квантовым числом  $m$  ( $-J \leq m \leq J$ ). В этом случае нарушение ЛЛИ приводит к дополнительному энергетическому сдвигу зеemanовских подуровней по закону  $\kappa m^2$ , которое можно детектировать при долговременном опросе квантовой системы с помощью рамсеевской последовательности радиочастотных импульсов. При этом обнаружение суточной вариации измеряемого коэффициента  $\kappa$  (из-за вращения Земли, при прочих неизменных лабораторных условиях) и будет являться критерием нарушения ЛЛИ.

Чтобы подавить влияние флуктуаций статического и радиочастотного магнитных полей, сохраняя при этом высокую чувствительность к малому тензорному сдвигу ( $\propto m^2$ ), в [9] предложено использовать метод динамической развязки (*dynamical decoupling*) [11–16], когда композитная рамсеевская последовательность состоит из большого числа индивидуальных импульсов (в нашем случае сотни и тысячи), фазы которых также индивидуальны и сле-

<sup>1)</sup>e-mail: viyudin@mail.ru

дуют определенному закону. Применительно к тестированию ЛЛИ подобная техника впервые была апробирована в эксперименте [10], где рамсеевская последовательность состояла из нескольких тысяч импульсов. Следует отметить, что эффективность техники динамической развязки строго обоснована в рамках модели двухуровневого атома и резонансного приближения, которое является абсолютно адекватным в случае оптических переходов с частотой выше  $10^{13}$  Гц. Однако, поскольку частота зеемановского расщепления в [9, 10] не превышает 10 МГц, то в этом случае нельзя автоматически полагать сохранение эффективности данной техники для композитных рамсеевских последовательностей радиочастотных импульсов. Поэтому для более детальной разработки метода [9] теоретический анализ необходимо вести без использования резонансного приближения.

В настоящей работе, на основе Фурье-анализа вне рамок резонансного приближения, нами численно исследована спектроскопическая схема, предложенная в [9]. Показано, что учет нерезонансных вкладов приводит к радикальному изменению динамики квантовой системы (по отношению к резонансному приближению, используемому в [9]) в случае, когда число радиочастотных рамсеевских импульсов превышает несколько десятков.

Рассмотрим атом (ион), находящийся на долгоживущем энергетическом уровне с угловым моментом  $J$ , волновую функцию которого мы будем описывать в базисе магнитных (зеемановских) подуровней  $|J, m\rangle$  ( $-J \leq m \leq J$ ). Метод рамсеевских последовательностей радиочастотных импульсов основан на наличии статического магнитного поля  $\mathbf{B}_{\text{st}} = B_{\text{st}} \mathbf{n}_{\text{st}}$  и переменного поля  $\mathbf{B}_{\text{rf}}(t) = B_{\text{rf}}(t) \mathbf{n}_{\text{rf}}$ , где единичные векторы  $\mathbf{n}_{\text{st}}$  и  $\mathbf{n}_{\text{rf}}$  описывают ориентацию статического и переменного полей, соответственно. Для серии импульсов магнитного поля с гармонической модуляцией на частоте  $\nu$  скалярная амплитуда переменного магнитного поля описывается следующим образом:

$$B_{\text{rf}}(t) = \eta(t) \mathcal{B} \cos[\nu t + \phi(t)], \quad (1)$$

где  $\eta(t) = 1$  во время действия рамсеевского импульса и  $\eta(t) = 0$  в промежутках между импульсами,  $\mathcal{B}$  есть амплитуда поля во время действия импульсов,  $\phi(t)$  есть фаза импульса, которая для различных импульсов может быть различной. В этом случае гамильтониан атома имеет следующий вид:

$$\hat{H}(t) = \Omega_L (\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{n}_{\text{st}}) + \eta(t) 2\Omega_{\text{rf}} \cos[\nu t + \phi(t)] (\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{n}_{\text{rf}}), \quad (2)$$

где  $\hat{\mathbf{J}}$  есть оператор углового момента,  $\Omega_L = \mu_B g_J B_{\text{st}} / \hbar$  есть частота ларморовской прецессии

в статическом магнитном поле ( $\mu_B$  есть магнетон Бора,  $g_J$  есть  $g$ -фактор рассматриваемого энергетического уровня), а  $\Omega_{\text{rf}} = \mu_B g_J \mathcal{B} / (2\hbar)$  есть эффективная частота Раби для радиочастотной гармонической модуляции.

В случае взаимно ортогональной ориентации векторов ( $\mathbf{n}_{\text{st}} \perp \mathbf{n}_{\text{rf}}$ ) выберем ось  $Oz$  вдоль  $\mathbf{n}_{\text{st}}$  и ось  $Ox$  вдоль  $\mathbf{n}_{\text{rf}}$ , что приводит к следующему выражению

$$\hat{H}(t) = \Omega_L \hat{J}_z + \kappa \hat{J}_z^2 + \eta(t) 2\Omega_{\text{rf}} \cos[\nu t + \phi(t)] \hat{J}_x, \quad (3)$$

где мы также ввели малый тензорный сдвиг  $\kappa \hat{J}_z^2$  ( $\propto m^2$ ), обусловленный предполагаемым нарушением ЛЛИ, а также квадратичным зеемановским сдвигом и квадрупольным сдвигом (возникающим в ионных ловушках из-за их собственного градиента электрического поля) (см. [9]). При этом волновая функция  $|\Psi(t)\rangle$ , удовлетворяющая уравнению Шредингера

$$i\hbar \partial_t |\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle, \quad |\Psi(t)\rangle = \sum_m a_m(t) |J, m\rangle, \quad (4)$$

определяется стандартным образом как суперпозиция по магнитным подуровням.

Используя в выражении (4) следующее преобразование

$$a_m(t) = \tilde{a}_m(t) e^{-im\nu t}, \quad (5)$$

можно показать, что новая волновая функция  $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$  определяется из другого уравнения Шредингера

$$i\hbar \partial_t |\tilde{\Psi}(t)\rangle = \hat{H}_2(t) |\tilde{\Psi}(t)\rangle, \quad |\tilde{\Psi}(t)\rangle = \sum_m \tilde{a}_m(t) |J, m\rangle, \quad (6)$$

с модифицированным гамильтонианом

$$\hat{H}_2(t) = -\delta \hat{J}_z + \kappa \hat{J}_z^2 + \eta(t) \frac{\Omega_{\text{rf}}}{2} \{ e^{i\phi(t)} \hat{J}_- + e^{-i\phi(t)} \hat{J}_+ \} + \eta(t) \frac{\Omega_{\text{rf}}}{2} \{ e^{-i2\nu t - i\phi(t)} \hat{J}_- + e^{i2\nu t + i\phi(t)} \hat{J}_+ \}, \quad (7)$$

где  $\delta = \nu - \Omega_L$  есть отстройка от резонанса, а  $\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$  есть стандартные повышающий (+) и понижающий (−) операторы.

Далее, в случае выполнения условий

$$\frac{|\delta|}{\Omega_L} \ll 1, \quad \frac{\Omega_{\text{rf}}}{\Omega_L} \ll 1, \quad (8)$$

можно перейти к резонансному приближению, отбросив в (7) осциллирующие вклады и используя только эффективный (укороченный) резонансный гамильтониан

$$\hat{H}_{\text{res}} = -\delta \hat{J}_z + \kappa \hat{J}_z^2 + \eta(t) \frac{\Omega_{\text{rf}}}{2} \{ e^{i\phi(t)} \hat{J}_- + e^{-i\phi(t)} \hat{J}_+ \} = -\delta \hat{J}_z + \kappa \hat{J}_z^2 + \eta(t) \Omega_{\text{rf}} \{ \cos \phi(t) \hat{J}_x + \sin \phi(t) \hat{J}_y \}. \quad (9)$$

Именно такой резонансный подход использовался в [9, 17] для теоретического обоснования метода по обнаружению нарушения ЛЛИ.

Нашей целью является анализ применимости резонансного приближения в случае рамсеевских последовательностей радиочастотных импульсов, включающих сотни и тысячи индивидуальных импульсов. Для этого мы проводим численные расчеты эволюции атома в рамках решения уравнения Шредингера с полным гамильтонианом (3) [или (7)] и сопоставляем их с расчетами для эффективного гамильтониана (9).

В данной работе мы будем рассматривать композитные рамсеевские последовательности радиочастотных импульсов, использующие технику динамической развязки. Общая схема таких последовательностей представлена на рис. 1. Здесь начальный  $\pi/2$ -импульс длительностью  $\tau/2$  (т.е.  $\Omega_{\text{rf}}\tau/2 = \pi/2$ ) имеет фазу  $\phi_{\text{in}} = 0$ , в то время как завершающий  $\pi/2$ -импульс имеет фазу  $\phi_{\text{fin}}$ . Между этими двумя  $\pi/2$ -импульсами по шкале времени расположены  $n$  число одинаковых  $N$ -боксов, каждый из которых состоит из  $N$  числа  $\pi$ -импульсов длительности  $\tau$  ( $\Omega_{\text{rf}}\tau = \pi$ ) с соответствующими фазами  $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)$ . Таким образом, имеет место полное число  $(Nn + 2)$  индивидуальных рамсеевских импульсов (включая начальный и финальный  $\pi/2$ -импульсы). При этом время свободной эволюции между соседними  $\pi$ -импульсами равно  $\tau_R$ , а время между начальным  $\pi/2$ -импульсом и первым  $\pi$ -импульсом, а также время между последним  $\pi$ -импульсом и финальным  $\pi/2$ -импульсом составляет  $\tau_R/2$ . Описанную выше композитную рамсеевскую последовательность радиочастотных импульсов (см. рис. 1) мы будем обозначать как  $\{(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)^n, \phi_{\text{fin}}\}$ .

Для определенности рассмотрим энергетический уровень с  $J = 7/2$ . Именно такой долгоживущий (метастабильный) уровень ( ${}^2F_{7/2}$ ) существует в энергетической структуре иона  ${}^{171}\text{Yb}^+$ , который рассматривается в [9, 10, 17] как один из наиболее перспективных объектов для обнаружения нарушения ЛЛИ. В расчетах будем полагать, что в начальный момент времени атом (ион) находится на магнитном подуровне с квантовым числом  $m'$ . При этом после воздействия композитной рамсеевской последовательности радиочастотных импульсов мы будем анализировать населенность на этом же подуровне,  $P_{m'} = |a_{m'}|^2 = |\tilde{a}_{m'}|^2$ .

В качестве конкретного примера мы провели расчеты для рамсеевской последовательности  $\{(\pi/2, -\pi/2)^n, \pi\}$  из работы [9], для которой  $N$ -боксы

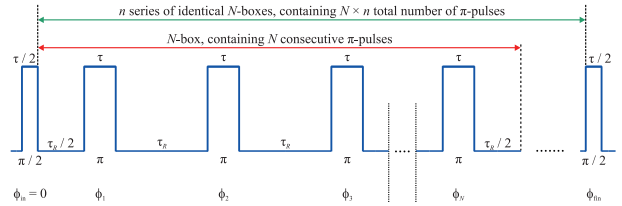


Рис. 1. (Цветной онлайн) Общая схема композитной рамсеевской последовательности радиочастотных импульсов  $\{(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N)^n, \phi_{\text{fin}}\}$ , состоящей из  $(Nn + 2)$  индивидуальных рамсеевских импульсов.

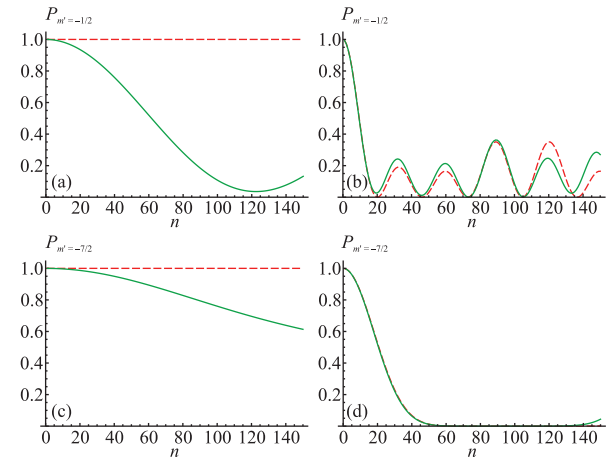


Рис. 2. (Цветной онлайн) Расчеты величины  $P_{m'}$  после действия композитной рамсеевской последовательности  $\{(\pi/2, -\pi/2)^n, \pi\}$  для  $\kappa = 0$  (красная штриховая линия): (a) —  $P_{m'=-\frac{1}{2}}$  на основе резонансного гамильтониана (9); (b) —  $P_{m'=-\frac{1}{2}}$  на основе полного гамильтониана (3) [или (7)] с использованием Фурье-анализа; (c) —  $P_{m'=-\frac{7}{2}}$  на основе резонансного гамильтониана (9); (d) —  $P_{m'=-\frac{7}{2}}$  на основе полного гамильтониана (3) [или (7)] с использованием Фурье-анализа. Параметры расчетов:  $\Omega_{\text{rf}}\tau = \pi$ ,  $\Omega_L/\Omega_{\text{rf}} = 100$ ,  $\delta = 0$ ,  $\tau_R = 10\tau$

состоит из двух  $\pi$ -импульсов с фазами  $\phi_1 = \pi/2$  и  $\phi_2 = -\pi/2$ , а завершающий  $\pi/2$ -импульс имеет фазу  $\phi_{\text{fin}} = \pi$ . На рисунке 2а, б представлена зависимость  $P_{m'=-\frac{1}{2}}$  от числа  $n$  одинаковых  $N$ -боксов в случае магнитного квантового числа  $m' = -1/2$ . При этом рис. 2а соответствует резонансному подходу с эффективным гамильтонианом (9) и совпадает с расчетами в [9], в то время как расчеты на рис. 2б сделаны на основе полного гамильтониана (3) [или (7)], используя Фурье-анализ. В последнем случае мы проводим разложение волновой функции по конечному числу гармоник  $(2\mathcal{F} + 1)$  с номерами от  $-\mathcal{F}$  до  $\mathcal{F}$ . При этом вычисления полагаются выполненными, когда дальнейшее увеличение  $\mathcal{F}$

не ведет ко сколько-нибудь заметному изменению расчетных зависимостей (для расчета кривых на рис. 2–4 с хорошим запасом оказалось достаточно  $\mathcal{F} = 50$ ).

Следует отметить, что именно существенное влияние слабого тензорного сдвига  $\kappa \hat{J}_z^2$  на долговременную динамику, наблюдаемое в резонансной теории (подобно зеленой кривой на рис. 2а), и является главной идеей метода [9], предложенного для экспериментального обнаружения нарушения ЛЛИ. Однако, как видно из сопоставления рис. 2а и b, резонансное приближение весьма неудовлетворительно описывает динамику системы для  $n \gg 1$ . Более того, наши расчеты для полного гамильтониана (3) [или (7)] показывают, что наличие малого тензорного вклада ( $\kappa \hat{J}_z^2$ ) практически не оказывает заметного влияния в случае выполнения условия

$$\frac{\hbar \kappa}{\Omega_{\text{rf}}} \ll \frac{\tau}{\tau_R} \frac{\Omega_{\text{rf}}}{\Omega_L}. \quad (10)$$

Этот факт также ясно демонстрируют рис. 2с, d, на которых представлена зависимость  $P_{m'=-\frac{7}{2}}$  от числа  $n$  одинаковых  $N$ -боксов. Подобные радикальные несоответствия между резонансной теорией, использующей эффективный гамильтониан (9), и расчетами на основе полного гамильтониана (3) [или (7)] наблюдаются также для других значений  $m'$  и  $J$  (например,  $J = 1/2; 3/2; 5/2$ ).

В случае же нарушения условия (10), точные вычисления на основе полного гамильтониана уже близки к резонансной теории (см. рис. 3). Поэтому хорошее совпадение в [9] результатов эксперимента для иона  $^{88}\text{Sr}^+$  ( $J = 5/2$ ,  $m' = -3/2$ , для последовательностей от  $n = 1$  до  $n = 55$ ) с расчетами по резонансной теории объясняется тем, что контролируемый в эксперименте тензорный сдвиг (квадрупольный сдвиг в линейной ловушке Пауля) является относительно большим и условие (10) не выполняется. Действительно, наши вычисления для  $J = 5/2$ , использующие экспериментальные данные из сопроводительных материалов к [9], подтверждают достаточно близкое совпадение резонансной теории с точными вычислениями. Однако вклад от предполагаемого нарушения ЛЛИ является заведомо очень малым и с гарантированным выполнением неравенства (10) для реальных экспериментов с  $n \gg 1$ . Таким образом, если тензорный сдвиг  $\kappa \hat{J}_z^2$  определяется в основном нарушением ЛЛИ, то использование рамсеевской последовательности радиочастотных импульсов  $\{(\pi/2, -\pi/2)^n, \phi_{\text{fin}}\}$ , рассмотренной в [9], не позволит надежно обнаружить этот сдвиг, даже если он имеет место в действительности.

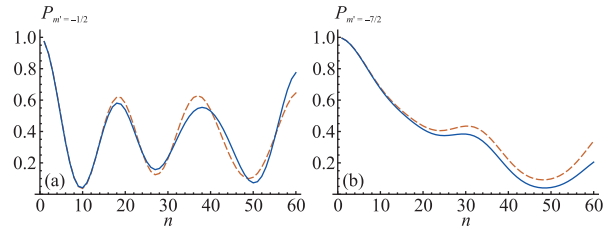


Рис. 3. (Цветной онлайн) Расчеты величины  $P_{m'}$  после действия композитной рамсеевской последовательности  $\{(\pi/2, -\pi/2)^n, \pi\}$  в случае, когда условие (10) нарушено, на основе резонансного гамильтониана (9) (штриховая коричневая линия) и точный расчет на основе полного гамильтониана (3) [или (7)] (сплошная синяя линия): (а) – для  $m' = -1/2$ ; (б) – для  $m' = -7/2$ . Параметры расчетов:  $\Omega_{\text{rf}}\tau = \pi$ ,  $\hbar\kappa/\Omega_{\text{rf}} = 0.0005$ ,  $\Omega_L/\Omega_{\text{rf}} = 400$ ,  $\delta = 0$ ,  $\tau_R = 10\tau$

Объяснение того, что для  $n \gg 1$  резонансная теория становится неадекватной [если выполняется условие (10)], на качественном уровне формулируется следующим образом. Пусть, например, имеет место отношение  $(\Omega_{\text{rf}}/\Omega_L) \sim 0.01$ . Тогда, как следует из Фурье-анализа уравнения Шредингера (6) с гамильтонианом (7), вклад высших гармоник у волновой функции  $|\Psi(t)\rangle$  по отношению к нулевой гармонике (которая и составляет суть резонансного приближения), также составляет 0.01 по порядку величины. Таким образом, для одного рамсеевского  $\pi$ -импульса точный расчет дает отклонение порядка 1% от резонансного приближения. Поэтому, после нескольких десятков последовательных  $\pi$ -импульсов можно ожидать существенное расхождение между резонансной теорией и точным расчетом, что и наблюдается нами в действительности (см. рис. 2). Аналогично, для величины отношения  $(\Omega_{\text{rf}}/\Omega_L) \sim 0.001$  значительное отклонение от резонансного подхода можно ожидать после нескольких сотен рамсеевских импульсов (что также подтверждается вычислениями). При этом существенно уменьшить “параметр нерезонансных вкладов”  $(\Omega_{\text{rf}}/\Omega_L)$  так, чтобы достичь выполнения условия (10), крайне проблематично. Действительно, сильно увеличивая зеemanовское расщепление  $\Omega_L$  (т.е. статическое магнитное поле  $B_{\text{st}}$ ), мы автоматически увеличиваем квадратичный зеemanовский сдвиг, который имеет такую же тензорную структуру ( $\propto \hat{J}_z^2$ ), как и предполагаемый сдвиг за счет нарушения ЛЛИ. Кроме того, возможна заметная неконтролируемая вариация отстройки  $\delta$ . Сильное уменьшение радиочастотного поля также неприемлемо, поскольку будут иметь место сильные относительные флуктуации малой величины  $\Omega_{\text{rf}}$ , что резко снизит чувствительность метода.

Вышеприведенные обстоятельства принципиально отличают рамсеевские последовательности радиочастотных импульсов от рамсеевских последовательностей на оптических переходах, где “параметр нерезонансных вкладов” может быть крайне малым ( $\Omega_{\text{Rabi}}/\omega_0 < 10^{-10}$  (где  $\Omega_{\text{Rabi}}$  есть частота Раби пробного поля на оптическом переходе с частотой  $\omega_0$ ). При этом, метод динамической развязки [11–16] разработан именно в рамках резонансного приближения для модели двухуровневого атома. Поэтому эффективность данной техники для композитных рамсеевских последовательностей радиочастотных импульсов должна быть исследована отдельно вне рамок резонансного приближения.

Также хорошо известно, что первой поправкой к резонансному приближению является сдвиг уровней, вызванный нерезонансными осциллирующими членами в полном гамильтониане (сдвиг Блоха–Зигерта [18]). В нашем случае, рассматривая полный гамильтониан (7) при выполнении условий (8), нетрудно показать, что учет первых нерезонансных вкладов приводит к модифицированному резонансному гамильтониану

$$\hat{H}_{\text{res}}^{(\text{mod})} = \hat{H}_{\text{res}} + \eta(t) \frac{\Omega_{\text{rf}}^2}{4\Omega_L} \hat{J}_z, \quad (11)$$

где мы использовали  $\eta^2(t) = \eta(t)$ . Как видно, выражение для  $\hat{H}_{\text{res}}^{(\text{mod})}$  отличается от (9) дополнительными малыми сдвигами энергии магнитных подуровней ( $\propto \hat{J}_z$ ) во время действия импульсов ( $\eta(t) = 1$ ), в то время как во время свободной эволюции эти сдвиги отсутствуют ( $\eta(t) = 0$ ). Однако, как показано на рис. 4, даже переход к модифицированному резонансному приближению на основе гамильтониана (11) не приводит к адекватному описанию динамики атома под действием композитной последовательности радиочастотных импульсов при  $n \gg 1$ .

В заключении, используя Фурье-анализ вне рамок резонансного приближения, мы рассмотрели действие композитных рамсеевских последовательностей радиочастотных импульсов, взаимодействующих с зеемановской структурой на долгоживущем энергетическом уровне атома (иона). Такие последовательности предложены в [9] для экспериментального тестирования ЛЛИ. Нами показано, что учет нерезонансных вкладов приводит к радикальному изменению динамики квантовой системы (по отношению к резонансному приближению) в случае, когда число рамсеевских импульсов превышает несколько десятков или сотен. Это объясняется тем, что “параметр нерезонансных вкладов” (отношение  $\Omega_{\text{rf}}/\Omega_L$ ) является не очень маленьким ( $\Omega_{\text{rf}}/\Omega_L \sim 10^{-2}-10^{-3}$ ). В результате, возмож-

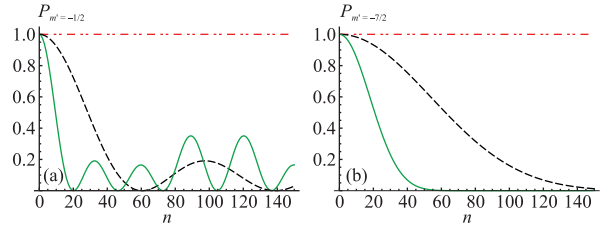


Рис. 4. (Цветной онлайн) Расчеты величины  $P_{m'}$  после действия композитной рамсеевской последовательности  $\{(\pi/2, -\pi/2)^n, \pi\}$  на основе резонансного гамильтониана (9) (штрих-пунктирная красная линия), на основе модифицированного резонансного гамильтониана (11) (штриховая черная линия), и точный расчет на основе полного гамильтониана (3) [или (7)] (сплошная зеленая линия): (а) – для  $m' = -1/2$ ; (б) – для  $m' = -7/2$ . Параметры расчетов:  $\Omega_{\text{rf}}\tau = \pi$ ,  $\kappa = 0$ ,  $\Omega_L/\Omega_{\text{rf}} = 100$ ,  $\delta = 0$ ,  $\tau_R = 10\tau$

ность использования таких рамсеевских последовательностей радиочастотных импульсов с целью обнаружения нарушения ЛЛИ требует дополнительных исследований и поиска наиболее подходящих спектроскопических схем. При этом эффективность техники динамической развязки (т.е. эффективность подавления влияния флуктуаций магнитных полей, в нашем случае) также не является гарантированной и должна быть исследована отдельно вне рамок резонансного приближения.

Полученные результаты, помимо разработки методов тестирования ЛЛИ, могут иметь значение также для теоретического анализа различных разделов квантовой метрологии, использующих вырожденные энергетические уровни атомов (ионов) и поля с радиочастотной модуляцией (например, в атомных часах [19]).

Мы благодарим Т. Мехльштаублер (T. Mehlstäubler), Л. Дрейсен (L. Dreissen), Ч.-Х. Ёе (Ch.-H. Yeh), Х. Фурст (H. Furst) и К. Гренсеман (K. Grensemann) за полезные дискуссии.

**Финансирование работы.** Данная работа была поддержана Российским научным фондом (грант 22-12-00279). В. И. Юдин был также поддержан Министерством Науки и Высшего Образования РФ (грант # FSUS-2020-0036).

**Конфликт интересов.** Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. P. Horava, Phys. Rev. D **79**, 084008 (2009).
2. M. Pospelov and Y. Shang, Phys. Rev. D **85**, 105001 (2012).
3. G. Cognola, R. Myrzakulov, L. Sebastiani, S. Vagnozzi, and S. Zerbini, Class. Quantum Gravity **33**, 225014 (2016).

4. T. Pruttivarasin, M. Ramm, S. G. Porsev, I. I. Tupitsyn, M. S. Safronova, M. A. Hohensee, and H. Häffner, *Nature* **517**, 592 (2015).
5. V. A. Dzuba, V. V. Flambaum, M. S. Safronova, S. G. Porsev, T. Pruttivarasin, M. A. Hohensee, and H. Häffner, *Nature Phys.* **12**, 465 (2016).
6. M. S. Safronova, D. Budker, D. DeMille, Derek F. Jackson Kimball, A. Derevianko, and Ch. W. Clark, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 025008 (2018).
7. E. Megidish, J. Broz, N. Greene, and H. Häffner, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 123605 (2019).
8. C. Sanner, N. Huntemann, R. Lange, C. Tamm, E. Peik, M. S. Safronova, and S. G. Porsev, *Nature* **567**, 204 (2019).
9. R. Shaniv, R. Ozeri, M. S. Safronova, S. G. Porsev, V. A. Dzuba, V. V. Flambaum, and H. Häffner, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 103202 (2018).
10. L. S. Dreissen, Ch.-H. Yeh, H. A. Fürst, K. C. Grensemann, and T. E. Mehlstäubler, *Nat. Commun.* **13**, 7314 (2022).
11. L. Viola, E. Knill, and S. Lloyd, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2417 (1999).
12. K. Khodjasteh and D. A. Lidar, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 180501 (2005).
13. K. Khodjasteh and D. A. Lidar, *Phys. Rev. A* **75**, 062310 (2007).
14. K. Khodjasteh, J. Sastrawan, D. Hayes, T. J. Green, M. J. Biercuk, and L. Viola, *Nat. Commun.* **4**, 2045 (2013).
15. D. A. Lidar and T. A. Brun, *Quantum Error Correction*, Cambridge University Press, Cambridge, England (2013).
16. G. T. Genov, D. Schraft, N. V. Vitanov, and T. Halfmann, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 133202 (2017).
17. C.-H. Yeh, K. C. Grensemann, L. S. Dreissen, H. A. Fürst, and T. E. Mehlstäubler, *New J. Phys.* **25**, 093054 (2023).
18. F. Bloch and A. Siegert, *Phys. Rev.* **57**, 522 (1940).
19. T. Zanon-Willette, E. de Clercq, and E. Arimondo, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 223003 (2012).