

# Стабилизация оптических пузырей вблизи оси винтового световода

В. П. Рубан<sup>1)</sup>

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 24 июня 2024 г.

После переработки 30 июня 2024 г.

Принята к публикации 30 июня 2024 г.

Численно показано, что в световоде с винтовой симметрией связанные нелинейные уравнения Шредингера, описывающие взаимодействие левой и правой круговых поляризаций параксиальной оптической волны в дефокусирующей керровской среде с аномальной дисперсией, имеют устойчивые решения в виде стационарно вращающихся продолговатых пузырей с присоединенными на концах несколькими оптическими вихрями. Пузырь представляет собой произвольно длинную квазицилиндрическую трехмерную полость в одной из компонент, заполненную противоположной компонентой. Поперечный профиль пузыря определяется формой сечения световода, шагом винта, количеством вихрей и фоновой интенсивностью окружающей компоненты, но не полным количеством заполняющей компоненты.

DOI: 10.31857/S1234567824140040, EDN: KSDVPG

**Введение.** При изучении нелинейных волн большой интерес представляют долгоживущие когерентные структуры, в частности – солитоны и вихри (см., например, [1–16], и ссылки там). Время от времени исследователи получают в лабораторных и численных экспериментах все новые типы подобных объектов. Особенно богаты в этом отношении многокомпонентные волновые системы, и оптика – самый очевидный тому пример, так как свет может иметь две независимые поляризации. Поэтому есть смысл рассматривать оптическую волну в “нестандартных” условиях в надежде обнаружить новые эффекты. Подтверждением успешности такого подхода является данная работа – далее будет показано, что под влиянием пространственной неоднородности специального вида нелинейное взаимодействие между поляризациями может сформировать ранее неизвестные волновые структуры.

Предметом нашего внимания будет квазимонохроматическая слабонелинейная волна, распространяющаяся параксиально в широком световоде некруглого сечения с винтовой симметрией. Такой выбор мотивирован формальной аналогией между нелинейной оптикой и разреженными бозеконденсатами. Как известно, параксиальная оптика в локально изотропной керровской среде с учетом двух круговых поляризаций света описывается парой связанных нелинейных уравнений Шредингера (НУШ) [17]. В случае дефокусирующей нелинейности и аномальной дисперсии уравнения по форме совпадают с уравнениями Гросса–Питаевского

для бинарного бозе-конденсата холодных атомов в режиме разделения фаз [18–24]. В двухкомпонентной системе возможны доменные стенки, разделяющие области с правой и левой круговыми поляризациями [25–31]. Интересные трехмерные структуры получаются при сочетании доменных стенок и квантованных вихрей (см. [32–36] и ссылки там). В бозе-конденсатах стабильные вихревые структуры поддерживаются вращением потенциала ловушки. В оптике роль эволюционной переменной вместо времени  $t$  играет (перемасштабированная) координата  $\zeta$  вдоль направления распространения света, а аналогом вращения выступает винтовая симметрия световода [37], когда профиль диэлектрической проницаемости зависит от двух комбинаций переменных:

$$\tilde{x} = x \cos \Omega \zeta + y \sin \Omega \zeta,$$

$$\tilde{y} = y \cos \Omega \zeta - x \sin \Omega \zeta.$$

В этом случае аналогом временного периода вращения ловушки оказывается шаг винта  $S = 2\pi/\Omega$ . Роль третьей “пространственной” координаты в оптике играет “запаздывающее” время  $\tau = t - \zeta/v_{gr}$ . Существенным практическим отличием между бозеконденсатами и световыми пучками является трансляционная симметрия вдоль этой третьей координаты в оптическом случае. Поэтому продольно локализованные решения уравнений не актуальны для физики холодных газов, но прямо применимы к оптике.

В недавней публикации [37] были численно получены некоторые квазистационарные конфигурации

<sup>1)</sup>e-mail: ruban@itp.ac.ru

бинарных оптических пучков, в которых обе компоненты световой волны выступают как бы “на равных правах”. В данной работе найдены устойчивые стационарные решения нового типа – произвольно длинные световые “пузыри” (сгустки условно второй компоненты внутри условно первой компоненты), удерживаемые вблизи оси винтового волновода с помощью нескольких квантованных вихрей. Подчеркнем, что необходимо наличие двух или более вихрей в первой компоненте. Один вихрь при увеличении размеров пузыря не способен удержать его вблизи оси, как было отмечено в работе [35]. Теоретическая интерпретация основных свойств новых трехмерных структур дана на основе анализа энергетических зависимостей для строго двумерных решений с содержанием  $n$  второй “световой жидкости” в присутствии  $Q$  штук вихрей. Можно сразу сказать, что явление формирования квазиодномерных пузырей подобно образованию конденсированной фазы, граничащей с вакуумом, для воображаемого вещества с плотностью энергии  $\varepsilon(n)$ , если при некоторой конечной плотности  $n_0$  давление  $p = n^2 d(\varepsilon(n)/n)/dn$  обращается в ноль. Другими словами, функция  $\varepsilon(n)/n$  имеет нетривиальный минимум (это происходит в точке, где график  $\varepsilon(n)$  касается прямой, проведенной из начала координат). Само значение  $n_0$  сильно зависит от “скорости вращения”  $\Omega$ , количества вихрей  $Q$ , и от соответствующей “полной плотности”  $n_1 + n$  (см. примеры графиков на рис. 1). Длина же отрезка конденсированной фазы может быть произвольно большой.

**Уравнения и численный метод.** Как и в предыдущих работах [35, 37], мы рассматриваем прозрачную оптическую среду с дефокусирующей керровской нелинейностью и с законом дисперсии линейных волн  $k(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}\omega/c$ , предполагая наличие диапазона частот с аномальной дисперсией  $k''(\omega) < 0$ . Речь идет о низкочастотном крае окна прозрачности (в реальных веществах это часто инфракрасная область спектра; см., например, [38, 39]). В такой ситуации применимо известное уравнение для векторной огибающей слабонелинейной квазимонохроматической световой волны (с несущей частотой  $\omega_0$ ; подразумевается выбор комплексной экспоненты в виде  $\exp[ik_0\zeta - i\omega_0 t]$ ) в параксиальном приближении:

$$2k_0[-i\partial_\zeta - ik'_0\partial_t + k''_0\partial_t^2/2]\mathbf{E} - \Delta_\perp \mathbf{E} \approx \frac{k_0^2}{\varepsilon(\omega_0)} \left[ \tilde{\varepsilon}(x, y, \zeta)\mathbf{E} + \alpha|\mathbf{E}|^2\mathbf{E} + \beta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E}^* \right]. \quad (1)$$

Здесь  $k'_0 = 1/v_{gr}$  – обратная групповая скорость света в среде,  $k''_0$  – отрицательный коэффициент хроматической дисперсии,  $\tilde{\varepsilon}(x, y, \zeta)$  – малая неоднородность

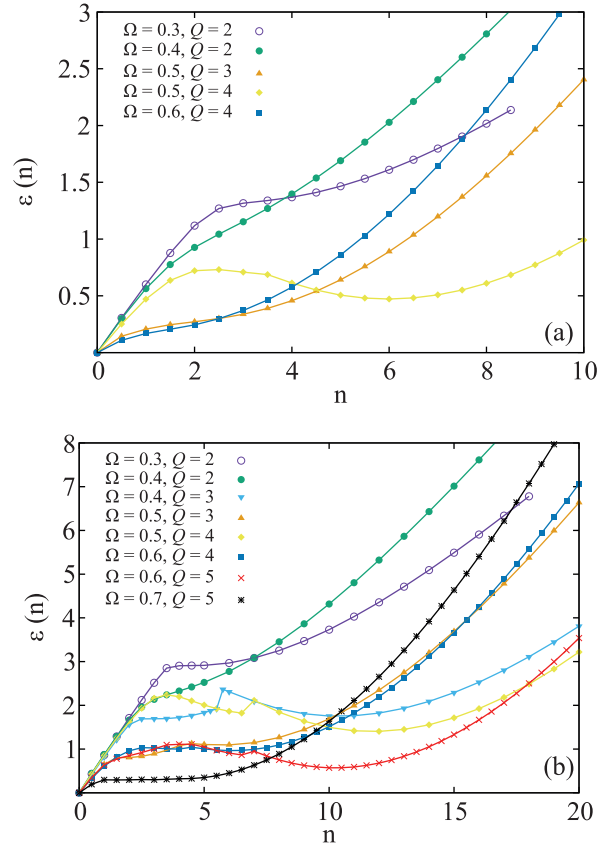


Рис. 1. (Цветной онлайн) Энергетические зависимости для различных скоростей вращения и числа вихрей при значениях суммарной общей плотности  $n_+ = (n_1 + n)$  на единицу длины: (a) –  $n_+ = 60.0$ ; (b) –  $n_+ = 100.0$

диэлектрической проницаемости на несущей частоте,  $\alpha(\omega_0)$  и  $\beta(\omega_0)$  – отрицательные нелинейные коэффициенты. Вводится новая переменная  $\tau = t - \zeta/v_{gr}$  – “запаздывающее” время. Амплитуда электрического поля выражается в терминах медленных амплитуд  $A_{1,2}(x, y, \tau, \zeta)$  левой и правой круговых поляризаций,

$$\mathbf{E} \approx [(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)A_1 + (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)A_2]/\sqrt{2}, \quad (2)$$

и тогда световая волна описывается парой связанных НУШ [17], аналогично бинарному бозе-конденсату холодных атомов (при замене переменных  $\zeta \rightarrow t, \tau \rightarrow z$ ). После перемасштабирования получается безразмерная система

$$i\frac{\partial A_{1,2}}{\partial \zeta} = \left[ -\frac{1}{2}\Delta + U(x, y, \zeta) + |A_{1,2}|^2 + g|A_{2,1}|^2 \right] A_{1,2}, \quad (3)$$

где  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_\tau^2$  – трехмерный оператор Лапласа в “координатном” пространстве  $\mathbf{r} = (x, y, \tau)$ , а внешний потенциал  $U \propto -\tilde{\varepsilon}(x, y, \zeta)$ . Параметр перекрестной фазовой модуляции  $g = 1 + 2\beta/\alpha$ . В предположении быстрого нелинейного отклика он равен 2. Суще-

ственно, что нелинейное взаимодействие между двумя компонентами сводится к простой некогерентной связи посредством коэффициента  $g$  и сохраняет количество каждой компоненты  $N_{1,2} = \int |A_{1,2}|^2 dx dy d\tau$ . Таким образом, модель описывает две квантовые сжимаемые жидкости с плотностями  $I_{1,2} = |A_{1,2}|^2$  и скоростями  $\mathbf{v}_{1,2} = \nabla \text{Arg}(A_{1,2})$ .

Как и в недавней работе [37], здесь мы сосредоточимся на винтовых волноводах с плоским дном и резкими стенками. Такие волноводы должно быть легче реализовать экспериментально, особенно если Керровская среда – жидкая. Но для удобства численного моделирования мы будем аппроксимировать соответствующую яму с вертикальными стенками выражением

$$U = C[1 - \exp(-[(\tilde{x}^2 + \kappa^2 \tilde{y}^2)/36]^5)], \quad (4)$$

с большим параметром  $C = 42$  и поперечной анизотропией  $\kappa^2 = (1 + 0.3)/(1 - 0.3) = 13/7$ . Анизотропия необходима для воздействия вращения.

Принципиально важно, что уравнения (3) представляют собой гамильтонову систему

$$i\partial A_{1,2}/\partial \zeta = \delta \mathcal{H}/\delta A_{1,2}^*.$$

Соответствующий неавтономный гамильтониан есть

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} \int (|\nabla A_1|^2 + |\nabla A_2|^2) dx dy d\tau \\ & + \int U(x, y, \zeta) (|A_1|^2 + |A_2|^2) dx dy d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int (|A_1|^4 + |A_2|^4 + 2g|A_1|^2|A_2|^2) dx dy d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

Этот функционал не сохраняется в процессе эволюции. Однако, поскольку во вращающейся системе координат мы имеем автономную систему, интегралом движения является функционал

$$\mathcal{H}_\Omega = \mathcal{H} - \Omega \int [A^\dagger (iy\partial_x - ix\partial_y)A] dx dy d\tau, \quad (6)$$

где  $A = (A_1, A_2)^T$  – двухкомпонентный столбец.

В основе данной работы лежит тот факт, что стационарно вращающиеся устойчивые решения системы (3) являются “точками локального минимума” для функционала  $\mathcal{H}_\Omega$  (записанного в переменных  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ ) при фиксированных  $N_1$  и  $N_2$ .

Для численного моделирования уравнений (3) использовался стандартный метод (Split-Step Fourier Method) второго порядка точности по эволюционной переменной  $\zeta$  в исходной (невращающейся) системе координат. Вычислительная область по переменным  $x, y, \tau$  имела форму прямоугольного параллелепипеда с размерами  $6\pi \times 6\pi \times 12\pi$ , с периодическими граничными условиями. Но, поскольку потенциальная яма

достаточно глубока, функции  $A_{1,2}$  быстро спадают практически до нуля в поперечных направлениях, так что влияние поперечных границ пренебрежимо мало.

Точность вычислений контролировалась сохранением интегралов движения до 4–6 десятичных знаков на интервале  $0 < \zeta < 600$  (что практически составляет длину распространения в несколько десятков метров при выборе поперечного масштаба порядка нескольких десятков длин волн).

Для численного приготовления близкого к стационару начального состояния применялась диссипативная процедура, состоящая на каждом цикле из двух шагов. Первый шаг соответствовал чисто градиентной диссипативной динамике

$$-\partial A_{1,2}/\partial \eta = \delta \mathcal{H}_\Omega / \delta A_{1,2}^*$$

на малом интервале вспомогательной переменной  $\eta$ , а на втором шаге каждая функция  $A_{1,2}(x, y, \tau)$  домножалась на соответствующий множитель  $f_{1,2}$  с целью удержания заданных значений  $N_{1,2}$ . Суммарный интервал переменной  $\eta$  составлял несколько десятков, так что в результате все жесткие степени свободы были эффективно погашены и система оказывалась недалеко от минимума  $\mathcal{H}_\Omega$ .

**Результаты.** Сначала в режиме свободного поиска была проведена серия предварительных численных экспериментов с начальными условиями в виде слегка возмущенного заполненного кратного вихря. В зависимости от параметров, последующая динамика оказалась существенно разной. В некоторых случаях наблюдались лишь малые колебания около устойчивого продольно однородного состояния. Но при небольших заполнениях в системе развивалась неустойчивость, в результате которой происходило перераспределение второй компоненты вдоль оси пучка и образовывались характерные структуры в виде пузырей с несколькими присоединенными “опустевшими” однократными продольными вихрями (очень похоже на те, что показаны далее на рис. 2 и 3, но не настолько же ровные и стационарные).

Для интерпретации результатов этой предварительной серии понадобилось более детальное изучение чисто двумерных стационарных состояний. Чтобы найти такие состояния с хорошей точностью, интервал переменной  $\eta$  в диссипативной процедуре составлял типично несколько сотен, а иногда доходил до тысяч. Длительная релаксация имела место в промежуточном по переменной  $n = \int I_2 dx dy$  режиме: между конфигурациями со всеми отдельно расположенными почти пустыми вихрями – с одной сторо-

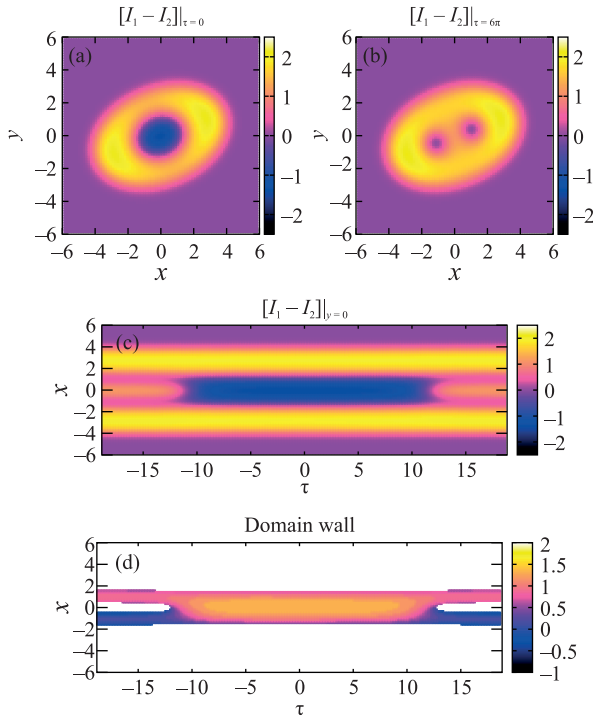


Рис. 2. (Цветной онлайн) Численный пример пузыря с двумя вихрями при “частоте вращения”  $\Omega = 0.4$  и среднем по переменной  $\tau$  заполнении  $\langle n_+ \rangle = 60$ , на дистанции  $\zeta = 590$ . На панелях показаны: (a) – поперечное сечение светового пучка через пузырь; (b) – поперечное сечение через пустые вихри; (c) – продольное сечение плоскостью  $y = 0$ ; (d) – общий вид сбоку на условную поверхность пузыря и присоединенные к нему вихревые нити (здесь для эффекта трехмерности цвет отмеченных точек числовой решетки, находящихса вблизи середины доменной стенки либо в сердцевине вихря, соответствует координате  $y$ , которая перпендикулярна плоскости рисунка)

ны, и одним заполненным кратным вихрем при достаточно больших  $n$  – с другой стороны. В этом промежуточном режиме только часть вихрей объединялась в заполненный вихрь с меньшей кратностью, а остальные вихри “предпочитали” располагаться каждый отдельно (и иногда – несимметрично). Наличие нескольких локальных минимумов функционала энергии со своими областями притяжения могло приводить к изломам или даже скачкам на соответствующих графиках энергии как функции  $n$ . По счастью, для наших целей нет нужды вникать во все эти сложности, поскольку промежуточная область заведомо неустойчива по отношению к трехмерным возмущениям. Практически важно наличие устойчивых решений в области малых  $n$  и в области достаточно больших  $n$ .

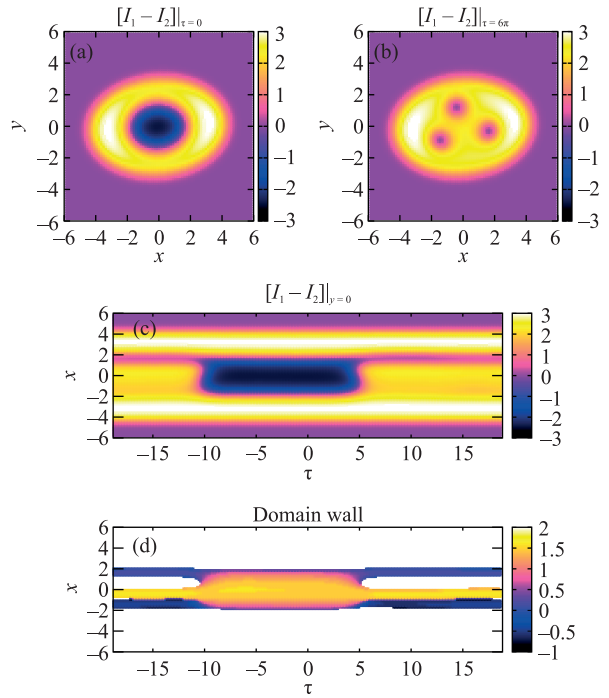


Рис. 3. (Цветной онлайн) Пример пузыря с тремя вихрями при  $\Omega = 0.4$ ,  $\langle n_+ \rangle = 100$ ,  $\zeta = 550$

На рисунке 1 представлены примеры зависимостей энергии двумерных решений от  $n$  для разных наборов остальных параметров, включая сумму  $n_+ = (n_1 + n)$ . В каждом случае из полной энергии вычтено ее значение при  $n = 0$ , т.е. в отсутствие второй компоненты. Строго говоря, интерес представляют последовательности состояний с фиксированным значением химического потенциала создающей фон первой компоненты. Но практически это условие близко соответствует равенству  $(n_1 + n) = \text{const}$  (с точностью около нескольких процентов). Для качественного анализа лучшей точности и не требуется.

На большинстве из представленных на рис. 1 графиков обращает на себя внимание наличие нетривиального минимума у отношения  $\varepsilon(n)/n$ . Если рассматривать  $\varepsilon(n)$  как уравнения состояния некоторой фиктивной среды, связывающее плотность числа ее частиц и плотность внутренней энергии, то указанный минимум отвечает нулевому давлению. При слегка больших плотностях имеем положительное давление, а при меньших – отрицательное (т.е. натяжение). Поэтому однородные по переменной  $\tau$  состояния в некоторой прилегающей области значений  $n$  устойчивы. Но если в среде с натяжением сделать “разрывы”, то она соберется в одномерные капли, соседствующие с “вакуумом”. С точки зрения нашей трехмерной системы каждая такая капля пред-

ставляет собой продолговатый пузырь внутри первой компоненты, заполненный второй компонентой. На каждом из двух концов пузыря состыкованы две стационарные двумерные конфигурации, причем в одной из них присутствует только первая компонента с разделенными вихрями – “вакуум”, а в другой конфигурации имеется один кратный вихрь с заполненной сердцевинкой – “среда”.

Прямое численное моделирование с подходящими начальными состояниями подтвердило существование и устойчивость подобных структур. Два первых примера (для пузырей с двумя и с тремя вихрями) приведены на рис. 2 и 3. Там на панелях (a), (b) и (c) цветом показана разность интенсивностей первой и второй компонент волны в трех различных сечениях светового пучка. Поскольку имеет место режим разделения фаз (т.е. произведение  $I_1 I_2$  пренебрежимо мало почти везде, за исключением относительно узкой переходной области – доменной стенки), то получается, что области с положительным значением разности (светлые тона) заполнены почти исключительно первой компонентой, а области с отрицательным значением заполнены в основном второй компонентой (темные тона). Поэтому нет необходимости представлять на рисунках каждое поле интенсивности по отдельности. Только на ширине доменной стенки разность  $[I_1 - I_2]$  не дает полной информации, но для общего понимания картины это не столь важно. На панелях (d) показан вид со стороны на доменную стенку, являющуюся границей пузыря, и на присоединенные к нему вихревые нити. Еще два примера представлены на рис. 4 и 5 – для пузырей с четырьмя и с пятью вихрями. Поскольку в качественном отношении все пузыри устроены одинаково, то на этих рисунках показаны только поперечные сечения. Стоит обратить внимание, что при большом числе вихрей сечение пузырей “приплюснутое”, а пустые вихри расположены скорее вдоль эллипса, а не окружности.

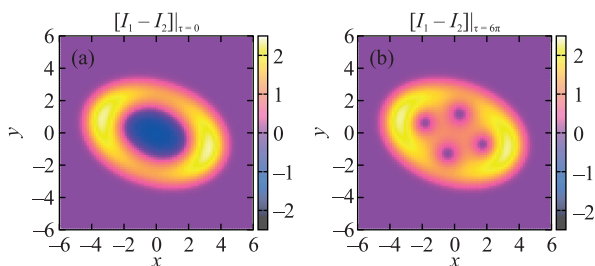


Рис. 4. (Цветной онлайн) Поперечные сечения светового пучка для пузыря с четырьмя вихрями при  $\Omega = 0.5$ ,  $\langle n_+ \rangle = 60$ ,  $\zeta = 590$

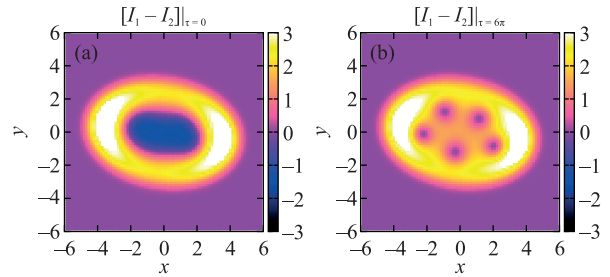


Рис. 5. (Цветной онлайн) Поперечные сечения светового пучка для пузыря с пятью вихрями при  $\Omega = 0.6$ ,  $\langle n_+ \rangle = 100$ ,  $\zeta = 560$

Во всех приведенных выше примерах состояния не были строго стационарными, поскольку после подготовительной диссипативной процедуры все еще оставались небольшие возмущения, которые, впрочем, не усиливались на больших дистанциях распространения и тем самым только подтвердили устойчивый характер найденных структур.

Надо сказать, что при некоторых значениях параметров двумерная система пустых вихрей оказывается неустойчивой – вихрям не хватает ширины волновода, чтобы разместиться, тогда как заполненный вихрь соответствующей кратности устроен более компактно и существует в широком диапазоне переменной  $n$  (например, при  $\Omega = 0.4$ ,  $Q = 3$ ,  $n_+ = 60$ ; поэтому соответствующего графика нет на рис. 1a). В таких случаях “недозаполненный” трехмерный вихрь сначала эволюционирует к образованию пузыря, а затем, если опустевшие участки вихревых нитей оказываются достаточно длинными, они постепенно приближаются к стенке волновода и перемыкаются с ней. Через образовавшиеся каналы вторая компонента уходит на поверхность пучка. В конце концов вся конструкция разрушается. Соответствующий пример приведен на рис. 6. Другой возможный сценарий развития событий – когда сам пузырь становится локально неустойчивым по отношению к поперечным смещениям и прорывается к стенке волновода (не показано).

**Закключение.** Таким образом, численное моделирование показало, что вращение, создаваемое винтовым волноводом, приводит к глубоким изменениям в динамике оптической волны. В частности, оно делает теоретически возможным существование структур нового типа. Такие структуры существенно пополняют “коллекцию” известных трехмерных солитонов [2]. На данном этапе эти результаты пока что – чисто умозрительные, хотя они и получены в рамках фундаментальной модели (1). Необходима дальнейшая работа как со стороны теории – в направле-

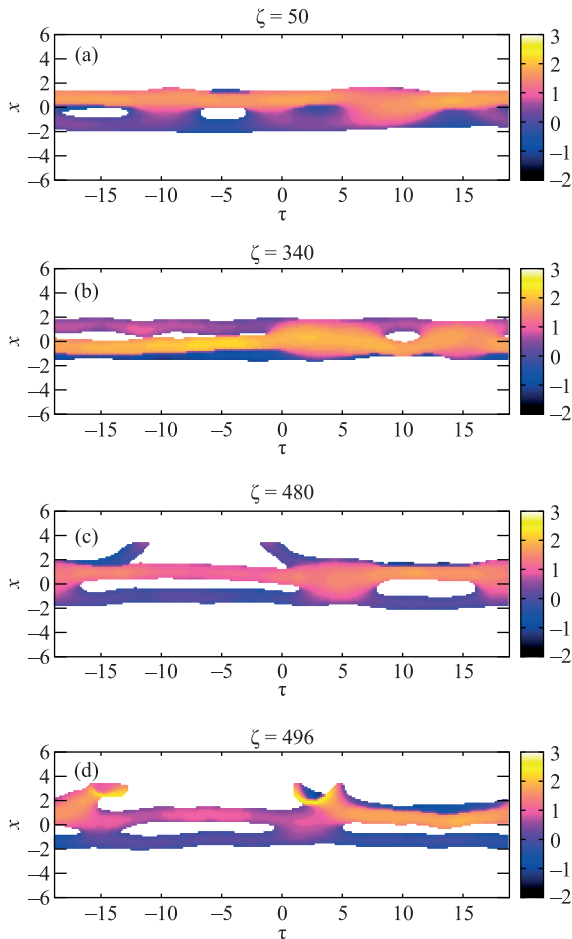


Рис. 6. (Цветной онлайн) Пример эволюции мало заполненного тройного вихря при таких значениях параметров ( $\Omega = 0.4$ ,  $\langle n_+ \rangle = 60$ ), когда соответствующая двумерная система не имеет стационарного решения с  $n = 0$ . Основные этапы: (a) – начало формирования пузырей; (b) – появление достаточно длинного участка с незаполненными вихревыми нитями; (c) – пересоединение одной из нитей со стенкой волновода (сама стенка не показана, поэтому нить выглядит разорванной); (d) – выход второй компоненты из пузыря на поверхность светового пучка.

нии получения аналитических оценок для  $\varepsilon(n)$  и т.п., так и со стороны возможного будущего эксперимента – в направлении подбора обладающих нужными свойствами материалов. Сейчас трудно предвидеть, насколько серьезные технические трудности могут встретиться на пути реализации подобного эксперимента.

**Финансирование работы.** Работа выполнена в рамках госзадания по теме FFWR-2024-0013.

**Конфликт интересов.** Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. Y. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, 1st ed., Academic Press, California, USA (2003).
2. B. A. Malomed, *Multidimensional Solitons*, AIP Publishing (online), Melville, N. Y. (2022); <https://doi.org/10.1063/9780735425118>
3. F. Baronio, S. Wabnitz, and Yu. Kodama, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 173901 (2016).
4. P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and R. Carretero-González, *The Defocusing Nonlinear Schrödinger Equation: From Dark Solitons to Vortices and Vortex Rings*, SIAM, Philadelphia (2015).
5. V. N. Serkin and A. Hasegawa, *JETP Lett.* **72**, 89 (2000).
6. С. К. Турицын, Н. Н. Розанов, И. А. Яруткина, А. Е. Беднякова, С. В. Федоров, О. В. Штырина, М. П. Федорук, *УФН* **186**, 713 (2016).
7. Н. А. Веретенков, Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, *УФН* **192**, 143 (2022).
8. S. Raghavan and G. P. Agrawal, *Opt. Commun.* **180**, 377 (2000).
9. B. A. Malomed, D. Mihalache, F. Wise, and L. Torner, *J. Opt. B* **7**, R53 (2005).
10. W. H. Renninger and F. W. Wise, *Nat. Commun.* **4**, 1719 (2013).
11. F. Eilenberger, K. Prater, S. Minardi, R. Geiss, U. Röpke, J. Kobelke, K. Schuster, H. Bartelt, S. Nolte, A. Tünnermann, and T. Pertsch, *Phys. Rev. X* **3**, 041031 (2013).
12. O. V. Shtyrina, M. P. Fedoruk, Y. S. Kivshar, and S. K. Turitsyn, *Phys. Rev. A* **97**, 013841 (2018).
13. S. V. Sazonov, A. A. Kalinovich, M. V. Komissarova, and I. G. Zakharova, *Phys. Rev. A* **100**, 033835 (2019).
14. Е. Д. Залозная, А. Е. Дормидонов, В. О. Компанец, С. В. Чекалин, В. П. Кандидов, *Письма в ЖЭТФ* **113**, 817 (2021).
15. P. Parra-Rivas, Y. Sun, and S. Wabnitz, *Opt. Commun.* **546**, 129749 (2023).
16. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **119**, 579 (2024).
17. А. Л. Берхоер, В. Е. Захаров, *ЖЭТФ* **58**, 903 (1970).
18. Tin-Lun Ho and V. B. Shenoy, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3276 (1996).
19. H. Pu and N. P. Bigelow, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1130 (1998).
20. B. P. Anderson, P. C. Haljan, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2857 (2000).
21. S. Coen and M. Haelterman, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 140401 (2001).
22. G. Modugno, M. Modugno, F. Riboli, G. Roati, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 190404 (2002).
23. E. Timmermans, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5718 (1998).
24. P. Ao and S. T. Chui, *Phys. Rev. A* **58**, 4836 (1998).
25. M. Haelterman and A. P. Sheppard, *Phys. Rev. E* **49**, 3389 (1994).

26. M. Haelterman and A. P. Sheppard, *Phys. Rev. E* **49**, 4512 (1994).
27. A. P. Sheppard and M. Haelterman, *Opt. Lett.* **19**, 859 (1994).
28. Yu. S. Kivhsar and B. Luther-Davies, *Phys. Rep.* **298**, 81 (1998).
29. N. Dror, B. A. Malomed, and J. Zeng, *Phys. Rev. E* **84**, 046602 (2011).
30. A. H. Carlsson, J. N. Malmberg, D. Anderson, M. Lisak, E. A. Ostrovskaya, T. J. Alexander, and Yu. S. Kivshar, *Opt. Lett.* **25**, 660 (2000).
31. A. S. Desyatnikov, L. Torner, and Yu. S. Kivshar, *Progress in Optics* **47**, 291 (2005).
32. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **113**, 539 (2021).
33. В. П. Рубан, *ЖЭТФ* **160**, 912 (2021).
34. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **116**, 324 (2022).
35. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **117**, 292 (2023).
36. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **117**, 590 (2023).
37. В. П. Рубан, *ЖЭТФ* **164**, 863 (2023).
38. X. Liu, B. Zhou, H. Guo, and M. Bache, *Opt. Lett.* **40**, 3798 (2015).
39. X. Liu and M. Bache, *Opt. Lett.* **40**, 4257 (2015).