Письма в ЖЭТФ, том 120, вып. 6, с. 430 – 435

Обобщенная теорема Блоха и топология зонной структуры[1)]

Ю. Б. Кудасов[2)]

Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, 607188 Саров, Россия

Саровский физико-технический институт,
Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", 607190 Саров, Россия

Поступила в редакцию 16 июля 2024 г.
После переработки 9 августа 2024 г.
Принята к публикации 11 августа 2024 г.

В рамках одно- и двумерных моделей сильной связи обсуждаются дисперсионные зависимости в металле с геликоидальным соизмеримым магнитным порядком. Обобщенная теорема Блоха для трансляций с поворотом спиновой системы вместе с периодическими граничными условиями Борна–Кармана формирует многолистные дисперсионные кривые (поверхности). Доказано, что возникающая зонная структура является топологически нетривиальной, что может приводить к спиновой текстуре поверхности Ферми и быть причиной транспортных аномалий.

DOI: 10.31857/S0370274X24090184, EDN: HSTXXG

1. Введение. В последние десятилетия проводились интенсивные экспериментальные и теоретические исследования топологической зонной структуры [1–3]. Эти работы были сосредоточены в основном на изучении краевых состояний в топологических изоляторах и полуметаллах [2, 3]. К настоящему времени разработаны методики расчета топологических инвариантов и проведена детальная классификация топологических изоляторов и полуметаллов [1]. Краевые состояния обладают специфическими свойствами симметрии, что приводит к подавлению некоторых механизмов рассеяния и, следовательно, высокой подвижности носителей заряда [3].

Основным инструментов исследования топологии зонной структуры является векторный потенциал (связность) Берри [2] $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma} = -i\langle\psi_{\mathbf{k}\sigma}|\nabla_{\mathbf{k}}|\psi_{\mathbf{k}\sigma}\rangle$, где $\psi_{\mathbf{k}\sigma}$ – волновая функция электрона с волновым вектором $\mathbf{k}$ и спином σ. Эта величина характеризует "адиабатическое" изменение фазы волновой функции в зоне Бриллюэна. Однако недавно возникло предположение о том, что в геликоидальном магнитном поле может возникать зонная структура, которая, по-видимому, топологически нетривиальна, но при этом не связанная, по крайней мере, непосредственно с фазой волновой функции и потенциалом Берри [4, 5].

[1)]См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru

[2)]e-mail: kudasov@ntc.vniief.ru

Металлический делафоссит $PdCrO_2$ является одним из наиболее ярких примеров геликоидальных магнетиков, демонстрирующих аномальные транспортные свойства [6–8]. В этом соединении гексагональные проводящие слои палладия чередуются с диэлектрическими магнитными прослойками CrO_2 [9], в каждой из которых ионы хрома образуют 120° магнитный порядок [6]. Межслойное упорядочение довольно сложное, и всего структура содержит 18 магнитных подрешеток. Проводимость $PdCrO_2$ при комнатной температуре приближается к лучшим элементарным проводникам (примерно 16 % от проводимости меди) [10]. Причем при переходе в магнитоупорядоченное состояние при $T = 37.5$ K проводимость резко увеличивается, т.е. магнитный порядок стимулирует состояние с высокой проводимостью. В $PdCrO_2$ также наблюдается необычный аномальный эффект Холла при нулевой полной киральности магнитной структуры [10], невзаимный электронный транспорт [11], аномалии термоэдс в магнитном поле [12] и магнитосопротивления [13], а также формирование необычной ферми-жидкости под действием магнитных фрустраций [14]. В работах [15, 5] показано, что зонная структура в $PdCrO_2$ может иметь нетривиальный характер.

Движение электрона в геликоидальном магнитном поле и зонная структура металла с геликоидальным магнитным порядком изучается уже более полувека [4, 16, 17], в том числе с использованием теории спиновых пространственных групп

(СПГ)[18, 19]. Операция симметрии СПГ $\{\boldsymbol{\alpha}_s|\boldsymbol{\beta}|\mathbf{t}\}$ включает в себя как пространственные трансляцию $\mathbf{t}$ и поворот $\boldsymbol{\beta}$, так и вращение спинов $\boldsymbol{\alpha}_s$. Этот подход особенно полезен при отсутствии спин-орбитального взаимодействия. В системе с соизмеримым геликоидальным порядком можно доказать обобщенную теорему Блоха [20] для трансляций с поворотом спиной подсистемы $\{\boldsymbol{\alpha}|0|\mathbf{t}\}$.

Дисперсионные зависимости в геликоидальном магнетике (с геликоидальным внешним магнитным полем) обладают вырождением крамерсовского типа и симметрией аналогичной немагнитным системам со спин-орбитальным взаимодействием [5]:

$$\varepsilon_{\mathbf{k},\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle} = \varepsilon_{-\mathbf{k},-\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle}, \tag{1}$$

где $\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle \equiv \langle\psi_{\mathbf{k}}|\hat{\boldsymbol{\sigma}}|\psi_{\mathbf{k}}\rangle$, $|\psi_{\mathbf{k}}\rangle$ – волновая функция. Здесь спиновый индекс заменен средним значением, поскольку проекция спина в системе с неколлинеарным магнитным порядком не является хорошим квантовым числом. Дисперсия электронов в геликоидальных магнетиках также обладает рядом хорошо известных необычных свойств: бесщелевая зонная структура [16, 21] и непериодичность в пределах магнитной зоны Бриллюэна [4, 15] Недавно было предположено [4, 5], что дисперсионные кривые (поверхности) являются топологически нетривиальными. В данной работе показано, что такая зонная структура является следствием обобщенной теоремы Блоха с периодическим граничным условием, и доказана топологическая нетривиальность дисперсионной зависимости.

2. Обобщенная теорема Блоха и периодические граничные условия. Рассмотрим движение электрона в периодическом потенциале кристаллической решетки $U(\mathbf{r}+\mathbf{t}) = U(\mathbf{r})$, где $\mathbf{t}$ – вектор трансляции решетки, и геликоидальном магнитном поле $\mathbf{h}(\mathbf{r})$:

$$\hat{H} = -\nabla^2 + U(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{r})\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \tag{2}$$

где $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ – матрицы Паули. Магнитное поле предполагается периодическим и соизмеримым с кристаллической решеткой, т.е. $\hat{\mathbf{r}}_i\hat{\mathbf{t}}_i\,\mathbf{h}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}(\mathbf{r})$, где $\hat{\mathbf{t}}_i$ и $\hat{\mathbf{r}}_i$ – операторы трансляций на основной вектор решетки и поворота на угол $\alpha_i = 2\pi/N_i$ вокруг оси $\boldsymbol{z}_s$, N_i – натуральное число. Поскольку спин-орбитальное взаимодействие в системе отсутствует, спиновая система координат $(\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{y}_s, \boldsymbol{z}_s)$ может быть ориентирована произвольным образом относительно пространственной $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$. Заметим также, что гамильтониан (2) удовлетворяет условиям теоремы 1 или 2 работы [5] в зависимости от того, четное или нечетное число N_i.

Гамильтониан (2) инвариантен относительно обобщенных трансляций $\hat{\mathbf{r}}_i\hat{\mathbf{t}}_i$, соответствующих оператору СПГ $\{\boldsymbol{\alpha}_i|0|\mathbf{t}_i\}$. Этот оператор образует циклическую группу изоморфную группе обычных трансляций с неприводимым представлением $D_{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{r}}_i\hat{\mathbf{t}}_i) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{t}_i)$. Тогда собственная волновая функция гамильтониана (2) принимает вид

$$\psi_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})\hat{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \tag{3}$$

где спинор $\hat{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ обладает обобщенной периодичностью

$$\hat{\mathbf{r}}_i\hat{\mathbf{t}}_i\hat{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \hat{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \tag{4}$$

и вектор $\mathbf{k}$ определен в кристаллографической зоне Бриллюэна. Это утверждение и составляет обобщенную теорему Блоха для геликоидальных магнитных систем [20].

Теперь можно записать уравнение для спинорной функции $\hat{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$:

$$[(-i\nabla + \mathbf{k})^2 + U(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{r})\hat{\boldsymbol{\sigma}}]\hat{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_{\mathbf{k}}\hat{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}). \tag{5}$$

Из выражения (5) видно, что зависимость $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$ непрерывна в *кристаллографической зоне Бриллюэна.*

Для описания дисперсионных зависимостей нам необходимо также установить периодические граничные условия, которые можно записать как

$$\psi_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r} + N_i\mathbf{T}_i) = \psi_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{r}), \tag{6}$$

где $\mathbf{T}_i$ – основной вектор магнитной решетки, который можно определить через кристаллографические трансляции $\mathbf{T}_i = \sum_{ij} n_{ij}\mathbf{t}_j$, где n_{ij} – целые числа. Магнитная ячейка, построенная на векторах $\mathbf{T}_i$, имеет объем V_m, кратный объему кристаллографической ячейки V_c: $N_m = V_m/V_c$.

Отсюда следует, что разрешенные значения блоховских волновых векторов лежат в *магнитной зоне Бриллюэна*, которая имеет объем в N_c раз меньше кристаллографической. Таким образом, дисперсионную зависимость $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$ следует привести к магнитной зоне Бриллюэна, в результате чего возникает зонная структура из N_c ветвей, которая обладает следующими свойствами. (i) Она должна быть бесщелевой, поскольку исходная дисперсия $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$ непрерывна в исходной кристаллографической зоне Бриллюэна. (ii) Отдельная ветвь в общем случае является непериодической в магнитной зоне Бриллюэна. Ниже рассмотрены точно решаемые примеры таких систем и показано, что такая зонная структура топологически нетривиальна.

3. Одномерная модель сильной связи. Простейшей моделью соизмеримой геликоидальной магнитной структуры является модель цепочки со 120° магнитным полем на узлах решетки:

$$\hat{H}_{3sl} = -\sum_{<i,j>,\sigma}\left(\hat{a}^{\dagger}_{i\sigma}\hat{a}_{j\sigma} + \text{h.c.}\right) - \sum_{i,\sigma,\sigma'}\left(\hat{a}^{\dagger}_{i\sigma}\hat{\mathbf{h}}(i)\hat{a}_{i\sigma'}\right), \tag{7}$$

где $\hat{a}^{\dagger}_{i\sigma}(\hat{a}_{i\sigma})$ – оператор рождения (уничтожения) электрона на i-м узле решетки с проекцией спина на ось z, равной $\sigma = \pm 1/2$. Цепочка разбита на 3 эквивалентные подрешетки (см. рис. 1a), и магнитное поле на i-м узле принимает одно из 3 возможных значений в зависимости от номера подрешетки: $\hat{\mathbf{h}}_1 = h_0\hat{\sigma}_x$, $\hat{\mathbf{h}}_2 = h_0(-\hat{\sigma}_x + \sqrt{3}\hat{\sigma}_y)/2$, $\hat{\mathbf{h}}_3 = h_0(-\hat{\sigma}_x - \sqrt{3}\hat{\sigma}_y)/2$.

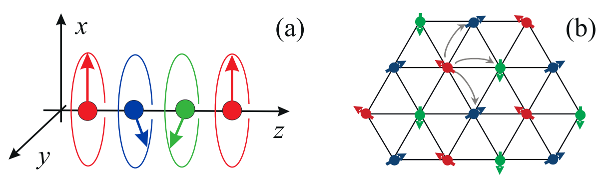

Рис. 1. (Цветной онлайн) Модель сильной связи с 120° магнитным полем на (a) одномерной цепочке и (b) гексагональной решетке

Гамильтониан (7) легко приводится к диагональному виду [5], и полученные дисперсионные кривые показаны на рис. 2. Заметим, что всегда можно определить однозначно дисперсионную кривую таким образом, чтобы собственные значения и вектора изменялись непрерывно при изменении волнового вектора $\mathbf{k}$. Жирной линией выделена нижняя дисперсионная кривая. Видно, что она непериодична в пределах магнитной зоны Бриллюэна ($k \in [-\pi/3, \pi/3]$), но является периодической функцией в расширенной зона Бриллюэна ($k \in [-\pi, \pi]$), соответствующей кристаллографической решетке. Поскольку разрешенные волновые вектора лежат в магнитной зоне периодическая функция трехкратно "сложена" в ней, и в целом зонная структура оказывается периодической в магнитной зоне Бриллюэна.

Для обсуждения топологических свойств удобно, используя периодичность волновой функции по $\mathbf{k}$, представить дисперсионную кривую как линию на цилиндре [5], т.е. в пространстве $S^1 \times E^1$, где S^1 и E^1 – стандартные единичная окружность и единичный интервал. Простая дисперсионная кривая (периодическая в магнитной зоне Бриллюэна) гомеоморфна S^1. Кривая же, которая показана жирной линией на рис. 2, охватывает цилиндр N_m раз [5]. Она

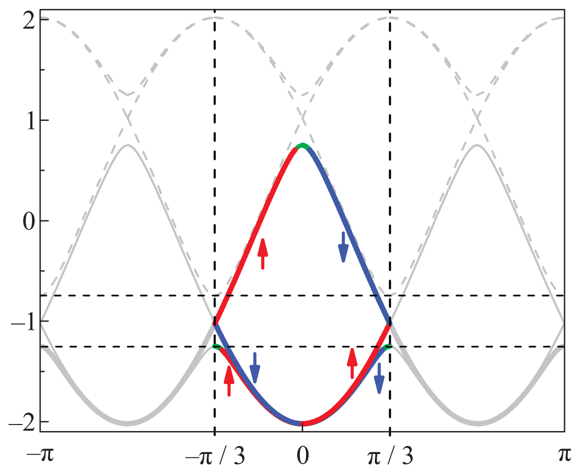

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зонная структура одномерной модели при $h_0 = 0.25$. Нижняя ветвь выделена жирной линией. Состояния с преимущественной проекцией спина вдоль оси $\boldsymbol{z}_s$ и в противоположном направлении выделены красным и синим цветом, а смешанные спиновые состояния ($|\langle\hat{\sigma}_z\rangle| < 1/2$) – зеленым

имеет самопересечения. Однако, если рассматривать дисперсионную кривую как замкнутую линию в полном пространстве состояний, например, $S^1 \times S^n$, где $n > 1$ – число независимых вещественных параметров (см. дополнительные материалы), то самопересечения будут отсутствовать, поскольку собственные вектора гамильтониана (7) при заданном $\mathbf{k}$ должны быть ортогональны, т.е. они не могут иметь одинаковые наборы параметров. С точки зрения топологии получившаяся замкнутая линия является узлом.

Фундаментальная группа пространства состояний $\pi_1(S^1 \times S^n)$ легко вычисляется (здесь и далее мы опускаем начальную точку пути в обозначении группы, поскольку она не существенна), поскольку фундаментальная группа произведения пространств является прямым произведением групп, соответствующим этим пространствам, а $\pi_1(S^n)$ при $n > 1$ – единичная группа: $\pi_1(S^1 \times S^n) \sim \pi_1(S^1)$. Таким образом, мы получили фундаментальную группу цилиндра $\pi_1(S^1)$ [22], и все возможные замкнутые линии (пути) в пространстве состояний можно разделить на классы в соответствии с полным числом витков N_m (знак определяет направление обхода цилиндра). Эти классы очевидно гомотопически не эквивалентны, т.е. не существует непрерывных преобразований пути из одного класса в путь другого класса. Это означает, что в пространстве состояний $S^1 \times S^n$ узел, соответствующий жирной линии на рис. 2, является топологически нетривиальным, а $N_m = 3$ – топологический инвариант.

Теперь можно оценить устойчивость топологической структуры. Вид исходной дисперсии электронов в модели без магнитного поля не влияет на топологию зонной структуры. Например, можно сравнить результаты, полученные выше, с моделью почти невзаимодействующих электронов [4, 5]. Если наложить однородное магнитное поле перпендикулярно спиновой плоскости, т.е. вдоль оси $\boldsymbol{z}_s$, то условия теоремы 2 работы [5] будет нарушено, и, следовательно, спиновая симметрия и псевдо-крамерсовское вырождение исчезнут. С другой стороны, аргументы, которые были использованы для описания топологической структуры, сохраняются: по-прежнему выполняется обобщенная теорема Блоха для сдвига с поворотом спинов. Таким образом, нетривиальная топология зонной структуры в этом случае сохранится (см. дополнительные материалы). Если наложить магнитное поле в спиновой плоскости, то симметрия относительно сдвига с поворотом спинов нарушается, и топология зон становится тривиальной.

4. Двумерная модель сильной связи на гексагональной решетке. Формально двумерная модель геликоидальной структуры описывается тем же гамильтонианом (7), что и одномерная модель, только ближайшие соседи и магнитные подрешетки определяются теперь, как показано на рис. 1b. Поэтому приведение гамильтониана к диагональному виду выполняется аналогичным образом.

Зонная структура двумерной модели в магнитной зоне Бриллюэна показана на рис. 3. Дисперсионные поверхности состоят из двух групп по три листа. Рассмотрим нижнюю группу на рис. 3. Каждый из отдельных листов в группе непериодичен в магнитной зоне Бриллюэна. Они переходят друг в друга на границах зоны (см. дополнительные материалы).

Для исследования топологии поверхности удобно перейти к ромбической магнитной зоне Бриллюэна. Склейка противоположных сторон ромба приводит нас к представлению зоны Бриллюэна на торе [2] $S^1 \times S^1$ (см. рис. 4a). Полное пространство состояний имеет вид $S^1 \times S^1 \times S^n$ $(n > 1)$.

Для выяснения топологии дисперсионной поверхности построим ее фундаментальную группу [23, 24]. Рассмотрим сначала простую дисперсионную поверхность, которая периодична в магнитной зоне Бриллюэна и гомеоморфна тору $S^1 \times S^1$. На рисунке 4a показана ее развертка. Поскольку в пределах магнитной зоны Бриллюэна любой путь в **k**-пространстве может быть стянут в точку, начальная точка пути несущественна, и в дальнейшем мы всегда будем предполагать, что начальная и конечная точка пути находятся в центре зоны. Если путь пересекает одну вертикальную (наклонную) или одну горизонтальную границу, то это будет элементарный ненулевой путь (который нельзя стянуть в точку) P или Q соответственно. Они охватывают тор одним из двух способов, как показано на рис. 4a. Тогда произвольный путь можно представить в виде произведения $P^n Q^m$, где n и m – произвольные целые числа, что и определяет фундаментальную группу тора [22].

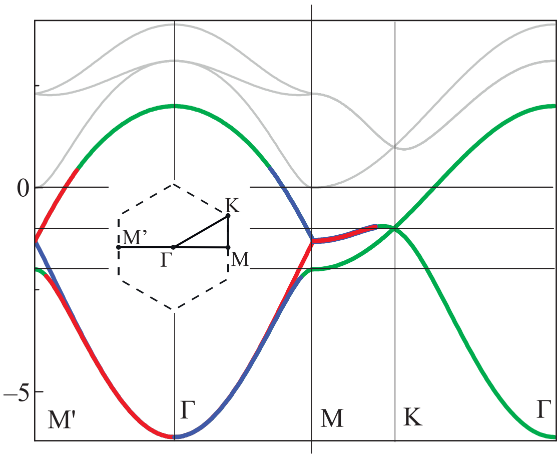

Рис. 3. (Цветной онлайн) Зонная структура двумерной модели сильной связи. Спиновые состояния выделены цветом аналогично рис. 2

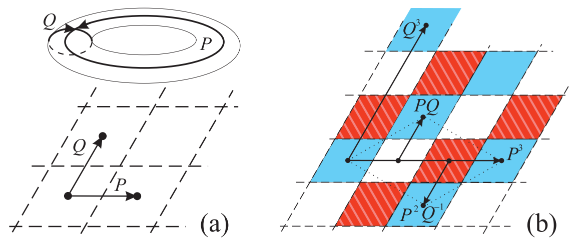

Рис. 4. (Цветной онлайн) Топология зонной структуры в двумерной модели: (a) – замкнутые пути на простой дисперсионной поверхности на плоской развертке и на торе; (b) – замкнутые пути для трехлистовой поверхности, где цветом показаны неэквивалентные листы. Пунктирные линии – границы ромбической зоне Бриллюэна

Перейдем теперь к изучению многолистовой дисперсионной поверхности. С точки зрения топологии, она является накрывающим пространством по отношению к простой поверхности. На рисунке 4b три листа двумерной модели, рассмотренной выше, показаны на развертке различными цветами. Видно, что пути P или Q не являются замкнутыми, поскольку начальная и конечная точки лежат на различных листах. Замкнутыми путями будут являться, например, пути PQ, P^2Q^{-1}, P^3 и Q^3. Однако после переобозначения $A = PQ$, $B = P^2Q^{-1}$ оказывается, что любой замкнутый путь может быть представлен как $A^n B^m$, т.е. группа путей многолистовой дисперсионной поверхности опять изоморфна группе тора. Интересно отметить, что, если использовать пути A и B для построения элементарной ячейки в **k**-пространстве мы получим кристаллографическую зону Бриллюэна (точечные линии на рис. 4b).

Фундаментальная группа всего пространства состояний определяется аналогично одномерной модели и может быть сведена к фундаментальной группе тора $\pi_1(S^1 \times S^1 \times S^n) \sim \pi_1(S^1 \times S^1)$. Как видно из рассуждений выше, оба вида дисперсионных поверхностей – это вложения тора в пространство состояний $S^1 \times S^1 \times S^n$. Однако на простой дисперсионной поверхности существуют замкнутые пути P или Q, а для многолистовой поверхности они отсутствуют. Из этого следует, что эти вложения (поверхности) неизотопны друг другу, т.е. не существует непрерывной деформации пространства (гомотопии), связывающей их друг с другом [24, 25]. Таким образом, многолистовая поверхность топологически неэквивалентна простой дисперсионной поверхности, и топологическим инвариантом здесь выступает число листов накрытия ($N_m = 3$), которое равно отношению площади кристаллографической и магнитной зон Бриллюэна. Так же, как и в одномерной модели, зонная структура становится тривиальной при приложении однородного магнитного поля в плоскости геликоида (см. дополнительные материалы).

5. Обсуждение и заключение. В теории топологических изоляторов изучается структура векторного поля $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}$ на компактной поверхности, например, на торе для двумерных систем. В настоящей работе мы показываем, что эти поверхности сами по себе могут быть топологически неэквиваленты, что приводит к новому классу топологических зонных структур. Вопрос о их связи с традиционной классификацией [3] заслуживает отдельного исследования.

Ранее отмечалось, что в одно- и двумерной структурах с геликоидальным магнитным полем могут возникнуть особенностям транспортных свойств [4, 15]. В частности, если в одномерной модели уровень Ферми располагается в области между горизонтальными пунктирными линиями на рис. 2, то рассеяние назад без переворота спина будет запрещено. В двумерной модели, если уровень Ферми (штрихпунктирная линия) лежит между горизонтальными линиями, рассеяние назад без переворота спина и электрон-фононное рассеяние с перебросом будут сильно подавлены [4]. Отметим, что зонная структура, отвечающая обоим случаям возможна только для нетривиальной топологии зон. Например, в верхней части диапазонов, ограниченных горизонтальными линиями на рис. 2 и 3, единственная ветвь пересекает уровень Ферми, но при этом она имеет различные спиновые состояния на противоположных границах зоны Бриллюэна, а поверхность Ферми имеет спиновую текстуру [15, 5]. При выходе уровня из этого диапазона, межзонное рассеяние маскирует эффекты подавления рассеяния. Отметим, что зонная структура $PdCrO_2$ как раз соответствует двумерной модели с подавлением рассеяния: в нем единственная зона пересекает уровень Ферми.

Финансирование работы. Работа выполнена в рамках Научной программы Национального центра физики и математики по направлению # 7 “Исследование в сильных и сверхсильных магнитных полях”.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. A. Bansil, H. Lin, and T. Das, Rev. Mod. Phys. **88**, 021004 (2016).
2. G. Tkachev, *Topological Insulators, The Physics of Spin Helicity in Quantum Transport*, Taylor & Francis Group, LLC, Boca Raton, Fl (2016).
3. M. Z. Hasan and C. L. Kane, Rev. Mod. Phys. **82**, 3045 (2010).
4. Ю. Б. Кудасов, Письма в ЖЭТФ **113**, 168 (2021).
5. Y. B. Kudasov, Phys. Rev. B **109**, L140402 (2024).
6. H. Takatsu, G. Nenert, H. Kadowaki, H. Yoshizawa, M. Enderle, S. Yonezawa, Y. Maeno, J. Kim, N. Tsuji, M. Takata, Y. Zhao, M. Green, and C. Broholm, Phys. Rev. B **89**, 104408 (2014).
7. D. Billington, D. Ernsting, T. E. Millichamp, C. Lester, S. B. Dugdale, D. Kersh, J. A. Duffy, S. R. Giblin, J. W. Taylor, P. Manuel, D. D. Khalyavin, and H. Takatsu, Sci. Rep. **5**, 12428 (2015).
8. A. P. Mackenzie, Rep. Prog. Phys. **80**, 032501 (2017).
9. F. Lechermann Phys. Rev. Mater. **2**, 085004 (2018).
10. H. Takatsu, S. Yonezawa, S. Fujimoto, and Y. Maeno, Phys. Rev. Lett. **105**, 13720 (2010).
11. M. Akaike, Y. Nii, H. Masuda, and Y. Onose, Phys. Rev. B **103**, 184428 (2021).
12. S. Arsenijević, J. M. Ok, P. Robinson, S. Ghannadzadeh, M. I. Katsnelson, J. S. Kim, and N. E. Hussey, Phys. Rev. Lett. **116**, 087202 (2016).
13. S. Ghannadzadeh, S. Licciardello, S. Arsenijević, P. Robinson, H. Takatsu, M. I. Katsnelson, and N. E. Hussey, Nature Commun. **8**, 15001 (2017).
14. E. V. Komleva, V. Yu. Irkhin, I. V. Solovyev, M. I. Katsnelson, and S. V. Streltsov, Phys. Rev. B **102**, 174438 (2020).
15. Ю. Б. Кудасов, ФТТ **65**, 937 (2023).
16. I. E. Dzyaloshinskii, JETP **20**, 223 (1965).

17. M. Calvo, Phys. Rev. B **19**, 5507 (1979).
18. W. Brinkman and R. J. Elliott, Proc. Roy. Soc. A **294**, 343 (1966).
19. P. Liu, J. Li, J. Han, X. Wan, and Q. Liu, Rhys. Rev. X **12**, 021016 (2022).
20. L. M. Sandratskii, J. Phys. Condens. Matter **3**, 8565 (1991).
21. M. Calvo, Phys. Rev. B **18**, 5073 (1978).
22. А. И. Мальцев, *Группы и другие алгебраические системы*, в кн. *Математика, ее содержание, методы и значение*, под. ред. А. Д. Александрова, А. Н. Колмогорова, М. А. Лаврентьева, Изд. Академии наук СССР, М. (1956), т. 3, с. 248.
23. У. Масси, Дж. Столлингс, *Алгебраическая топология. Введение*, Мир, М. (1977).
24. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Эдиториал УРСС, М. (1998), т. 2.
25. S. Kalajdzievski, *An illustrated introduction to topology and homotopy,* Taylor & Francis, Boca Raton (2015).