Письма в ЖЭТФ, том 120, вып. 1, с. 62 – 66

Модели β-WLZZ напрямую из интегралов β-ансамблей

А. Миронов[∗×∘1)], *А. Орешина*[+×∘1)], *А. Пополитов*[+×∘1)]

[+] *Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия*

[∗] *Физический институт имени П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

[×] *Национальный исследовательский центр "Курчатовский Институт 123182 Москва, Россия*

[∘] *Институт проблем передачи информации, 127994 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 18 мая 2024 г.
После переработки 29 мая 2024 г.
Принята к публикации 30 мая 2024 г.

Недавно мы представили реализацию в виде двух β-ансамблей серии β-деформированных матричных моделей WLZZ, задействуя β-деформированные интегралы Хариш–Чандры–Ициксона-Зюбера. Эта реализация была получена и исследована при помощи тождеств Уорда, которые, однако, не позволяют однозначно фиксировать контуры интегрирования. В качестве контуров были выбраны действительная ось для одного β-ансамбля и мнимая ось для другого, что обосновывалось проведенными частными проверками. В данном письме мы вычисляем интегралы β-ансамблей напрямую, используя гипотезу И. Г. Макдональда, и объясняем, что другой выбор контуров интегрирования также возможен.

DOI: 10.31857/S1234567824130111, EDN: AWPHDJ

1. Матричные модели имеют исключительно много приложений, от квантовой теории столкновений [1] до теории двумерной гравитации с материей [2–5] и вильсоновских средних в теории Черна–Саймонса [6–8]. Одно из основных применений связано с деформированной версией матричных моделей – так называемыми β-ансамблями [9–13]. β-ансамбли ассоциированы с деформацией инвариантного матричного интеграла после интегрирования по угловым переменным. Якобиан преобразования от матриц к их собственным значениям плюс угловые переменные равен квадрату определителя Вандермонда, а переход к β-ансамблю подразумевает замену второй степени этого определителя на произвольную. Этот определитель можно интерпретировать как логарифмический потенциал в двумерной кулоновской системе [14]. В качестве недавнего применения удалось также связать β-ансамбли с гипотезой АГТ [15–19].

В то время как теория β-ансамблей развита относительно далеко, модели нескольких взаимодействующих β-ансамблей до сих пор не привлекали слишком много внимания – они обсуждались только в [20] и недавней работе авторов [21] (некоторое предварительное обсуждение может быть также найдено в [22]). В то же самое время, они отвечают весьма интенсивно изучавшейся β-деформированной версии двухматричных моделей [22–28]. Причина в том, что модели, в которых присутствует несколько β-ансамблей, требует знания β-деформации [29–31] интеграла Хариш–Чандры–Ициксона–Зюбера (Harish–Chandra–Itzykson–Zuber, HCIZ) [32, 33], что является нетривиальной проблемой, которая до сих пор не имеет полного решения: известны только некоторые рекуррентные формулы, применимые при натуральных значениях β [29, 30], определение в терминах формальных рядов [31] и набор тождеств на интегралы [21]. Наконец, имеются тождества, которые известны под именем гипотезы Макдональда [34, 35], и которые мы собираемся обсуждать в настоящем письме.

Центральным элементом является W-представление матричных моделей и β-ансамблей [36–38], которое приводит к статистической сумме вида

$$Z^{(\beta)}(N;p,g)=\sum_R \xi_R^\beta(N)\frac{J_R\{p_k\}J_R\{g_k\}}{||J_R||}, \qquad (1)$$

где J_R – полиномы Джека [39], суммирование идет по разбиениям R и

$$\xi_R^\beta(N):=\prod_{i,j\in R}(N+\beta^{-1}(j-1)-i+1)=$$
$$=\beta^{-|R|}\prod_{j=1}^{N}\frac{\Gamma(\beta(N-j+1)+R_j)}{\Gamma(\beta(N-j+1))}. \qquad (2)$$

1) e-mail: mironov@lpi.ru, mironov@itep.ru; oreshina.aa@phystech.edu; popolit@gmail.com

Такие модели часто называют модели β-WLZZ в соответствии с их недеформированной версией – моделями WLZZ, впервые построенными в [36, 37].

В предыдущей работе [21] мы построили интегральное представление для класса моделей β-WLZZ:

$$Z^{(\beta)}(N;p,g) = \int [dxdy]\Delta^{2\beta}(x)\Delta^{2\beta}(y)I^{\beta}(x,-y)\times$$
$$\times \exp\left[\beta\sum_{k\geq 1}\frac{g_k}{k}\sum_{j=1}^{N}x_j^k + \beta\sum_{k\geq 1}\frac{\bar{p}_k}{k}\sum_{j=1}^{N}y_j^k\right], \quad (3)$$

где интегралы по x_j идут вдоль действительной оси, а интегралы по y_j – по мнимой. Здесь $I^{\beta}(x,y)$ β-деформированный интеграл HCIZ (β-HCIZ) [29, 30], а мера нормирована так, что $Z_{\beta}(N;0,0,0)=1$. Кроме того, здесь $\Delta(x)=\prod_{i<j}|x_i-x_j|$ – определитель Вандермонда, и подынтегральное выражение понимается как формальный ряд по p_k and g_k.

В [21] мы доказали, что статистичcекие суммы (3) и (1) равны друг другу, используя тождества Уорда, которым они удовлетворяют. Однако доказательства такого типа не фиксируют контуры интегрирования, и мы сделали проверки при специальных натуральных значениях β. Целью данного письма является вывод этого равенства статистических сумм напрямую.

2. Определим норму полиномов Джека как

$$||J_R|| := \frac{\overline{G}^{\beta}_{R^{\vee}R}(0)}{G^{\beta}_{RR^{\vee}}(0)}\beta^{|R|} \quad (4)$$
$$G^{\beta}_{R'R''}(x) := \prod_{(i,j)\in R'}\Big(x+R'_i-j+\beta(R''_j-i+1)\Big),$$

где черта над функциями означает замену $\beta\to\beta^{-1}$.

Теперь, используя тождество Коши [39],

$$\exp\left[\beta\sum_{k\geq 1}\frac{g_k}{k}\sum_{j=1}^{N}x_j^k\right] = \sum_R\frac{J_R(x)J_R(g_k)}{||J_R||} \quad (5)$$

можно получить для интеграла (3) (для любого контура интегрирования):

$$Z^{(\beta)}(N;p,g) = \sum_{R,Q}\frac{J_R(p_k)J_Q(g_k)}{||J_R||||J_Q||}\int[dy]\times$$
$$\times\int[dx]\Delta^{2\beta}(x)\Delta^{2\beta}(y)I^{\beta}(x,-y)J_R(Y)J_Q(X) =$$
$$= \sum_{R,Q}\frac{J_R(p_k)J_Q(g_k)}{||J_R||||J_Q||} < J_R(Y)J_Q(X) > . \quad (6)$$

Таким образом, для того, чтобы доказать эквивалентность (3) и (1), достаточно вывести, что

$$< J_R(Y)J_Q(X) >= \delta_{R,Q}\xi_R^{\beta}(N)||J_R||. \quad (7)$$

Ранее [21] для вычисления интеграла (6) при натуральных значениях β мы использовали формулу из теории Фурье

$$\int dxdy f(x)g(y)e^{-xy} = f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)g(x)\bigg|_{x=0}, \quad (8)$$

а также интеграл β-HCIZ при натуральном значении β в виде [30]:

$$I_N^{\beta}(x,y) = \sum_{\sigma}\frac{e^{\sum_{j=1}^{N}x_jy_{\sigma(j)}}}{\Delta(x)^{2\beta}\Delta(y_{\sigma})^{2\beta}}\tilde{I}_N^{\beta}(x,y_{\sigma}), \quad (9)$$

где сумма идет по перестановкам y_i, и $\tilde{I}_N^{\beta}$ – полином от x_i и y_i, определенный рекуррентными соотношениями по N.

Теперь мы рассмотрим скалярные произведения с двумя различными контурами интегрирования,

$$< f(X,Y) >_1 := \int_{-i\infty}^{+i\infty}[dy]\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}[dx]\Delta^{2\beta}(x)\Delta^{2\beta}(y)I^{\beta}(x,-y)f(X,Y) \quad (10)$$

и

$$< f(X,Y) >_2 := \oint_0[dy]\times$$
$$\times\int_0^{+\infty}[dx]\Delta^{2\beta}(x)\Delta^{2\beta}(y)I^{\beta}(x,-y)f(X,Y) \quad (11)$$

выведем (7) для второго случая, а затем продемонстрируем эквивалентность двух скалярных произведений.

3. Определим интеграл β-HCIZ при произвольном β как степенной ряд [31]:

$$I_N^{\beta}(x,y) = \sum_R\frac{1}{\xi_R^{(\beta)}(N)}\frac{J_R(x)J_R(y)}{||J_R||}. \quad (12)$$

Теперь для доказательства (7) со вторым скалярным произведением (10) мы используем следующие факты:

- Гипотезу Макдональда, которая гласит, что [34, 35]
$$\int_0^{\infty}I_N^{\beta}(x,-y)J_R(x)\Delta(x)^{2\beta}\times \quad (13)$$
$$\times\prod_{j=1}^{N}x_j^{\mu-\beta(N-1)-1}dx_j = N_R\cdot J_R(y^{-1})\prod_{j=1}^{N}y_j^{-\mu}$$
$$N_R = \prod_{j=1}^{N}\frac{\Gamma(1+\beta j)}{\Gamma(1+\beta)}\Gamma(R_j+\mu-\beta(j-1)). \quad (14)$$
- Ортогональность полиномов Джека [39, (10.38)] по отношению к скалярному произведению
$$\Big\langle f,g\Big\rangle := \oint_0\prod_{j=1}^{N}\frac{dy_j}{y_j}f(y^{-1})g(y)\prod_{j\neq k}\left(1-\frac{y_j}{y_k}\right)^{\beta} \quad (15)$$
так что
$$\Big\langle J_R,J_Q\Big\rangle = \mathbf{N}_R\cdot\delta_{RQ} \quad (16)$$

$$\mathbf{N}_R = N! \prod_{1\le i<j\le N} \frac{\Gamma(R_i - R_j + \beta(j-i+1))\Gamma(R_i - R_j + \beta(j-i-1)+1)}{\Gamma(R_i - R_j + \beta(j-i))\Gamma(R_i - R_j + \beta(j-i)+1)}. \tag{17}$$

Интегрируя теперь обе стороны уравнения (13) с мерой $\Delta(y)^{2\beta}$ и выбирая $\mu = \beta(N-1)+1$, получаем из второго скалярного произведения

$$< J_R(Y)J_Q(X) >_2 = \delta_{R,Q}\frac{\mathbf{N}_R N_R}{\mathbf{N}_\varnothing N_\varnothing} = \delta_{R,Q}\xi_R^\beta(N)||J_R||, \tag{18}$$

где мы использовали (4) и (2).

4. Остается теперь доказать, что два скалярных произведения совпадают. Рассмотрим простейший пример $\beta = 1$, $N = 1$. Тогда два интеграла (10) и (11) по двум разным контурам приводят к однму и тому же результату:

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-xy} x^a y^b = a!\delta_{a,b}, \tag{19}$$

$$\oint_0 dy \int_0^{+\infty} dx e^{-xy} x^a y^b = \oint_0 dy\ y^b \frac{a!}{y^{1+a}} = a!\delta_{a,b}. \tag{20}$$

Однако доказательство, которое обобщается на случай произвольного $\beta \neq 1$, не должно использовать явное интегрирование, поэтому мы обоснуем эквивалентность (19) и (20) без прямых вычислений. Действительно, заметим, что

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-xy} x^a y^b = \tag{21}$$
$$= \begin{cases} 2\int_{-i\infty}^{+i\infty} dy \int_0^{+\infty} dx e^{-xy} x^a y^b & \text{для четных } a+b \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь, согласно теореме Сохоцкого,

$$\oint_0 dy \int_0^{+\infty} dx e^{-xy} x^a y^b = \int_{-i\infty}^{+i\infty} dy \int_0^{+\infty} dx e^{-xy} x^a y^b. \tag{22}$$

Это позволяет деформировать контур для доказательства эквивалентности двух скалярных произведений, что просто проделать в общем случае произвольных β и N.

Действительно, заметим, что полином

$$\mu(x,y) = \Delta^{2\beta}(x)\Delta^{2\beta}(y)I^\beta(x,-y) \tag{23}$$

инвариантен относительно одновременного изменения знака всех переменных: $x_i \to -x_i$, $y_i \to -y_i$. Таким образом,

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} [dy] \int_{-\infty}^{+\infty} [dx]\mu(x,y)\bar{x}^{\bar{a}}\bar{y}^{\bar{b}} = \tag{24}$$
$$= \begin{cases} 2\int_{-i\infty}^{+i\infty} [dy] \int_0^{+\infty} [dx]\mu(x,y)\bar{x}^{\bar{a}}\bar{y}^{\bar{b}} & \text{для четных } a+b \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

где $\bar{x}^{\bar{a}} = \prod_{i=1}^N x_i^{a_i}$. Наконец, используя теорему Сохоцкого, мы получаем

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} [dy] \int_{-\infty}^{+\infty} [dx]\mu(x,y)\bar{x}^{\bar{a}}\bar{y}^{\bar{b}} =$$
$$= \oint_0 [dy] \int_0^{+\infty} [dx]\mu(x,y)\bar{x}^{\bar{a}}\bar{y}^{\bar{b}} \tag{25}$$

что доказывает эквивалентность двух скалярных произведений и приводит непосредственно к

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} [dy] \int_{-\infty}^{+\infty} [dx]\Delta^{2\beta}(x)\Delta^{2\beta}(y)I^\beta(x,-y) \times$$
$$\times \exp\left[\beta\sum_{k\ge1}\frac{g_k}{k}\sum_{j=1}^N x_j^k + \beta\sum_{k\ge1}\frac{p_k}{k}\sum_{j=1}^N y_j^m\right] =$$
$$= \oint_0 [dy] \int_0^{+\infty} [dx]\Delta^{2\beta}(x)\Delta^{2\beta}(y)I^\beta(x,-y) \times$$
$$\times \exp\left[\beta\sum_{k\ge1}\frac{g_k}{k}\sum_{j=1}^N x_j^k + \beta\sum_{k\ge1}\frac{p_k}{k}\sum_{j=1}^N y_j^k\right] \tag{26}$$

доказывая, таким образом, эквивалентность (1) и (3).

Финансирование работы. Наша работа частично поддержана грантом Фонда Развития Теоретической Физики "БАЗИС" (А. Миронов и А. Орешина) и совместным грантом 21-51-46010-СТ-а.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. E. P. Wigner, Ann. Math. **53**, 36 (1951).
2. E. Brezin and V. Kazakov, Phys. Lett. B **236**, 144 (1990).
3. D. J. Gross and A. A. Migdal, Phys. Rev. Lett. **64**, 127 (1990).

4. D. J. Gross and A. A. Migdal, Nucl. Phys. B **340**, 333 (1990).
5. M. R. Douglas and S. H. Shenker, Nucl. Phys. B **335**, 635 (1990).
6. M. Tierz, Mod. Phys. Lett. A **19**, 1365 (2004); hep-th/0212128.
7. A. Brini, B. Eynard, and M. Mariño, Ann. Henri Poincaré **13**(8), 1873 (2012); arXiv:1105.2012.
8. A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, Pis'ma v ZhETF **100**, 297 (2014) [JETP Lett. **100**, 271 (2014)]; arXiv:1407.3754.
9. M. L. Mehta, *Random matrices*, 2nd ed., Academic Press, N.Y. (1991).
10. T. Guhr and H. Kohler, J. Math. Phys. **43**, 2707 (2002).
11. P. J. Forrester, Nucl. Phys. B **388**, 671 (1992).
12. G. Mahoux, M. L. Mehta, and J.-M. Normand, MSRI Publications **40**, 301 (2001).
13. P. Desrosiers, Nucl. Phys. B **817**, 224 (2009); arXiv:0801.3438.
14. F. J. Dyson, J. Math. Phys. **3**, 140 (1962).
15. H. Itoyama, K. Maruyoshi, and T. Oota, Prog. Theor. Phys. **123**, 957 (2010); arXiv:0911.4244.
16. T. Eguchi and K. Maruyoshi, arXiv:0911.4797.
17. T. Eguchi and K. Maruyoshi, arXiv:1006.0828.
18. A. Mironov, A. Morozov, and Sh. Shakirov, JHEP **02**, 030 (2010); arXiv:0911.5721.
19. A. Mironov, A. Morozov, and Sh. Shakirov, Int. J. Mod. Phys. A **25**, 3173 (2010); arXiv:1001.0563.
20. M. Bergere, B. Eynard, O. Marchal, and A. Prats-Ferrer, JHEP **03**, 098 (2012); arXiv:1106.0332.
21. A. Mironov, A. Oreshina, and A. Popolitov, arXiv:2403.05965.
22. A. Mironov, V. Mishnyakov, A. Morozov, A. Popolitov, and W. Z. Zhao, Phys. Lett. B **839**, 137805 (2023); arXiv:2301.11877.
23. E. Gava and K. Narain, Phys. Lett. B **293**, 213 (1991).
24. A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov, JETP Lett. **54**, 536 (1991).
25. A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov, Mod. Phys. Lett. A **7**, 1345 (1992); hep-th/9201010.
26. A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, and S. Natanzon, JHEP **11**, 080 (2014); arXiv:1405.1395.
27. A. Alexandrov, Eur. Phys. J. C **83**, 147 (2023); arXiv:2212.10952.
28. A. Mironov, V. Mishnyakov, A. Morozov, A. Popolitov, R. Wang, and W. Z. Zhao, Eur. Phys. J. C **83**, 377 (2023); arXiv:2301.04107.
29. E. Brezin and S. Hikami, Commun. Math. Phys. **235**, 125 (2003); math-ph/0208002.
30. M. Bergère and B. Eynard, J. Phys. A **42**, 265201 (2009); arXiv:0805.4482.
31. A. Mironov, A. Morozov, and Sh. Shakirov, JHEP **03**, 102 (2011); arXiv:1011.3481.
32. Harish-Chandra, Am. J. Math. **241**, 80 (1958).
33. C. Itzykson and J.-B. Zuber, J. Math. Phys. **21**, 411 (1980).
34. I. G. Macdonald, arXiv:1309.4568.
35. D. Brennecken and M. Rösler, arXiv:2202.12164.
36. R. Wang, C. H. Zhang, F. H. Zhang, and W. Z. Zhao, Nucl. Phys. B **985**, 115989 (2022); arXiv:2203.14578.
37. R. Wang, F. Liu, C. H. Zhang, and W. Z. Zhao, Eur. Phys. J. C **82**, 902 (2022); arXiv:2206.13038.
38. V. Mishnyakov and N. Oreshina, Eur. Phys. J. C **82**, 548 (2022); arXiv:2203.15675.
39. I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford University Press, Oxford (1995).