

Корреляционные функции пассивного скаляра как мера статистики градиента скорости¹⁾

С. С. Вергелес²⁾

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, 101000 Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 мая 2024 г.

После переработки 9 июля 2024 г.

Принята к публикации 18 июля 2024 г.

Мы рассматриваем перемешивание пассивной примеси в случайном потоке в пределе слабой молекулярной диффузии, для которого существует диапазон масштабов между малым диффузионным масштабом и относительно большой корреляционной длиной градиента поля скорости потока. В этом диапазоне масштабов при описании эволюции исходного распределения примеси в пространстве в окрестности некоторой лагранжевой траектории поле скорости достаточно приблизить линейным профилем. Мы связываем корреляционные функции концентрации примеси второго и четвертого порядка со статистикой аффинной деформации малого элемента объема жидкости. Тогда как парная корреляционная функция отображает статистику растяжения только по главному направлению, корреляционная функция четвертого порядка на своих угловых особенностях отображает полную статистику растяжений в трехмерном течении. В двумерном течении поведение на угловых особенностях корреляционной функции четвертого порядка обладает другими свойствами и существенно зависит от коэффициента диффузии. Наши выводы применимы для любого статистически однородного во времени градиента поля скорости, что делает их практически значимыми с точки зрения измерения этой статистики.

DOI: 10.31857/S0370274X24080228, EDN: VAQHZH

Введение. Статистика поля скорости случайного потока на малых расстояниях, где скорость можно приблизить линейной функцией координат, определяет статистику перемешивания примесей с малым коэффициентом диффузии [1, 2] и мелкомасштабного магнитного динамо при малом магнитном числе Прандтля [3]. Важнейшей характеристикой этой статистики является распределение степеней деформаций элемента жидкости потоком в зависимости от времени, в частности значение главной экспоненты Ляпунова [4]. Ляпуновскими экспонентами λ_i называются средние логарифмические скорости растяжения/сжатия по ортогональным направлениям, где индекс $i = 1, \dots, d$, а размерность течения $d = 2, 3$. Хвосты функции распределения экспонент растяжения ρ_i определяют статистические свойства как перемешивания скалярных полей [5, 6], так и мелкомасштабного магнитного динамо [7]. Статистику градиента скорости можно использовать и в качестве косвенной меры статистических свойств турбулентного потока в инерционном интервале [8]. Например,

нарушение инвариантности по отношению к инверсии времени в статистике скорости в инерционном интервале существенно влияет на порог генерации в мелкомасштабном магнитном динамо для случая малых магнитных чисел Прандтля [9]. Указанное нарушение инвариантности проносится до самых малых масштабов турбулентности, где оно приводит к асимметрии функции распределения экспонент растяжения ρ_i [5].

Извлечение статистики градиента скорости из результатов численного счета имеет то преимущество, что оказывается доступной полная информация о поле скорости. Однако недостатком этого подхода является ограниченность объема исходных данных по причине ограниченности вычислительных ресурсов [10]. В эксперименте объем данных потенциально гораздо больше, но, с другой стороны, он оказывается неполным. Одним из способов измерения поля скорости является визуализация течения путем добавления в жидкость красителей [11] с низким значением молекулярной диффузии, т.е. с большим числом Шмидта. Концентрацию красителя, не оказывающего существенного обратного влияния на течение, принято называть пассивным скаляром. Статистические свойства дефор-

¹⁾См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru

²⁾e-mail: ssver@itp.ac.ru

магии малых элементов жидкости на больших временах наиболее полно отображает распадная задача, в которой исходное распределение скаляра подвергается переносу течением и воздействию диффузии, в результате чего в итоге наступает его полная гомогенизация. В численном исследовании [12] и экспериментальной работе [13] исследовалась одноточечная статистика скаляра как функция прошедшего времени. Измеренное поведение моментов в двумерном течении [12] сравнивалось с теоретическими предсказаниями, связывающими его со статистикой главной экспоненты растяжения ρ_1 [5]. Стоит подчеркнуть, что статистика перемешивания определяется авто-корреляционными свойствами градиента скорости в лагранжевых координатах. Поэтому свойства перемешивания должны отображать, например, факт существования в трехмерном турбулентном потоке долго-живущих когерентных структур [14].

Помимо одноточечных моментов, важную информацию несут разноточечные корреляционные функции скаляра. Первой из них является парная корреляционная функция F . Она связана со статистикой главной экспоненты растяжения, но не улавливает сильно анизотропное распределение скаляра для каждой конкретной реализации скорости течения. Это распределение, схематично изображенное на рис. 1, почти однородно вдоль главного направления растяжения и быстро изменяется вдоль направления сжатия. Информацию о таком слоистом распределении скаляра сохраняет корреляционная функция четвертого порядка F_4 . Если ее точки можно разделить на две пары, в которых соединяющие точки отрезки параллельны друг другу, то значение F_4 оказывается намного больше, чем для произвольного расположения точек. Это мы называем угловой особенностью корреляционной функции четвертого порядка, которая выражает собой факт слоистого распределения скаляра в пространстве.

В этой работе мы связываем корреляционные функции F , F_4 с функцией распределения экспонент растяжения $P(t, \{\rho_i\})$ в случае произвольной статистики градиента скорости. Мы определяем поведение F_4 на угловых особенностях. В двумерном течении соотношение между F_4 и $P(t, \rho_1)$ оказывается нелокальным по времени и зависящим от диффузии, и, таким образом, поведение F_4 на угловых особенностях существенно отличается от трехмерного случая; для двумерного течения мы рассматриваем модель коротко-коррелированного градиента скорости при получении окончательных результатов. Отметим, что в [6] получены только некоторые степен-

ные асимптотики корреляционных функций, здесь мы определяем полное их поведение.

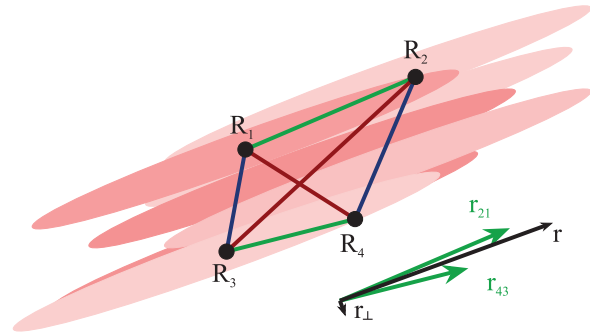


Рис. 1. (Цветной онлайн) Схематическое изображение разделения надоусредненной корреляционной функции 4-го порядка на сумму произведений парных средних (16)

Общие соотношения. Уравнением, описывающим динамику пассивного скаляра ϑ , переносимого случайным потоком \mathbf{v} и подверженного молекулярной диффузии с коэффициентом κ , является

$$\partial_t \vartheta + (\mathbf{v} \nabla) \vartheta = \kappa \Delta \vartheta. \quad (1)$$

В этом уравнении величины ϑ , \mathbf{v} являются функциями времени t и координаты \mathbf{r} . Мы предполагаем, что статистика поля скорости течения \mathbf{v} однородна во времени и пространстве и изотропна. Коэффициент диффузии κ предполагается настолько малым, а пространственное распределение скаляра настолько мелкомасштабным, что для описания локальной динамики скаляра поле скорости \mathbf{v} достаточно считать гладким, приблизив его линейной функцией координат. В случае изотропной турбулентности это означает, что число Шмидта велико, $Sc = \nu/\kappa \gg 1$, где ν — кинематическая вязкость жидкости. Чтобы проследить за процессом перемешивания, перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с некоторой лагранжевой частицей. В ней скорость может быть приближена линейной зависимостью

$$v_i = \sigma_{ik} r_k. \quad (2)$$

Среднее по времени или по статистическому ансамблю $\langle \sigma_{ik} \rangle_\sigma = 0$, а след $\text{tr } \hat{\sigma} = 0$ вследствие несжимаемости течения. Уравнение (1) принимает вид

$$\partial_t \vartheta + \sigma_{ik} r_k \partial_i \vartheta = \kappa \Delta \vartheta. \quad (3)$$

Матрица градиента скорости $\hat{\sigma}$ в (3) задает динамику аффинной деформации \hat{W} элемента жидкости, производимой течением, $\partial_t \hat{W} = \hat{\sigma} \hat{W}$, с начальным условием $\hat{W}|_{t=0} = \hat{1}$. Обозначим $\exp(2\rho_i)$ собственные

значения симметричной матрицы $\hat{W}\hat{W}^T$ (ρ_i предполагаются расположенными в порядке убывания, вследствие несжимаемости течения $\rho_1 + \dots + \rho_d = 0$). При типичных реализациях случайного процесса $\hat{\sigma}(t)$ логарифмические степени растяжения элемента жидкости меняются в среднем линейно со временем, $\langle \rho_i \rangle_\sigma = \lambda_i t$. Наибольшая скорость роста λ_1 есть экспонента Ляпунова λ для потока, она определяет среднюю логарифмическую скорость удаления двух близко расположенных лагранжевых траекторий. Поскольку в силу предполагаемой однородности статистики поля скорости в пространстве и времени мы полагаем статистику случайного $\hat{\sigma}(t)$ однородной по времени на фиксированной лагранжевой траектории и не зависящей от выбора этой траектории, то существует функция распределения экспонент растяжения $P(t, \{\rho_i\})$. Если же время корреляции $\hat{\sigma}(t)$ мало по сравнению со временем наблюдения, то вероятность значительных отклонений ρ_i описывается функцией Крамера S [5],

$$P(t, \{\rho_\alpha\}) = \frac{\sqrt{|\partial_{\alpha\beta} S|}}{\sqrt{(2\pi\tau)^{d-1}}} \exp\left(-\tau S\left(\frac{\{\rho_\alpha\}}{\tau}\right)\right), \quad (4)$$

где безразмерное время $\tau = \lambda t$, индексы α, β пробегают значения от 1 до $d-1$, $\{\rho_\alpha\}$ — совокупность соответствующих степеней растяжения. Минимум $S = 0$ всюду вогнутой вниз функции Крамера S достигается при $\rho_\alpha = \lambda_\alpha t$, в этой точке гессиан равен $|\partial_{\alpha\beta} S|$. Обратим внимание, что, например, в трехмерном турбулентном потоке существуют когерентные структуры, характерные повышенным значением градиента скорости, и сохраняющиеся на временах, заметно превышающих время оборота самых крупных вихрей в течении [14]. Это означает, что время корреляции процесса $\hat{\sigma}(t)$ вполне может превышать характерное время перемешивания скаляра, так что соотношение (4) не имеет места.

Парная корреляционная функция. Любая корреляционная функция пассивного скаляра является результатом усреднения как по статистике источника, так и по статистике случайного течения. Зафиксируем реализацию случайного течения. Тогда статистика скаляра определяется его начальным распределением, которое в нашей постановке задачи является частью метода измерения статистики поля скорости, и должно выбираться таким, чтобы вносить минимальную степень искажения в результаты измерения. Поэтому мы предполагаем, что одноточечная статистика этого распределения является гауссовой с нулевым средним. В таких условиях полная статистика, включающая пространственные

корреляции скаляра, определяется “частично усредненной” парной корреляционной функцией

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{r}) = \langle \vartheta(t, 0) \vartheta(t, \mathbf{r}) \rangle_f, \quad (5)$$

которая является результатом усреднения только по статистике начальных условий. Частично усредненная \mathcal{F} удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \mathcal{F} + \sigma_{ik} r_k \partial_i \mathcal{F} = 2\kappa \Delta \mathcal{F}. \quad (6)$$

Парная корреляционная функция есть результат усреднения частично корреляционной функции по статистике скорости, $F(t, \mathbf{r}) = \langle \mathcal{F}(t, \mathbf{r}) \rangle_\sigma$. В начальный момент времени $\mathcal{F}(t=0, \mathbf{r}) = \Theta(r)$, где изотропная в пространстве функция $\Theta(r)$ убывает на расстоянии порядка l .

Сперва покажем, что уравнение на частично усредненную парную корреляционную функцию $\mathcal{F}(t, \mathbf{r})$ (6) в бездиффузионном пределе $\kappa = 0$ эквивалентно уравнению на в том же смысле частично усредненную функцию распределения \mathcal{P} главной логарифмической степени растяжения $\rho \equiv \rho_1$. Уравнение на \mathcal{P} может быть получено из уравнения

$$\frac{dr_i}{dt} = \sigma_{ik} r_k, \quad (7)$$

на вектор \mathbf{r} , соединяющий две близкие лагранжевы траектории, вытекающего из (2). Решением (7) является $\mathbf{r}(t) = \hat{W}\mathbf{r}(0)$, и оно же определяет решение (6) в пределе нулевой диффузии, $\mathcal{F}(t, \mathbf{r}) = \Theta(|\hat{W}^{-1}\mathbf{r}|)$. Значит, \mathcal{F} оказывается существенно отличным от нуля, если вектор \mathbf{r} удовлетворяет уравнению (7) с начальным условием $|\mathbf{r}(0)| \lesssim l$, т.е. $\mathbf{r}(t)$ с экспоненциальной точностью определяется главным собственным значением матрицы \hat{W} , так что $P(t, \rho)$ и $F(t, r)$ должны быть связаны между собой через соотношение $\rho = \ln(r/l)$. Для того, чтобы показать это на языке уравнений, введем единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ и проектор на ортогональные ему направления $\delta_{ik}^\perp = \delta_{ik} - n_i n_k$. Скорости изменения степени растяжения ρ и направления \mathbf{n} согласно (7) равны $\dot{\rho} = \sigma_{ik} n_i n_k$ и $\dot{n}_i = \delta_{il}^\perp \sigma_{lk} n_k$ соответственно. Динамическое уравнение на недоусредненную функцию распределения $\mathcal{P}(t; \rho, \mathbf{n})$ есть

$$\partial_t \mathcal{P} = -\partial_\rho (\dot{\rho} \mathcal{P}) - \delta_{ik}^\perp \frac{\partial}{\partial n_k} (\dot{n}_i \mathcal{P}). \quad (8)$$

Проектор δ_{ik}^\perp в правой части (8) обеспечивает сохранение длины вектора \mathbf{n} в процессе движения. Прямой проверкой можно убедиться (см. дополнительные материалы, пункт А), что уравнение (8) переходит в уравнение (6) с $\kappa = 0$, если положить

$$\mathcal{P} = (r/l)^d \mathcal{F}. \quad (9)$$

В (9) множитель r^d есть якобиан перехода от переменных \mathbf{r} к переменным $\{\rho, \mathbf{n}\}$. Сохранение интеграла Коррзина $C = \int d^d r \mathcal{F}$ соответствует сохранению полной вероятности для плотности распределения \mathcal{P} .

Теперь произведем в обеих частях (9) усреднение по статистике процесса $\sigma_{ik}(t)$, считая, что она является изотропной. Например, в эксперименте типа [13] это усреднение может быть сведено к усреднению по времени при фиксированном расстоянии (определяющем время эволюции t) от источника скаляра до находящейся вниз по течению области наблюдения. В результате останется только радиальная зависимость:

$$F(t, r) = (l/r)^d P(t, \rho). \quad (10)$$

Для трехмерного потока в правой части (10) стоит функция распределения P , проинтегрированная по второй степени растяжения ρ_2 :

$$P(t, \rho) = \int d\rho_2 P(t, \rho, \rho_2). \quad (11)$$

Следует отметить, что, конечно, равенство (10) выполняется, если совпадают начальные условия для обеих функций. В действительности это не совсем так, поскольку для P предполагается, что $\rho(0) = 1$, а для F – что $|\mathbf{r}(0)| \lesssim l$. Однако на больших временах $\tau \gg 1$ это становится несущественным различием, см. [15], где равенство (11) получено для двумерного потока путем прямого усреднения F по статистике скорости. Равенство (10) имеет место на масштабах больше диффузионного масштаба (масштаба Бэтчелора) $r_\kappa = \sqrt{2\kappa/\lambda}$, при $r \gg r_\kappa$. На малых масштабах $r \lesssim r_\kappa$ диффузия сглаживает поведение корреляционной функции, так что $F(t, 0) \sim F(t, r_\kappa)$.

Поскольку частично усредненная корреляционная функция 4-го порядка \mathcal{F}_4 выражается через \mathcal{F} вследствие предположенной нами гауссовости исходного распределения скаляра, в целях упрощения дальнейших рассуждений характеризуем пространственную зависимость корреляционной функции \mathcal{F} скаляра конечным числом параметров, построив матрицу моментов распределения скаляра [5]

$$I_{il}(t) = (l^2 C)^{-1} \int \mathcal{F}(t, \mathbf{r}) r_i r_l d^d r \quad (12)$$

с начальным условием $I_{il}(t=0) = \delta_{il}$ (мы предполагаем, что интеграл в (12) является сходящимся). Начальное условие для матрицы \hat{I} является определением для характерного размера l клякса скаляра в начальный момент времени. Из (6) следует, что матрица моментов удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\hat{I}}{dt} = \hat{\sigma}\hat{I} + \hat{I}\hat{\sigma}^T + \frac{2\lambda}{\text{Pe}}\hat{I}, \quad (13)$$

где индекс “ T ” означает транспонирование матрицы, $\hat{1}$ – единичная матрица, число Пекле $\text{Pe} = l^2/r_\kappa^2 \gg 1$ велико. Диагонализуем матрицу моментов, представив ее в виде $\hat{I} = \hat{O}^T \hat{M} \hat{O}$, где \hat{O} – ортогональная матрица, а элементы диагональной матрицы \hat{M} суть $M_{ii} = \exp(2\mu_i)$. Для тех направлений, по которым происходит растяжение, а не сжатие (таким направлением точно является 1-е, и, может быть, 2-е для трехмерного течения), диффузия несущественна, так что $\mu_1 = \rho_1$ и, может быть, $\mu_2 = \rho_2$. Для последнего направления следует сравнивать текущий масштаб с r_κ : если $le^{\rho_d} \lesssim r_\kappa$, то $le^{\mu_d} \sim r_\kappa$.

Можно заметить, что частный вид пространственного профиля частично усредненной корреляционной функции \mathcal{F} – гауссов профиль

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{r}) = \exp\left(-\sum_{i=1}^d \mu_i - \frac{\text{tr}(\hat{M}^{-1} \hat{O} \mathbf{r} \mathbf{r}^T \hat{O}^T)}{2l^2}\right) \quad (14)$$

является решением уравнения на \mathcal{F} (6), при этом определение (12) самосогласовано. В начальный момент времени, когда $\hat{M} = \hat{1}$, логично назвать пространственный профиль (14) одномасштабным. Одномасштабное распределение скаляра в начальный момент времени является оптимальным для измерения статистики растяжений, минимально искажая связь (10). Процесс усреднения выражения (14) по статистике скорости на временах $\tau \gg 1$ можно представить как независимые усреднения по изотропной статистике поворотов \hat{O} и статистике растяжений m_i кляксы скаляра [6].

Корреляционная функция четвертого порядка. Частично усредненная корреляционная функция четвертого порядка

$$\mathcal{F}_4(t, \{\mathbf{R}_\mu\}) = \left\langle \prod_{\mu=1}^4 \vartheta(t, \mathbf{R}_\mu) \right\rangle_f \quad (15)$$

выражается через парные корреляционные функции (5),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_4(t, \{\mathbf{R}_\mu\}) = & \mathcal{F}(t, \mathbf{r}_{21}) \mathcal{F}(t, \mathbf{r}_{43}) + \\ & + \mathcal{F}(t, \mathbf{r}_{31}) \mathcal{F}(t, \mathbf{r}_{42}) + \mathcal{F}(t, \mathbf{r}_{41}) \mathcal{F}(t, \mathbf{r}_{32}), \end{aligned} \quad (16)$$

вследствие предположенной нами гауссовости статистики пассивного скаляра, где $\mathbf{r}_{\mu\nu} = \mathbf{R}_\mu - \mathbf{R}_\nu$. Если поток имеет линейный в пространстве профиль вида (2), то динамика каждого слагаемого в правой части (16) оказывается независимой [16]. Поэтому в дальнейшем под \mathcal{F}_4 мы понимаем отдельно первое слагаемое в правой части (16), зависящее только от $\mathbf{r}_1 \equiv \mathbf{r}_{21}$ и $\mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{r}_{43}$ и удовлетворяющее уравнению

$$\partial_t \mathcal{F}_4 + \sigma_{ik} r_{1k} \partial_{1i} \mathcal{F}_4 + \sigma_{ik} r_{2k} \partial_{2i} \mathcal{F}_4 = 2\kappa(\Delta_1 + \Delta_2) \mathcal{F}_4, \quad (17)$$

сравни с (6).

Усредненное по изотропной статистике скорости $F_4 = \langle \mathcal{F}_4 \rangle_\sigma$ зависит только от трех переменных — абсолютных значений векторов $|\mathbf{r}_1|$, $|\mathbf{r}_2|$ и угла θ между ними, который, по определению, меняется в пределах $0 \leq \theta < \pi$. Если же в начальный момент времени распределение скаляра одномасштабно, т.е. верно (14), то \mathcal{F}_4 задается тем же (14), но с удвоенной суммой под экспонентой и заменой $\mathbf{r}\mathbf{r}^T \rightarrow \hat{\mathcal{R}} = \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^T + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2^T$. Поскольку матрица $\hat{\mathcal{R}}$ имеет ранг не более двух, то это означает, что $\langle \mathcal{F}_4 \rangle_\sigma$ зависит в таком случае только от двух переменных — положительных собственных значений r^2 и r_\perp^2 матрицы $\hat{\mathcal{R}}$. Введем вектора \mathbf{r} и \mathbf{r}_\perp , по абсолютному значению равные r и r_\perp и являющиеся собственными для матрицы $\hat{\mathcal{R}}$. Описанные геометрические построения изображены на рис. 1. Теперь повторим наши рассуждения в пределе нулевой диффузии, проделанные для парной корреляционной функции. Поскольку в этом пределе $\mathcal{F}_4 = \Theta(\sqrt{\text{tr}((\hat{W}\hat{W}^T)^{-1}\hat{\mathcal{R}})})$, то в трехмерном случае динамика $F_4(t, r, r_\perp)$ совпадает с динамикой функции распределения логарифмических степеней растяжения $P(t, \rho, \rho_2)$, если положить $\rho = \ln(r/l)$ и $\rho_2 = \ln(r_\perp/l)$. Отметим, что связь $A = \exp(\rho + \rho_2)$ между площадью поверхности $A = rr_\perp/l^2$, натянутой на вектора $\mathbf{r}_{1,2}$, и плотностью функции распределения P , была установлена в [17]. При исследовании угловых особенностей F_4 нас интересует предел $r_\perp \ll r$. С учетом якобиана перехода от $\mathbf{r}_{1,2}$ к ρ, ρ_2 при изотропной статистике и выбранных нормировок, получаем

$$P(t, \rho, \rho_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{l}\right)^4 \left(\frac{r_\perp}{l}\right)^2 F_4(t, r, r_\perp) \quad (18)$$

в качестве обобщения (10). В дополнительных материалах, пункт А связь (18) показывается непосредственными вычислениями, как это было проделано выше для парной корреляционной функции F . Выражение для диффузионного слагаемого (17) есть $\kappa(\partial_r^2 + (1/r)\partial_r + (\partial/\partial r_\perp)^2)F_4$ в пределе $r \gg r_\perp$, поэтому связь (18) нарушается на масштабах $r, r_\perp \lesssim r_\kappa$.

Двумерное течение. В двумерном течении равенство типа (18) неприменимо в силу отсутствия второго независимого направления деформации. Как будет показано ниже, угловая особенность функции $F_4(t)$ определяется не только мгновенным значением $P(t, \rho)$, но также всей историей эволюции $\rho(t)$, а также величиной диффузии. Получить простую связь, аналогичную (18), оказывается затруднительным, если не невозможным. Мы поэтому, во-первых,

сделаем упрощающее предположение, что время наблюдения велико, так что соотношение (4) имеет место быть. Определенным основанием для этого является почти полное отсутствие эффекта перемежаемости в двумерном турбулентном потоке [18]. Во-вторых, окончательные выражения мы получим для коротко-коррелированной во времени модели градиента скорости.

Если верно (4), то значение F_4 технически наиболее просто найти путем определения оптимальной флуктуации, формирующей корреляционную функцию F_4 при данных значениях ее параметров. Под оптимальной флуктуацией [5, 6] мы понимаем реализацию процесса $\hat{\sigma}$, которая с учетом вероятности ее реализации (определяющейся функцией $P(4)$) обеспечивает наибольший вклад в корреляционную функцию. Этот метод применим, когда реализации, существенно отличающиеся от оптимальной, вносят значительно меньший вклад в среднее. Окончательные выражения для F_4 мы вычисляем с функцией Крамера S , полученной для коротко-коррелированной во времени модели поля скорости. Эти выражения совпадают с результатом прямого решения уравнения Фоккера–Планка на F_4 , см. дополнительные материалы, пункт В.

Приступим к усреднению первого слагаемого в (16) с \mathcal{F} , имеющим вид (14), путем поиска оптимальной флуктуации. В двумерном случае усреднение по статистике матрицы поворота \hat{O} сводится к усреднению по одному углу. Определим условия того, что амплитуда второго слагаемого под экспонентой в (14) не превышала по порядку величины единицу, и, таким образом, производился ненулевой (не экспоненциально малый) вклад в F_4 . Во-первых, должна обеспечиваться принципиальная возможность при каком-либо повороте \hat{O} обоим векторам $\mathbf{r}_{1,2}$ одновременно поместиться в эллипс с полуосями $l \exp(\mu_{1,2})$. Для этого должно выполняться требование $e^{\mu_1} \gtrsim r/l$ и $e^{\mu_2} \gtrsim r_\perp/l$. Во-вторых, пара векторов $\mathbf{r}_{1,2}$ должна действительно поместиться в эллипс. Это требование сокращает диапазон допустимых поворотов \hat{O} с его максимального значения π , если $e^{\mu_2} < r/l$. В этом случае доля полного оборота, вносящая существенный вклад в среднее, оценивается как $(l/r)e^{\mu_2}$. Таким образом, F_4 после явного усреднения по углу оказывается равной выражению

$$F_4 \sim \left\langle \exp(-2\rho - 2\mu_2 - \chi(a - \mu_2)) \theta(\rho - a) \theta(\mu_2 - a_\perp) \right\rangle_\rho, \quad (19)$$

в котором остается провести усреднение по статистике ρ . В (19) мы ввели для краткости $a = \ln(r/l)$

и $a_{\perp} = \ln(r_{\perp}/l)$, $\theta(x > 0) = 1$, $\theta(x < 0) = 0$ и $\chi(x) = x\theta(x)$.

Теперь приступим к усреднению по статистике растяжений кляксы в (19). Сперва заметим, что перенос двумерным несжимаемым потоком сохраняет площадь, натянутую на любой жидкий контур, т.е. $A = rr_{\perp}/l^2 = \text{const}$ в отсутствие диффузии. Следовательно, если пренебречь молекулярной диффузией, то у корреляционной функции четвертого порядка F_4 должна отсутствовать динамика по переменной A . Поскольку начальное состояние $F_4(0) = \exp(-J)$ (где “момент инерции” $J = (r^2 + r_{\perp}^2)/2l^2$) не зависит от A , то и в последующие моменты времени F_4 должна зависеть только от J . И действительно, в области $a_{\perp} < \mu_2$ ненулевых значений (19) это выражение не зависит от $r_{\perp} \ll r$.

Определим условие, при котором применима техника усреднения (19), основанная на поиске оптимально флуктуации. Характерным масштабом для экспонент ρ_i является $a_{\kappa} = \ln \sqrt{\text{Pe}}$. Типичные флуктуации $\delta\rho_i \sim \sqrt{\tau}$ на фоне оптимальной флуктуации должны быть малы по сравнению с этим масштабом. Поэтому условием применимости концепции оптимальной флуктуации является

$$\delta\rho \ll a_{\kappa}, \quad \Rightarrow \quad \tau \ll (\ln \text{Pe})^2 = 4a_{\kappa}^2. \quad (20)$$

Поскольку мы считаем число Пекле экспоненциально большим, $\ln \text{Pe} \gg 1$, то мы в дальнейшем ограничиваемся рассмотрением только не слишком больших времен (20).

Далее конкретные вычисления будем проводить для модели коротко-коррелированного во времени поля скорости, для которого функция Крамера [19]

$$S(\rho/\tau) = (\rho/\tau - 1)^2/2, \quad S(-\xi) = S(\xi) + 2\xi. \quad (21)$$

Можно показать, что симметрия функции Крамера (21) сохраняется для любого течения, статистика которого инвариантна по отношению к обращению времени [15]. Рассмотрим сначала предел, когда диффузией можно пренебречь. Тогда ненулевой (т.е. не экспоненциально малый) результат для (19) получается только тогда, когда $A \lesssim 1$, т.е. $a + a_{\perp} < 0$. Результат усреднения (19) с весом, задаваемым энтропийной функцией (21), определяется значениями $\rho \approx a$ если $a > 0$. В итоге приходим к тому, что

$$0 < a < a_{\kappa}, \quad a + a_{\perp} < 0: \quad F_4 \sim \exp\left(-\frac{\tau}{2}(1 + \xi)^2\right), \quad (22)$$

где $\xi = a/\tau = (1/\tau) \ln(r/l)$. Выражение (22) по порядку величин совпадает с выражением для парной корреляционной функции $F(t, r)$, полученным согласно

(10). Ответ (22) верен только при не слишком больших расстояниях $r < l^2/r_{\kappa}$, поскольку в противном случае диффузионный масштаб r_{κ} будет достигнут меньшим размером кляксы $le^{-\mu_2}$. Отметим, что на промежуточной асимптотике $r \ll e^{\tau}$ решение (22) спадает обратно пропорционально расстоянию и экспоненциально во времени,

$$F_4 = \frac{e^{-\tau/2}}{\sqrt{4\pi\tau r}}. \quad (23)$$

Если условие (20) не выполнено, то результат (22) усреднения изменяется и становится зависящим от коэффициента диффузии.

Пусть теперь, наоборот, диффузионный масштаб уже достигнут меньшим размером кляксы, то есть $r \gg l^2/r_{\kappa}$. Рассмотрим сначала коллинеарную геометрию, когда длина меньшего из векторов находится под диффузионным масштабом, $r_{\perp} \lesssim r_{\kappa}$. Результат усреднения (19) по-прежнему определяется значениями $\rho \approx a > a_{\kappa}$, так что

$$a > a_{\kappa}, \quad a_{\perp} \lesssim -a_{\kappa}: \quad F_4 \sim \frac{l^2}{r_{\kappa} r} \exp\left(-\frac{\tau}{2}(1 + \xi)^2\right). \quad (24)$$

По сравнению с (22) в (24) присутствует дополнительный малый алгебраический множитель, т.е. функция F_4 оказывается малой по сравнению с парной корреляционной функцией $F(t, r)$.

Далее рассмотрим нарушение коллинеарности в условиях существенного влияния диффузии, когда $r_{\kappa} \ll r_{\perp} \ll r$ при $rr_{\perp} \gg l^2$. С одной стороны, неравенство $rr_{\perp}/l^2 \gg 1$ предполагает вследствие наличия θ -функций в (19), что $\rho_1 + \mu_2 = a + a_{\perp} > 1$, т.е. что диффузионный масштаб r_{κ} уже существенно достигнут меньшим размером кляксы le^{μ_2} . С другой стороны, в момент наблюдения этот меньший размер существенно превышает диффузионный масштаб, $le^{\mu_2} \gtrsim r_{\perp} \gg r_{\kappa}$. Это означает, что оптимальная флуктуация характеризуется немонотонным поведением степени растяжения $\rho(t')$, $t' < t$: сначала она вырастает до значения $\rho^{(i)} = a + a_{\perp} + a_{\kappa}$ в некоторый промежуточный момент $\tau^{(i)}$, $\rho(\tau^{(i)}) = \rho^{(i)}$, а затем падает на величину $a_{\perp} + a_{\kappa}$ до значения $\rho(t) = a$. В результате падения меньший размер вырастает от диффузионного масштаба r_{κ} до конечного размера r_{\perp} . На рисунке 2 оптимальная флуктуация для $\rho(t')$ изображена черным цветом, а для $\mu_2(t')$ — розовым. Отметим, что соотношение между a и a_{κ} в этих рассуждениях может быть произвольным.

По промежуточному времени $\tau^{(i)}$ следует провести оптимизацию. Однако непосредственно этого делать нет нужды, поскольку благодаря симметрии

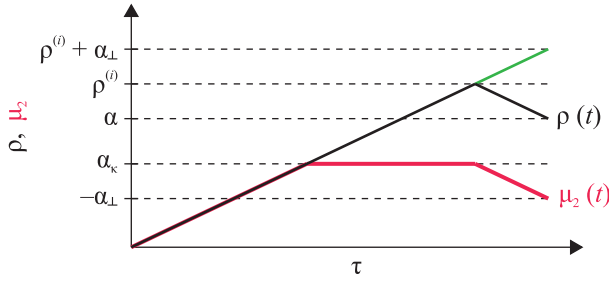


Рис. 2. (Цветной онлайн) Оптимальная флуктуация, формирующая корреляционную функцию скаляра четвертой степени. Максимальное значение степени растяжения $\rho^{(i)} = a_\kappa + a + a_\perp$

функции Крамера (21) вероятность такой траектории равна вероятности траектории с монотонным ростом $\rho_1(t')$ от нуля до $\rho(t) = \rho^{(i)} + a_\perp + a_\kappa = \ln(rr_\perp^2/r_\kappa^2 l)$, помноженный на фактор $(r_\kappa/r_\perp)^2$. Построенная композитная флуктуация $\rho(t')$ изображена на рис. 2 черно-зеленым цветом. В результате корреляционная функция оказывается равной по порядку величины

$$F_4 \sim \frac{l^2 r_\perp}{r_\kappa^2 r} \exp\left(-\frac{\tau}{2} \left(1 + \frac{a + 2a_\perp + 2a_\kappa}{\tau}\right)^2\right) \quad (25)$$

при $a > a_\kappa$ и $a_\perp \lesssim -a_\kappa$. Выражение (25) переходит непрерывно в коллинеарный предел (24) при $r_\perp \rightarrow r_\kappa$ в области $r \gg l^2/r_\kappa$, соответствующей существенно влиянию диффузии. Положим, что r_\perp не сильно превосходит диффузионный масштаб r_κ и разложим экспоненту в (25) по $a_\perp + a_\kappa$:

$$F_4 \sim \frac{l^2}{r_\kappa r} \exp\left(-\frac{\tau}{2} (1 + \xi)^2\right) \cdot \left(\frac{r_\kappa}{r_\perp}\right)^p. \quad (26)$$

Здесь первый множитель соответствует коллинеарному пределу (24), а второй множитель — степенной зависимости с показателем $p = 2(\ln(r/l) + \lambda t) - 1$.

Однако в области несущественности диффузии $r \ll l^2/r_\kappa$, т.е. $a < a_\kappa$, выражение (25) не переходит в (22) при $r_\perp \sim l^2/r$: отношение (25) к (22) оценивается как

$$\sim \exp\left(-\frac{2a_\kappa(a_\kappa - a)}{\tau}\right) \ll 1. \quad (27)$$

Таким образом, на расстояниях $r \ll l^2/r_\kappa$ корреляционная функция 4-го порядка имеет угловую особенность δ -функционального типа.

В дополнительных материалах, пункт В получено и решено уравнение Фоккера–Планка на F_4 . Вид этого уравнения существенно упрощается благодаря предположению о том, что F_4 зависит только от переменных A и J . Удастся последовательно получить

асимптотики (22), (24), (25). Продемонстрированное совпадение, с одной стороны, лишний раз подтверждает применимость приближения, основанного на поиске оптимальной флуктуации. С другой стороны, даже после ряда математических упрощений исходного уравнения на F_4 его решение оказалось достаточно громоздким по сравнению с нахождением F_4 методом поиска оптимальной флуктуации.

Закключение. Парная корреляционная функция $F(t, r)$ связана с функцией распределения $P(t, \rho)$ логарифмической степени растяжения посредством степенного множителя, см. (10) для любой размерности течения, $d = 2, 3$. Аналогичное равенство имеет место для корреляционной функции четвертого порядка в трех-мерном течении, см. (18). Подчеркнем, что соотношения (10), (18) верны в условиях любой однородной в пространстве и изотропной статистики скорости. Двумерное течение является низкоразмерным для корреляционной функции четвертого порядка, ее поведение на угловых особенностях существенно зависит от диффузии. Для относительно малого времени корреляции поля скорости в лагранжевых координатах, когда возможно ввести функцию Крамера (4), мы построили оптимальные флуктуации и получили окончательные ответы для поля скорости с гауссовой статистикой, см. (22), (24), (25).

Автор выражает благодарность И. В. Колоколову и В. В. Лебедеву за плодотворные обсуждения.

Финансирование работы. Работа финансировалась за счет средств Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук на выполнение темы #FFWR-2024-0017 “Транспорт в неупорядоченных системах: от наноструктур до турбулентной атмосферы”.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. G. Falkovich, K. Gawędzki, and M. Vergassola, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 913 (2001).
2. D. A. Donzis, K. R. Sreenivasan, and P. K. Yeung, *Flow Turbul. Combust.* **85**, 549 (2010).
3. A. Brandenburg and K. Subramanian, *Phys. Rep.* **417**, 1 (2005).
4. P. Mohan, N. Fitzsimmons, and R. D. Moser, *Phys. Rev. Fluids* **2**, 114606 (2017).
5. E. Balkovsky and A. Fouxon, *Phys. Rev. E* **60**, 4164 (1999).
6. S. Vergeles, *JETP* **102**, 685 (2006).
7. M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and M. Vergassola, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4065 (1999).
8. T. Ishihara, T. Gotoh, and Y. Kaneda, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **41**, 165 (2009).

9. A. Копыев, А. П'ун, V. Sirota, and K. Zybin, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **527**, 1055 (2024).
10. G. You and S. Leung, *Journal of Scientific Computing* **76**, 1407 (2018).
11. E. Villermaux, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **51**, 245 (2019).
12. D. Fereday and P. Haynes, *Phys. Fluids* **16**, 4359 (2004).
13. J. Duplat, C. Innocenti, and E. Villermaux, *Phys. Fluids* **22**, 035104 (2010).
14. К. П. Зыбин, В. А. Сирота, *Успехи физических наук* **185**, 593 (2015).
15. N. A. Ivchenko, V. V. Lebedev, and S. S. Vergeles, *Phys. Rev. E* **110**, 015102 (2024).
16. E. Balkovsky, M. Chertkov, I. Kolokolov, and V. Lebedev, *JETP Lett.* **61**, 1049 (1995).
17. A. Gamba and I. V. Kolokolov, *J. Stat. Phys.* **85**, 489 (1996).
18. G. Boffetta and R. E. Ecke, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **44**, 427 (2012).
19. I. V. Kolokolov, *JETP Lett.* **92**, 111 (2010).