

Самозахват лазерного света для ультрарелятивистских интенсивностей

В. Ю. Быченков⁺*, В. Ф. Ковалев^{×*1)}

⁺ Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

^{*} Федеральное государственное унитарное предприятие
“Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н. Л. Духова”, 127030 Москва, Россия

[×] Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 125047 Москва, Россия

Поступила в редакцию 18 июня 2024 г.

После переработки 23 июля 2024 г.

Принята к публикации 24 июля 2024 г.

Отсутствие теории, способной обосновать условие согласования лазерно-плазменных параметров для реализации режима релятивистского самозахвата лазерного света в плазме, наиболее эффективного для ускорения электронов, до сих пор не позволяет снять сомнения в необходимости соответствующих широкомасштабных экспериментальных исследований, особенно имея в виду необоснованность или незавершенность предшествующих теорий. Представленный теоретико-аналитический подход, учитывающий релятивистскую нелинейность массы электрона и электронную кавитацию в плазме, преодолевает эту проблему и дает аналитическое обоснование условия такого согласования для ультрарелятивистских лазерных пучков на количественном уровне, которое согласуется с многомерным численным моделированием.

DOI: 10.31857/S0370274X24090059, EDN: VENZUJ

Для ускорительных и вторичных радиационно-ядерных приложений, основанных на взаимодействии мощных лазерных пучков с прозрачной плазмой, критически важной является решение проблемы устойчивого нелинейного волноводного распространения релятивистски интенсивного лазерного света на расстояние, много большее рэлеевской длины. Проведенное в последние годы численное 3D-моделирование, подтвержденное результатами различных групп, показало, что этот режим распространения – релятивистский самозахват (РСЗ) – характеризуется определенным согласованием между поперечным размером каверны, в которой локализовано лазерное излучение, плотностью плазмы и мощностью лазерного импульса (см., например, [1–5]). В настоящее время с некоторой долей неопределенности принимается, что такое согласование может быть качественно представлено в виде следующего соотношения

$$R \simeq \alpha \frac{c}{\omega_p} \sqrt{a_0} = \alpha \frac{c}{\omega} \sqrt{a_0 \frac{n_c}{n_{e0}}} \propto I_0^{1/4} n_{e0}^{-1/2}, \quad (1)$$

имеющего место в сильно релятивистском случае, $a_0 \gg 1$, где ω_p – плазменная частота, ω – частота лазера, n_c – критическая плотность, $a_0 = eE_0/m_e\omega c$ –

стандартная безразмерная амплитуда поля, E_0 , на оси лазерного пучка (пропорциональная корню из интенсивности света на оси, I_0), R – самосогласованный радиус каверны, а α – численный коэффициент порядка единицы, который может различаться от одного численного моделирования к другому. Таким образом, для заданных значений интенсивности лазерного поля (I_0) и электронной плотности плазмы (n_{e0}) стабильному распространению света отвечает определенный радиус каверны (1). Например, результаты численного кинетического моделирования методом “частица в ячейке” свидетельствуют, что $\alpha \simeq 1 - 2$ [1, 2, 5, 6]. Очевидно, что получение аналитически соотношения (1), являющегося целью данной работы, крайне востребовано для обоснования и полного понимания численных результатов. Сразу отметим, что численное моделирование на основе решения модифицированного нелинейного уравнения Шредингера [7] хотя и учитывало основные релятивистские нелинейности, не подтверждает скейлинг (1), что вносит дополнительную интригу – может ли адекватная теория преодолеть такое разногласие.

К настоящему времени накоплен большой экспериментальный материал по волноводному распространению лазерных пучков релятивистской интенсивности. В первых экспериментах с истекающей из сопла газовой струей [8], облучаемой 4 ТВт импуль-

¹⁾e-mail: vfkvvfkv@gmail.com

сом, при релятивистски-средней интенсивности лазера ($a_0 = 2.1$) уже отмечалось, что каналирование реализуется при определенной, оптимальной фокусировке относительно среза сопла, что отвечало определенной плотности струи. Это было первым экспериментальным подтверждением необходимости согласования размера пятна фокусировки (10 мкм) при заданной интенсивности лазера ($I_0 = 6 \times 10^{18}$ Вт/см²) с плотностью образующейся плазмы, которая естественно падала с расстоянием от сопла, составляя $n_{e0} \approx 10^{20}$ см⁻³, когда регистрировался канал. Следует отметить, что формирование стабильного волноводного канала является определяющим для эффективного ускорения электронов. Из анализа большого числа экспериментов по ускорению [9] был установлен факт уменьшения фокального пятна с увеличением (необходимой для эффективного ускорения) плотности (ср. (1)) для широкого диапазона размеров пятна (3–50 мкм) и электронных плотностей (10^{18} – 10^{20} см⁻³). Устойчивое каналирование лазерных импульсов отмечается и для современных лазеров мощностью в сотни ТВт. Например, благодаря этому в экспериментах по ускорению регистрировались электронные сгустки, ускоренные до энергий, превосходящих 1 ГэВ, с зарядом до 0.3 нКл при фокусировке 110 ТВт [10] и 240 ТВт [5] лазерных импульсов на газовую плазму с плотностью $n_{e0} \gtrsim 10^{18}$ см⁻³ в FWHM-пятно порядка 10 мкм.

Строгое обоснование условия (1), как показано ниже, можно получить из детального исследования аналитического самофокусирующего решения волноводного типа, названного самозахватом волнового пучка (см. [11, 12, 13]), которое получается из нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с релятивистской нелинейностью

$$2ik\partial_z E + \Delta_{\perp} E + k^2 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_0} E = 0, \quad E(0, \mathbf{r}) = E(\mathbf{r}), \quad (2)$$

для медленно меняющейся в направлении распространения z комплексной амплитуды электрического поля $E(z, \mathbf{r})$ электромагнитной (лазерной) волны с частотой ω . Уравнение (2) соответствует квазиоптическому приближению, описывающему стационарную (по времени) структуру волнового пучка, где $k = (\omega/c)\sqrt{\epsilon_0}$ – волновое число электромагнитной волны, Δ_{\perp} – оператор Лапласа в плоскости \mathbf{r}_{\perp} , перпендикулярной оси пучка z , $\epsilon_0 = 1 - 4\pi e^2 n_{e0}/(m_e \omega^2)$ – линейная диэлектрическая проницаемость плазмы, а ϵ_2 – действительная часть нелинейной диэлектрической проницаемости плазмы. В рамках строгого подхода с использованием (2) удается найти пространственные

распределения комплексной амплитуды электрического поля для произвольного значения параметра релятивизма от нерелятивистских, $a_0 \ll 1$, до ультррелятивистских, $a_0 \gg 1$, значений. Результаты такого подробного исследования будут представлены в отдельной публикации, а в предлагаемой заметке мы ограничимся случаем $a_0 \gg 1$, наиболее интересным для современных исследований.

Сначала отметим, что простой качественный аргумент в пользу условия согласования (1) можно привести, исходя из давно развитой модели [11] самофокусирующегося волноводного канала в среде с кубической нелинейностью в (2) для плоско-слоистого приближения, хотя последнее, строго говоря, и не отвечает используемой нами цилиндрической геометрии. А именно, обращаясь к выражению для полученной Талановым полуширине канала, заменим в нем массу электрона m_e на $\gamma m_e \propto a_0 m_e$, где γ – релятивистский фактор, чтобы качественно учесть эффект утяжеления электронов в сильно-релятивистском случае. Тогда, вместо скейлинга для ширины канала [11] $\propto 1/a_0$ приходим к отвечающему выражению (1) скейлингу $\propto \sqrt{a_0}$ (см. [14]).

Вышеприведенное интуитивное распространение условия согласования для слабого лазерного поля, $a_0 \ll 1$ вне рамок его формальной применимости, $a_0 \gg 1$, находит определенное обоснование на качественном уровне физической трактовки.

В сильно релятивистском пределе, $a_0 \gg 1$, можно полагать, что происходит полное пондеромоторное вытеснение электронов из лазерно-плазменного канала с характерным радиусом r_{cav} , т.е. электронная кавитация. Тогда, качественно, условие каналированного распространения пучка (т.е. РСЗ) может быть описано условием полного внутреннего отражения лазерных лучей на стенке полого внутри (по электронам) канала. Использование этого приводит к наглядному объяснению выражения (1) [6]. Однако при этом в качестве a_0 выступает значение амплитуды лазерного поля ($\propto \sqrt{I}$) на стенке канала, причем предположение, что оно по порядку величины сопоставимо с максимальной амплитудой поля на оси пучка, заранее не очевидно и нуждается в теоретическом осмыслении.

Заметим также, что формирование канала с определенным поперечным размером свидетельствует о радиальном равновесии электронов на его границе. Это выражается в балансе радиальных сил, действующих на приграничные электроны, – силы светового давления (пондеромоторной силы), оцениваемой в сильно релятивистском пределе как $F_p \sim (m_e c^2/4)(a_0/R)$, и противоположно действующей

кулоновской фокусирующей силы со стороны ионного остова, $F_C \sim m_e \omega_p^2 R$. Этот баланс, $F_p = F_C$, также сводится к соотношению (1). Понятно, что и при таком рассуждении в качестве a_0 выступает значение амплитуды лазерного поля на границе канала. Однако, в имеющейся литературе [2] отсылка к условию (1) не уточняет, что понимается под величиной a_0 , и типично ее связывают со стандартной величиной максимального безразмерного лазерного поля на оси. Это наводит на мысль, что при правильной трактовке соотношения (1) вместо скейлинга $R \propto I_0^{1/4}$ может возникать либо другой при использовании пограничного значения амплитуды поля, либо сохраниться прежний, однако с другим значением параметра α . Представленная теория проясняет этот вопрос.

Переходя к изложению результатов теоретических исследований, следствием которых и является получение условия согласования вида (1), отметим, что они получены на основе решения НУШ с релятивистской нелинейностью (2) для широко известного закона нелинейного преломления релятивистски интенсивного светового пучка, заданного следующей функцией ϵ_2 в (2),

$$\epsilon_2 = \epsilon_0 \frac{k_p^2}{k^2} \left(1 - \frac{n_e}{\gamma n_{e0}} \right), \quad k_p = \left(\frac{4\pi e^2 n_{e0}}{m_e c^2} \right)^{1/2} \equiv \frac{\omega_p}{c}. \quad (3)$$

Здесь учтены два вклада: во-первых, это релятивистская нелинейность массы электрона, определяемая значением релятивистского фактора для циркулярно-поляризованного аксиально-симметричного пучка в цилиндрической геометрии $\gamma = \sqrt{1 + |E/E_{\text{rel}}|^2}$, где $E_{\text{rel}}^2 = (\omega c m_e / e)^2$ и, во-вторых, пондеромоторная нелинейность, связанная с нелинейной деформацией электронной плотности $n_e = n_{e0} N_e(\gamma)$, пропорциональной $\Delta_{\perp} \gamma$ (релятивистская стрикция). В наиболее распространенном случае осесимметричного пучка комплексная амплитуда электрического поля пучка E зависит от координаты z вдоль оси пучка и поперечной координаты $r_{\perp} = r$, т.е. $E = E(z, r)$. Выделяя в E вещественные амплитуду, $A(r)$, и линейную по продольной координате фазу, т.е. $E = A \exp(ivz/2)$, получим уравнение, определяющее зависимость A от поперечной координаты

$$\frac{\Delta_{\perp} a}{a} + 1 - \nu - \frac{N_e(\gamma)}{\gamma} = 0, \quad \Delta_{\perp} = \partial_{rr} + \frac{1}{r} \partial_r. \quad (4)$$

Здесь в (4) и ниже используются безразмерная поперечная координата r , нормированная на k_p^{-1} , безразмерная положительная постоянная распространения $\nu > 0$, нормированная на k_p^2/k , и стандартная безразмерная амплитуда поля $a = eA/m_e \omega c$, с помощью

которой релятивистский фактор записывается как $\gamma = \sqrt{1 + a^2}$. Вид решения уравнения (4) существенным образом зависит от формы функции $N_e(\gamma)$ и от постоянной распространения $\nu < 1$, которая определяет нелинейную фазовую скорость электромагнитной волны, т.е. зависит от амплитуды a_0 .

В наиболее упрощенной модели для N_e используется следующее выражение [15, 16],

$$N_e = 1 + \Delta_{\perp} \gamma, \quad (5)$$

которое дополняется естественным условием неотрицательности электронной плотности, $n_e \geq 0$. Для самозахватных решений с монотонно убывающей с ростом r величиной γ это условие нарушается уже при умеренном релятивизме, когда максимальное значение γ на оси пучка $\gamma_0 = \gamma(r=0)$ превышает значение $\gamma_0^{\text{cyl}} \approx 1.72$ для цилиндрического пучка. В условиях более сильной релятивистской стрикции, $\gamma_0 > \gamma_0^{\text{cyl}}$, когда условие $n_e \geq 0$ оказывается нарушенным, по крайней мере в ограниченной области локализации пучка, требуется более аккуратное описание сильной деформации плотности, включая эффект электронной кавитации [17, 7]. Развитием модели (5) является дополнительное условие $N_e = 0$ при нарушении неравенства $n_e \geq 0$. Для локализованного лазерного пучка с монотонным пространственным распределением интенсивности это означает формальное разбиение области существования решения на две подобласти, в одной из которых плотность электронов положительна, $N_e = 1 + \Delta_{\perp} \gamma > 0$, а в другой – электроны полностью отсутствуют (зона полной кавитации) и $N_e \equiv 0$ в (4). Этому соответствует выражение для нелинейной диэлектрической проницаемости в виде кусочно-гладкой функции, что приводит к необходимости строить решение искомой задачи кусочно-непрерывным способом, сшивая решения в различных областях, например, так, как это сделано в работах [7, 17] и [18, 19].

В зоне полной кавитации, где $N_e \equiv 0$, для обсуждаемого здесь цилиндрического пучка решение уравнения (4), которое отвечает локализованному в пространстве распределению по поперечной координате амплитуды a с максимумом на оси пучка, имеет наиболее простой вид, когда вместо a используется релятивистский фактор γ ,

$$\gamma^2 = 1 + (\gamma_0^2 - 1) J_0^2(\xi), \quad \xi = \sqrt{\frac{2}{\Gamma + 1}} r, \quad r < r_{\text{cav}}. \quad (6)$$

Здесь в (6) параметр Γ связан с ν соотношением $\Gamma = (1 + \nu)/(1 - \nu)$.

В области, где нет полной кавитации, $r > r_{\text{cav}}$, при подстановке в (4) выражения (5) для N_e и ис-

пользовании переменной $\gamma = \cosh u$, уравнение (4) принимает вид

$$\partial_{\xi\xi} u + (1/\xi) \partial_{\xi} u + \sinh u \left[\cosh u - \frac{\Gamma + 1}{2} \right] = 0. \quad (7)$$

Полное решение уравнения (4) получается сшивкой на границе области полной кавитации $r = r_{\text{cav}}$ аналитического решения (6) (функций и их производных) с численным решением уравнения (7) (аналитическое решение в этой области отсутствует), и проблема заключается в выборе точки сшивки, что по-разному было реализовано в работах [7, 17] и [18, 19].

Отличие в использованных в этих работах подходах заключается в выборе положения точки сшивки решений: границей области кавитации в [17, 7] (вариант I) является точка обращения в нуль плотности электронов, что отвечает условию $\{1 + \Delta_{\perp} \gamma\}_{r=r_{\text{cav}}} = 0$. Это условие дает дополнительное соотношение, связывающее параметр Γ со значениями r_{cav} и $\gamma_{\text{cav}} = \gamma(r_{\text{cav}})$, а с учетом выполнения условия монотонного убывания $u(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$ появляется также ограничение на параметр Γ , который с хорошей точностью оказывается линейной функцией от γ_{cav} . Несмотря на то, что использование этих соотношений позволяет полностью описать структуру электромагнитного поля в области полной кавитации, вариант I обладает существенным недостатком.

Недостатком подхода, отвечающего варианту I, является несохранение полного заряда, т.е. несовпадение числа электронов, “выдавленных” лазерным излучением из области кавитации, числу электронов вне зоны кавитации. От этого недостатка свободен подход, предложенный в [19, 18] (вариант II), при котором в качестве точки сшивки решений используется граница, положение которой соответствует выполнению условия баланса для числа электронов, эвакуированных из канала во внешнюю область,

$$Q \equiv 2\pi \int_0^{\infty} (N_e(\gamma) - 1) r dr = 0, \quad (8)$$

При вычислении интеграла (8) удобно рассмотреть отдельно вклад от области полной кавитации, где $N_e \equiv 0$, и вклад от внешней области, где N_e определена формулой (5). Тогда, несмотря на то, что условие (8) формально записывается в виде интегрального соотношения (по поперечной координате) для пространственного распределения плотности электронов, оно сводится к локальному соотношению между координатой границы зоны полной кавитации и производной релятивистского фактора в этой же точке,

$\{1 + (4/(\Gamma + 1))(1/\xi)\partial_{\xi}\gamma\}_{\xi=\xi_{\text{cav}}} = 0$. Это условие дает дополнительное соотношение, связывающее параметр Γ со значениями ξ_{cav} и γ_{cav} ,

$$\gamma_{\text{cav}} = ((\Gamma + 1)/8)(\xi_{\text{cav}} J_0(\xi_{\text{cav}})/J_1(\xi_{\text{cav}})) + \left(1 + [((\Gamma + 1)/8)(\xi_{\text{cav}} J_0(\xi_{\text{cav}})/J_1(\xi_{\text{cav}}))]^2\right)^{1/2}. \quad (9)$$

Выбор из решений уравнения (7) только одного, отвечающего монотонному убыванию $u(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$, свидетельствует о том, что параметр Γ не может быть выбран произвольно, а связан с ξ_{cav} определенной зависимостью. Анализ проведенных численных расчетов показывает, что в привлекающем физический интерес широком диапазоне изменения амплитуды $a_0 \lesssim 150$ эта зависимость представляется следующей функцией (коэффициенты даны с точностью до второго знака после запятой)

$$\Gamma \approx b_1 + b_2 \xi_{\text{cav}}^{b_3} + b_4 (J_1(\xi_{\text{cav}})/(J_0(\xi_{\text{cav}})))^{3/2}, \quad (10)$$

$$b_1 = -0.51, \quad b_2 = -0.33, \quad b_3 = 1.65, \quad b_4 = 5.13.$$

Формулы (6), (9), (10) вместе с очевидным следствием решения (6) при $\gamma = \gamma_{\text{cav}}$,

$$\gamma_{\text{cav}}^2 = 1 + (\gamma_0^2 - 1) J_0^2(\xi_{\text{cav}}), \quad (11)$$

определяют структуру электромагнитного поля пучка в зоне полной кавитации для варианта II.

Отличие второго варианта сшивки решений от первого состоит в скачке плотности электронов на границе области кавитации для второго варианта, в то время как для первого варианта плотность электронов непрерывна в этой точке. В последующих работах [20] обсуждался эффект влияния гладких распределений $N_e(\gamma)$, которые соответствуют исчезающе малой, но конечной плотности электронов в области кавитации, однако такая модификация, как было указано в [18], не решает проблему нарушения сохранения полного заряда электронов.

Для более сложных моделей, использующих гладкую функцию для плотности электронов, и, следовательно, не требующих сшивки решений, интегрирование уравнения (2) представляет нетривиальную задачу. Сравнение вкладов в нелинейную диэлектрическую проницаемость, обусловленных как релятивизмом электронов, так и пондеромоторной стрикцией, показывает на примере пучка с гауссовым пространственным распределением интенсивности на входе в нелинейную среду [4, 14], что диэлектрическая проницаемость как с учетом релятивистской стрикции, так и без нее становится тем ближе к “вакуумной”, чем больше интенсивность релятивистского

пучка. Следовательно, в наиболее интересном пределе сильной релятивистской нелинейности диэлектрическая проницаемость становится “вакуумной” уже за счет релятивизма, т.е. качественно эффект релятивистского самозахвата в таком пределе можно рассмотреть, учитывая только релятивистское изменение массы электронов. При умеренном релятивизме погрешность вычисления нелинейной диэлектрической проницаемости при учете стрикции и без нее оказывается более значительной, но без претензии на количественный ответ такое приближение может быть использовано. Таким образом, для получения “оценочного” условия согласования (1) возникает более простая модель (вариант III) (см., например, [22]) без построения “разрывных” решений и последующей сшивки. Сравнение трех вариантов и обсуждение их адекватности получаемым в численных экспериментах условиям согласования для ультрарелятивистской нелинейности ($a_0 \gg 1$) проводится ниже.

В своем подходе мы основываемся на модели [18] (вариант II), которую используем для получения пока отсутствующих, но востребованных, аналитических формул для самосогласованной при РСЗ ширины лазерного пучка и канала – основным нашим результатом. Их удастся получить в случае $a_0 \gg 1$ с учетом малости отношения $1/a_0$. Это решает поставленную нами задачу количественного обоснования условий реализации РСЗ, вскрывает причину численно полученного противоречивого результата [7, 21] (вариант I) и определяет точность приближения простой модели нелинейности [22] (вариант III).

Сшивка решений уравнения (4), полученных в разных областях, на разделяющей их границе дает для вариантов I и II искомые формулы для пространственного распределения величины γ (а значит и для a), что позволяет вычислить зависимость среднего безразмерного радиуса лазерного пучка, r_L , и безразмерного радиуса канала кавитации, r_{cav} , от величины мощности лазерного пучка и максимальной амплитуды лазерного поля. Ниже формулы и графики для интересующих нас величин приводятся для цилиндрического лазерного пучка, для которого безразмерная величина полной мощности P и средний радиус определяются соотношениями

$$P = 2\pi \int_0^\infty r I dr, \quad r_L^2 = (2\pi/P) \int_0^\infty r^3 I dr, \quad (12)$$

где $I = \gamma^2 - 1$ – безразмерная интенсивность лазерного пучка. Зависимости r_L и r_{cav} от безразмерной мощности пучка P и от безразмерной амплитуды $a_0 = \sqrt{\gamma_0^2 - 1}$ лазерного пучка на оси, построенные с использованием формул (12), приве-

дены на рис. 1 и 2 соответственно. Черным кружкам соответствуют численные результаты, полученные с использованием модели [18] (вариант II), а ромбам и треугольникам отвечают варианты I и III, соответственно. На рисунках 1 и 2, и ниже в формулах (14) и (15), используется перенормированная величина мощности пучка $p = P/P_{min}$, где $P_{min} = P(a_0 \rightarrow 0) \approx 23, 41$, так что в размерных переменных мощность цилиндрического пучка дается формулой $P^{cyl} \approx 16.31(n_c/n_{e0})p$ [ГВт].

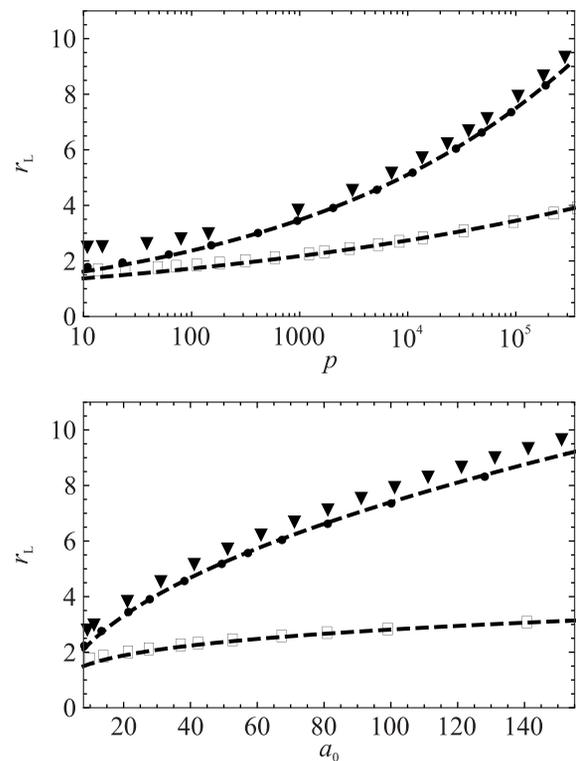


Рис. 1. Зависимости среднего радиуса лазерного пучка r_L от его полной мощности p (вверху) и от амплитуды лазерного поля на оси a_0 (внизу). Черные кружки соответствуют модели [18], ромбы – модели [15, 17, 7], а треугольники – модели [22]. Штриховые кривые отвечают формулам (14), (15)

В интересующем нас случае сильно релятивистского пучка определяющий вклад в величину полной мощности и r_L дает область полной кавитации. Это обстоятельство позволяет получить аналитические выражения для r_L и p через параметр ν и координату границы области кавитации. Используя решение (6) и ограничиваясь интегрированием только по области $0 \leq r \leq r_{cav}$ (на это указывает нижний индекс in), запишем вместо (12) следующие выражения

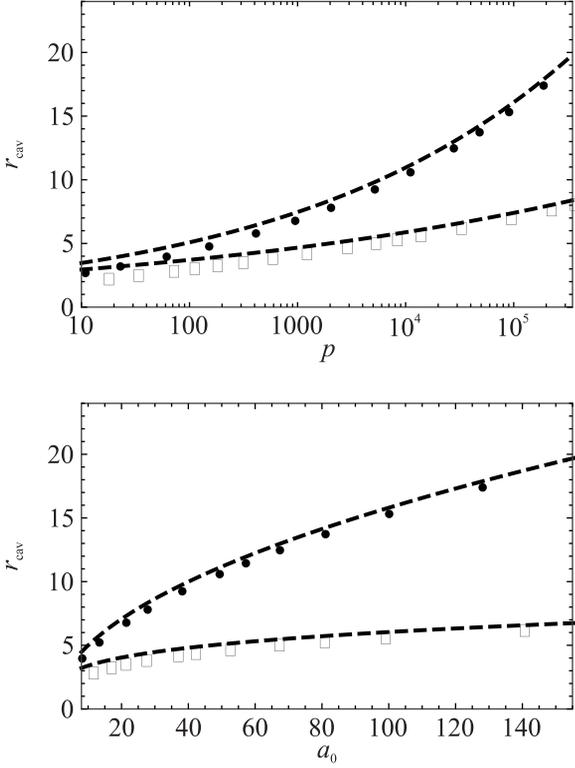


Рис. 2. Зависимости радиуса области кавитации (плазменного канала) r_{cav} от его полной мощности p (вверху) и от амплитуды лазерного поля на оси a_0 (внизу). Черные кружки соответствуют модели [18], ромбы – модели [15, 17, 7]. Штриховые кривые отвечают формулам (14), (15)

$$\begin{aligned}
 P_{\text{in}} &= \pi(\Gamma + 1)p_1, \quad r_{L,\text{in}}^2 = \frac{(\Gamma + 1)p_3}{2p_1}, \\
 p_1 &= (\xi_{\text{cav}}^2/2)(\gamma_{\text{cav}}^2 - 1) \left(1 + \frac{J_1^2(\xi_{\text{cav}})}{J_0^2(\xi_{\text{cav}})} \right), \quad (13) \\
 p_3 &= (\xi_{\text{cav}}^2/6)(\gamma_{\text{cav}}^2 - 1) \left[\xi_{\text{cav}}^2 \left(1 + \frac{J_1^2(\xi_{\text{cav}})}{J_0^2(\xi_{\text{cav}})} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{J_1(\xi_{\text{cav}})}{J_0(\xi_{\text{cav}})} \left(\xi_{\text{cav}} - \frac{J_1(\xi_{\text{cav}})}{J_0(\xi_{\text{cav}})} \right) \right].
 \end{aligned}$$

В пределе $a_0 \gg 1$ из этих аналитических выражений, с учетом (9)–(10), следуют простые асимптотические зависимости, коэффициенты в которых указаны с точностью до второго знака после запятой,

$$\text{Вариант I} \quad \begin{cases} r_L \approx 1.09p^{1/10}, & r_L \approx 0.89a_0^{1/4}, \\ r_{\text{cav}} \approx 2.34p^{1/10}, & r_{\text{cav}} \approx 1.91a_0^{1/4}, \\ a_{\text{cav}} \approx 0.94a_0^{1/2}, & r_{\text{cav}}/r_L \approx 2.14. \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{Вариант II} \quad \begin{cases} r_L \approx 1.1p^{1/6}, & r_L \approx 0.74a_0^{1/2}, \\ r_{\text{cav}} \approx 2.36p^{1/6}, & r_{\text{cav}} \approx 1.58a_0^{1/2}, \\ a_{\text{cav}} \approx 0.71a_0^{1/3}, & r_{\text{cav}}/r_L \approx 2.14. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь $a_{\text{cav}} = a(r_{\text{cav}})$ – значение безразмерной амплитуды лазерного поля на границе области кавитации для вариантов I и II, соответственно²⁾. Видно, что для варианта II характерна более плавная зависимость поля на границе области кавитации от амплитуды поля на оси пучка, $a_{\text{cav}} \sim a_0^{1/3}$, по сравнению с аналогичной зависимостью, $a_{\text{cav}} \sim a_0^{1/2}$, для варианта I. Из асимптотических формул (14) и (15) также следует, что отношение радиуса плазменной каверны и характерного радиуса лазерного пучка примерно одинаково для двух вариантов и составляет $r_{\text{cav}}/r_L \approx 2.14$. Как следует из приведенных выше формул, зависимость радиуса плазменной каверны от мощности сильно релятивистского пучка может получиться из наглядной оценки $p \sim a_0^2 r_{\text{cav}}^2$ (численный коэффициент пропорциональности в этой формуле для варианта II равен ≈ 0.84), в которой надо использовать связь a_0 с r_{cav} .

Сравнение приведенных на рис. 1, 2 зависимостей, полученных при численном моделировании, с штриховыми кривыми, построенными по асимптотическим формулам (14), (15), наглядно иллюстрирует существенное превышение полученных по модели [18] аналитических скейлингов для ширины светового пучка и ширины возникающего канала над соответствующими результатами работы [7, 21]. Заниженная величина ширины лазерно-плазменного волновода в [7, 21] является результатом некорректности использованной модели (вариант I), не сохраняющей число частиц, что преодолевается использованием модели Кима (вариант II). Приведенные скейлинги для характерной ширины каверны R ($R = r_{\text{cav}}c/\omega_p$) хорошо согласуются с результатами численных PIC расчетов, тогда как полученный ранее результат [7, 21] демонстрирует столь слабую зависимость $R(P)$, что ее вряд ли можно идентифицировать в реальном эксперименте. Обратим также внимание на то, что “грубая оценка”, полученная только при использовании нелинейности, основанной на релятивистском утяжелении массы электрона (вариант III) [24, 14], весьма неплохо, на уровне ошибки $\sim 15\%$, описывает зависимости радиуса плазменной каверны от амплитуды поля лазерного пучка. Как следует из рис. 1, 2, диапазон изменения мощности лазерного пучка в размерных переменных (в ТВт) лежит в пределах $(0.16 - 5 \times 10^3)(n_c/n_{e0})$ [ТВт]. При этом радиус лазерного пучка (в мкм) меняется в диа-

²⁾Формулы (13) пригодны для вычисления полной мощности и среднего радиуса пучка как в варианте II (с использованием (9) и (10)), так и в варианте I, однако в последнем случае связь Γ с γ_{cav} и ξ_{cav} будет иной, как было сказано выше.

пазоне $(0.32 - 1.6)\sqrt{n_c/n_{e0}}\lambda_0$ [мкм], где λ_0 (в мкм) – длина волны лазерного излучения.

Подводя итог, отметим, что в работе получены аналитические асимптотические формулы, характеризующие условие реализации РСЗ лазерного пучка в плазме в пределе $a_0 \gg 1$. Проанализированы различные математические модели, используемые для описания этого режима, и показано, что наилучшее согласование с результатами численного эксперимента достигается для модели НУШ с релятивистской нелинейностью, в которой сохраняется полный заряд электронов [18]. Разработанный теоретико-аналитический подход, учитывающий релятивистскую нелинейность массы электрона и электронную кавитацию в плазме, в частности, дает следующее выражение для радиуса плазменного канала при РСЗ (ср. (1))

$$R = 1.58 \frac{c}{\omega} \sqrt{a_0 \frac{n_c}{n_{e0}}}, \quad \text{где } a_0 \gg 1, \quad (16)$$

самосогласованного с амплитудой лазерного поля и плотностью плазмы. Хотя это выражение и подтверждает качественно ожидаемое из баланса дифракции и релятивистской нелинейности массы электрона волновое условие РСЗ [2, 6, 14, 23, 24], его реализация с учетом сильной кавитации до сих пор была не очевидна. Проведенное теоретическое доказательство восполняет этот пробел, описывает согласование R , a_0 и n_{e0} в количественной форме и позволяет обосновывать результаты численного моделирования. Согласно (16) и (15) для поперечного размера $D = 2R$ плазменного канала в физических переменных имеем

$$D [\text{мкм}] = 1.49\lambda_0 [\text{мкм}](n_c/n_{e0})^{(1/3)}(P [\text{ГВт}])^{(1/6)}.$$

Авторы благодарны А. В. Киму за полезные обсуждения и критические замечания, способствовавшие написанию этой работы.

Финансирование работы. Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики (проект “Физика высоких плотностей энергии. Этап 2023–2025”) и поддержано Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (в рамках соглашения # 075-15-2021-1361). В. Ф. Ковалев благодарен также за частичную поддержку Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания по теме # 122041100137-4.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. S. Gordienko and A. Pukhov, *Phys. Plasmas* **12**(4), 0431091 (2005).
2. W. Lu, M. Tzoufras, C. Joshi, F. S. Tsung, W. B. Mori, J. Vieira, R. A. Fonseca, and L. O. Silva, *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams* **10**(6), 061301 (2007).
3. P. E. Masson-Laborde, M. Z. Mo, A. Ali, S. Fourmaux, P. Lassonde, J. C. Kieffer, W. Rozmus, D. Teychenn, and R. Fedosejevs, *Phys. Plasmas* **21**, 1231131 (2014).
4. M. G. Lobok, A. V. Brantov, D. A. Gozhev, and V. Yu. Bychenkov, *Plasma Phys. Control. Fusion. Special Issue* **60**(8), 0840101 (2018).
5. K. Pöder, J. C. Wood, N. C. Lopes et al. (Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **132**, 195001 (2024).
6. M. G. Lobok, A. V. Brantov, and V. Yu. Bychenkov, *Phys. Plasmas* **26**(12), 123107 (2019).
7. А. Комашко, С. Мушер, А. Рубенчик, С. Турицын, М. Фейт, *Письма в ЖЭТФ* **62**(11), 849 (1995).
8. G. S. Sarkisov, V. Yu. Bychenkov, V. N. Novikov, V. T. Tikhonchuk, A. Maksimchuk, S.-Y. Chen, R. Wagner, G. Mourou, and D. Umstadter, *Phys. Rev. E* **59**(6), 7042 (1999).
9. S. P. D. Mangles, *Proceedings of the CAS-CERN Accelerator School: Plasma Wake Acceleration, Geneva, Switzerland, 23-29 November 2014*, ed. by B. Holzer, CERN-2016-001, CERN, Geneva (2016).
10. C. E. Clayton, J. E. Ralph, F. Albert et al. (Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **105**, 105003 (2010).
11. В. И. Таланов, *Изв. ВУЗов. Радиофизика* **7**(3), 564 (1964).
12. R. Y. Chiao, E. Garmire, and C. Townes, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 479 (1964).
13. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, *ЖЭТФ* **50**(6), 1537 (1966).
14. В. Ю. Быченков, В. Ф. Ковалев, *Изв. ВУЗов. Радиофизика* **63**(9–10), 825 (2020).
15. G.-Z. Sun, E. Ott, Y. C. Lee, and P. Guzdar, *Phys. Fluids* **30** 526 (1987).
16. T. Kurki-Suonio, P. J. Morrison, and T. Tajima, *Phys. Rev. A* **40**(6), 3230 (1989).
17. A. B. Borisov, A. V. Borovskiy, O. B. Shiryayev, V. V. Korobkin, A. M. Prokhorov, J. C. Solem, T. S. Luk, K. Boyer, and C. K. Rhodes, *Phys. Rev. A* **45**, 5830 (1992).
18. A. Kim, M. Tushentsov, F. Cattani, D. Anderson, and M. Lisak, *Phys. Rev. E* **65**, 036416 (2002).
19. F. Cattani, A. Kim, D. Anderson, and M. Lisak, *Phys. Rev. E* **64**, 016412 (2001).
20. M. D. Feit, A. M. Komashko, S. L. Musher, A. M. Rubenchik, and S. K. Turitsyn, *Phys. Rev. E* **57**, 7122 (1998).

21. A. B. Borisov, J. W. Longworth, K. Boyer, and C. K. Rhodes, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **95**, 7854 (1998).
22. S. Sen, M. A. Varshney, and D. Varshney, ISRN Optics. **2013**, 1 (2013); Art. ID 642617.
23. I. Kostyukov, A. Pukhov, and S. Kiselev, Phys. Plasmas **11**(11), 5256 (2004).
24. V. Yu. Bychenkov, M. G. Lobok, V. F. Kovalev, and A. V. Brantov, Plasma Phys. Control. Fusion **61**(12), 124004 (2019).