

# Геометрическая фаза как основа квантовой акселерометрии

А. М. Ростом, В. А. Томили<sup>1)</sup>, Л. В. Ильичёв

*Институт автоматки и электрометрии Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия*

*Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия*

*Институт лазерной физики Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 10 июля 2024 г.

После переработки 29 августа 2024 г.

Принята к публикации 30 августа 2024 г.

Предложена концептуальная модель перспективного квантового акселерометра на основе двухмодового атомарного конденсата Бозе–Эйнштейна. Ускорение порождает специфическую разницу геометрических фаз между модами конденсата, сдвигающую картину интерференции волн материи. Моды имеют конфигурации колец, в плоскости которых лежит вектор измеряемого ускорения. Однородность потенциалов кольцевых конфигураций нарушена дополнительными локализованными потенциалами-дефектами. При надлежащем расположении и структуре дефектов в результате вариации их параметров волновые функции мод конденсата приобретают геометрические фазы, различающиеся при наличии ускорения. Вычисления, проведенные для кольцевых конфигураций конденсата атомов  $^{87}\text{Rb}$  радиуса  $0.25\text{ мкм}$ , показывают, что предлагаемая схема способна регистрировать микрогравитацию порядка  $10^{-6} \div 10^{-7}g$ .

DOI: 10.31857/S0370274X24100124, EDN: QHHZOG

**1. Введение.** Прецизионные измерения ускорения свободного падения играют важную роль как в прикладных задачах геодезии и навигации [1–3], так и в фундаментальных исследованиях. Среди последних стоит отметить исследования, посвященные проверке принципа эквивалентности в общей теории относительности [4]. В связи с этим весьма актуально создание высокочувствительных инерциальных датчиков – гравиметров или акселерометров. Перспективным подходом для решения этой задачи является использование интерференции волн материи. Подобные устройства уже превзошли классические гравиметры в точности измерений. На их основе предложены эксперименты по проверке соотношения неопределенности на планковских масштабах [5] и построению моделей квантовой гравитации [6]. Принцип действия атомных гравиметров основан на регистрации интерференции от свободно падающих атомов при помощи рамзеевской интерферометрии [7]. С их помощью были проведены прецизионные измерения ускорения свободного падения Земли с относительной точностью, превышающей  $10^{-12}$  [8, 9].

Близкими родственниками гравиметров является другая разновидность инерциальных датчиков – гироскопы, способные измерять угловую скорость (или

ускорение) вращения системы отсчета устройства. Они также могут быть реализованы с использованием принципов интерференции волн материи. Весьма актуальными являются исследования по построению квантовых гироскопов на основе атомных интерферометров [10–12]. Экспериментально продемонстрированные результаты уже сравнимы и даже превышают по точности классические гироскопы [13, 14]. Большинство таких устройств основано на измерении оптического аналога фазы Саньяка [15–17]. Однако в [18] была предложена схема, основанная на измерении разницы специфических геометрических фаз двух локализаций атомарного бозе-конденсата, приобретаемых в результате варьирования параметров удерживающего потенциала. Главным требованием являлась чувствительность пространственных конфигураций мод конденсата к вращению его системы отсчета. Мы покажем, что данная схема может быть модифицирована для измерений линейного ускорения системы отсчета конденсата.

Следующие соображения иллюстрируют общую идею использования геометрической фазы в атомарном конденсате Бозе–Эйнштейна для регистрации неинерциальности его системы отсчета. Рассмотрим конденсат, состоящий из пространственных мод 1 и 2. Для простоты полное число частиц  $N$  в конденсате предполагается фиксированным. Вектор состояния конденсата в фокковских базисах обеих мод

<sup>1)</sup>e-mail: 8342tomilin@mail.ru

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^N f_n |n\rangle_1 \otimes |N-n\rangle_2 \quad (1)$$

задается амплитудами вероятности  $f_n$ , которые определяют картину интерференции частиц из разных мод. Предполагается, что конфигурации мод делают состояние конденсата чувствительным к неинерциальности его системы отсчета. В результате циклической вариации параметров потенциалов, задающих конфигурации мод, их волновые функции приобретают геометрические фазы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  [19]. Обеспечив различие восприимчивостей модовых конфигураций к неинерциальности движения, эти фазы могут быть сделаны разными, что приводит к нетривиальному преобразованию состояния конденсата:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N f_n |n\rangle_1 \otimes |N-n\rangle_2 \mapsto \\ & \mapsto \sum_{n=0}^N f_n e^{in\theta_1} |n\rangle_1 \otimes e^{i(N-n)\theta_2} |N-n\rangle_2, \end{aligned} \quad (2)$$

т.е.  $f_n \mapsto f_n e^{in(\theta_1 - \theta_2)}$ . Разница фаз  $\theta_1 - \theta_2$  может быть измерена по сдвигу картины интерференции атомов из разных мод. Целесообразно подходящим выбором конфигураций мод обеспечить ненулевую разницу фаз только в присутствии ускорения.

Целью работы является построение модели акселерометра, основанного на измерении разности геометрических фаз мод атомарного конденсата. В разделе 2 рассмотрена пространственная конфигурация мод, пригодная для решения этой задачи. В разделе 3 приведены численные результаты, иллюстрирующие возможности акселерометра.

**2. Модель.** Рассмотрим модель двухмодового атомарного конденсата<sup>2)</sup>, состоящего из частиц массы  $m$ . Каждая мода имеет тороидальную пространственную конфигурацию, с внутренним радиусом много меньше внешнего, который мы будем обозначать  $R$ . Хорошим начальным приближением для описания такой конфигурации является одномерное кольцо, положение частиц на котором описывается угловой координатой  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Кольца ориентированы так, что вектор ускорения  $\mathbf{g}$  системы отсчета конденсата лежит в плоскости каждого кольца (см. рис. 1). От направления этого вектора отсчитываются угловые координаты. В таком виде задача эквивалентна задаче о квантовом маятнике [20, 21]. Стационарное уравнение Шредингера для одночастичной

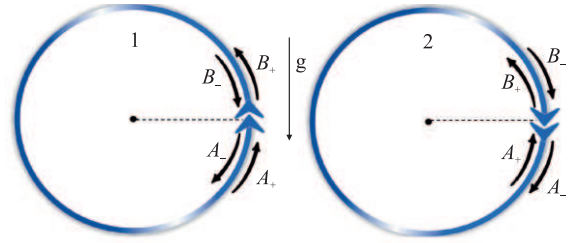


Рис. 1. (Цветной онлайн) Принципиальная схема акселерометра. Потенциальные дефекты на кольцевых модах 1 и 2 отмечены стрелками, направление стрелок определяет ориентацию кольца

волновой функции конденсата в безразмерных переменных оказывается уравнением Матье

$$\frac{d^2}{dz^2} \Psi(z) + (\kappa^2 - 2q \cdot \cos 2z) \Psi(z) = 0, \quad (3)$$

где  $z = 2\varphi$  – новая угловая переменная,  $\kappa^2 = 8mR^2 \times (E - mgR)/\hbar^2$  – безразмерная “кинетическая энергия”,  $q = 4m^2 R^3 g/\hbar^2$  – безразмерная эффективная глубина потенциала, создаваемого ускорением.

Для реализации изложенной во Введении идеи акселерометра необходима различная реакция мод конденсата на ускорение. Для этого, как показано на рис. 1, обе кольцевые структуры нарушены на некоторых участках дополнительными потенциалами, именуемыми дефектами. Дефекты расположены так, что вектора, направленные к ним из центра каждого кольца, ортогональны вектору ускорения. Будем считать в каждой получившейся паре вектор ускорения первым (он одинаковый в обеих парах), а вектора к дефектам – вторыми. Если при этом дефекты способны задать ориентации на кольцах (направления их обходов), с каждой модой оказывается связанной ортогональная тройка векторов. Третьи вектора для каждого кольца нормальны их плоскостям и определяются известным образом из направлений обходов. Из рисунка 1 видно, что одна из троек правая, а другая – левая. Это обстоятельство обеспечивает требуемое различие реакций мод на ускорение. Описание дефектов с помощью трансфер-матриц было использовано в моделях квантовых гироскопов [18, 22] и оказалось очень удобным в предположении, что дефект локализован в одной точке кольца. Уравнение (3) справедливо при этом на всем кольце, кроме места расположения дефекта. Описывающая его трансфер-матрица  $\mathcal{M}$  связывает амплитуды волн материи по разные стороны дефекта и принадлежит группе унитарных унимодулярных матриц [23]:

<sup>2)</sup> Взаимодействие в конденсате не является существенным для нашей задачи, поэтому для простоты будем его исключать.

$$\begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} \doteq \mathcal{M} \cdot \begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix},$$

$$|u|^2 - |v|^2 = 1. \quad (4)$$

Здесь черта над символом означает комплексное сопряжение. Дополнительная связь между амплитудами  $A_{\pm}, B_{\pm}$  может быть найдена из следующих соображений. Для определенности рассматривается случай, когда дефект расположен в точке  $z = \pi/4$ . По определению, решение уравнения (3) в нижней (относительно рис. 1) окрестности барьера имеет вид

$$A_+ e^{i\kappa(z+\pi/4)} + A_- e^{-i\kappa(z+\pi/4)}. \quad (5)$$

Решение в верхней окрестности, с учетом периодичности кольца

$$B_+ e^{i\kappa(z-3\pi/4)} + B_- e^{-i\kappa(z-3\pi/4)}. \quad (6)$$

С другой стороны, в самом месте расположения барьера эти решения и их производные должны совпадать с истинным решением уравнения (3):

$$\begin{aligned} A_+ + A_- &= \Psi(-\pi/4), \\ B_+ + B_- &= \Psi(3\pi/4), \\ i\kappa(A_+ - A_-) &= \Psi'(-\pi/4), \\ i\kappa(B_+ - B_-) &= \Psi'(3\pi/4). \end{aligned} \quad (7)$$

Общее решение уравнения (3) может быть представлено в виде

$$\Psi(z) = \psi_c \cdot ce(z) + \psi_s \cdot se(z), \quad (8)$$

где  $ce(z)$  и  $se(z)$  – четная и нечетная функции Матье соответственно [24]. Подстановка этого решения в (7) и использование соотношения (4) приводит к однородной системе линейных уравнений на коэффициенты  $\psi_{c,s}$ . Условие ее совместности имеет вид

$$\begin{aligned} &\kappa^2 \cdot (u + v - \bar{u} - \bar{v}) \times \\ &\left[ ce(3\pi/4) \cdot se(-\pi/4) - ce(-\pi/4) \cdot se(3\pi/4) \right] + \\ &\quad (u - v - \bar{u} + \bar{v}) \times \\ &\left[ ce'(3\pi/4) \cdot se'(-\pi/4) - ce'(-\pi/4) \cdot se'(3\pi/4) \right] = \\ &i\kappa \cdot \left[ 2 \left( ce(3\pi/4) \cdot se'(3\pi/4) - ce'(3\pi/4) \cdot se(3\pi/4) \right) + \right. \\ &\quad \left. ce(-\pi/4) \cdot se'(-\pi/4) - ce'(-\pi/4) \cdot se(-\pi/4) \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(u + v + \bar{u} + \bar{v}) \times \\ &\left( ce(3\pi/4) \cdot se'(-\pi/4) - ce'(-\pi/4) \cdot se(3\pi/4) \right) + \\ &\quad (u - v + \bar{u} - \bar{v}) \times \\ &\left( ce'(3\pi/4) \cdot se(-\pi/4) - ce(-\pi/4) \cdot se'(3\pi/4) \right) \Big]. \quad (9) \end{aligned}$$

Функции Матье также зависят от параметров  $\kappa$  и  $q$ , входящих в (3). При заданном  $q$  выражение (9) является неявным уравнением на параметр  $\kappa$ , т.е. определяет энергетический спектр моды.

Потенциальный дефект характеризуется трансфер-матрицей, которая в свою очередь зависит от параметров  $u$  и  $v$ . Задания взаимно противоположных ориентаций колец можно достигнуть, если представить трансфер-матрицы дефектов в виде произведения двух различных более простых трансфер-матриц<sup>3)</sup>, взятых в прямом и обратном порядке:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & i \sinh(\eta) \\ i \sinh(\eta) & \cosh(\eta) \end{pmatrix}, \\ \mathcal{M}_2 &= \begin{pmatrix} \cosh(\eta) & i \sinh(\eta) \\ i \sinh(\eta) & \cosh(\eta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Одна из этих матриц соответствует изменению амплитуды, а другая – изменению фазы прошедшей и отраженной волн. Пространство параметров трансфер-матриц дефектов в нашей модели оказывается цилиндром бесконечной длины.

Вариация параметров дефекта (достаточно медленная, чтобы не вызвать переходы между стационарными состояниями) по некоторому замкнутому контуру приводит к появлению у состояния системы геометрической фазы. В качестве такого контура выберем циклическое изменение  $\alpha$  от 0 до  $2\pi$  при фиксированном  $\eta$  (см. выше), т.е. поперечное сечение бесконечного цилиндра. Тогда эта дополнительная геометрическая фаза дается следующим выражением [19]:

$$\theta_g = \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\langle \Psi_\alpha | \frac{\partial}{\partial \alpha} \Psi_\alpha \rangle - \langle \frac{\partial}{\partial \alpha} \Psi_\alpha | \Psi_\alpha \rangle}{\langle \Psi_\alpha | \Psi_\alpha \rangle} d\alpha, \quad (11)$$

где  $\Psi_\alpha$  – волновая функция стационарного состоя-

<sup>3)</sup> Можно показать, что любая трансфер-матрица может быть представлена в виде произведения двух “элементарных” трансфер-матриц, каждая из которых относится к одному из трех типов [23].

ния моды, вычисленная при данном значении  $\alpha$ , а скалярные произведения вычисляются по формуле

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int_0^\pi \Psi^*(z) \Phi(z) dz. \quad (12)$$

Отметим, что форма записи (11) инвариантна относительно нормировки волновой функции. Интерес представляет разность  $\Delta\theta_g \doteq \theta_g^{(1)} - \theta_g^{(2)}$  геометрических фаз, приобретаемых модами конденсата при *одинаковой* вариации *противоположно* ориентированных дефектов, как функция параметра  $q$ .

Из формы выражения (11) ясно, что для того, чтобы геометрическая фаза была ненулевой, функция  $\Psi_\alpha$  должна быть комплекснозначной. Однако уравнение Шредингера (3) имеет лишь действительные коэффициенты. Действительными являются и функции Матье  $ce(z)$  и  $se(z)$ . Значит комплексными должны быть амплитуды  $\psi_{c,s}$ . Таким образом, единственной возможностью добиться ненулевой геометрической фазы является использование потенциального дефекта с комплекснозначной трансфер-матрицей. Этим и объясняется выбор элементарных составляющих дефекта в выражении (10).

Отдельного внимания заслуживает обсуждение решений уравнения (3). Литература, посвященная применениям функций Матье к физическим задачам, как правило, ограничивается рассмотрением  $2\pi$ -периодических по угловой переменной решений. Это условие при заданном значении  $q$  дает бесконечный счетный набор значений  $\kappa$  и таким образом определяет уровни энергии системы (как, например, в задаче о квантовом маятнике). Рассматриваемая нами задача существенно отличается наличием на кольце потенциального дефекта. Заданные в нем граничные условия (4) заменяют собой условие периодичности. Более того, нетрудно видеть, что вытекающее из граничных условий условие совместности (9) теряет смысл при подстановке в него  $2\pi$ -периодических функций. Поэтому следует рассматривать все возможные решения (9) без учета их периодичности.

Любое решение уравнения Матье представимо в виде

$$e^{vrz} f(z), \quad (13)$$

где  $f(z)$  –  $\pi$ -периодическая функция, а число  $r \in \mathbb{C}$ , зависящее от параметров  $q$  и  $\kappa$ , называется характеристическим показателем [24]. Таким образом, периодические решения (с любым периодом) имеют действительный целый либо дробно-рациональный характеристический показатель. Возможные при данных  $q$  и  $\kappa$  значения характеристического показателя принято иллюстрировать при помощи так называемой диаграммы устойчивости (см. рис. 2). Видно,

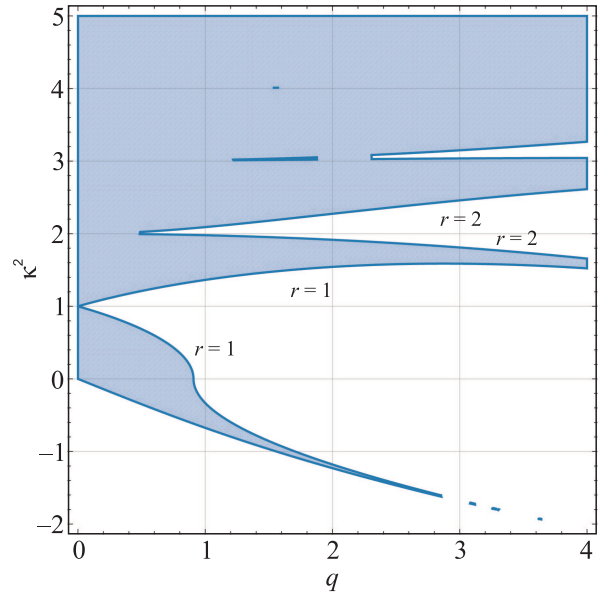


Рис. 2. (Цветной онлайн) Диаграмма устойчивости решений уравнения Матье. В заштрихованной области характеристический показатель является действительным, а решение – устойчивым. На границах области устойчивости характеристический показатель принимает постоянные значения, отмеченные на рисунке

что при заданном  $q$  зависимость характеристического показателя  $r$  от параметра  $\kappa$  не является всюду гладкой, а терпит скачки при переходе между областями устойчивости и неустойчивости. При варьировании потенциального дефекта значение  $\kappa$  становится функцией варьируемого параметра  $\alpha$  и меняется в определенном диапазоне. Поскольку в определение геометрической фазы (11) входят производные по  $\alpha$ , то следует убедиться, что выбранные корни соотношения (9) полностью (при любом  $\alpha$ ) лежат в отмеченной на рис. 2 области устойчивости<sup>4</sup>).

**3. Результаты и обсуждение.** В первую очередь необходимо найти корни соотношения (9). Как и в случае обычного квантового маятника, они образуют бесконечный дискретный набор. На рисунке 3 представлен их характерный вид как функции  $\alpha$ . Из-за наличия дефекта и граничных условий (4) реше-

<sup>4</sup>Хотя гладкость пути в пространстве параметров, по которому производится варьирование, не является необходимым условием для определения геометрической фазы, ее отсутствие может привести к серьезным вычислительным трудностям. Кроме того, в области неустойчивости характеристический показатель является комплексным, что приводит к неограниченности решений уравнения Матье как функций  $z$ . Хотя, как обсуждалось выше, решения задачи не обладают периодичностью по  $z$ , и нормировка может осуществляться на любом интервале длины  $\pi$ , удобнее выбрать ограниченные решения.

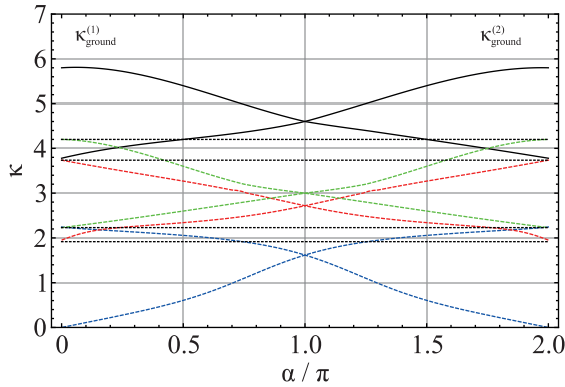


Рис. 3. (Цветной онлайн) Уровни энергии как функции параметра  $\alpha$  при  $q = 2, \eta = 1$ . Верхними индексами 1 и 2 отмечены решения для соответствующих мод конденсата. Состояния, выбранные для вычисления геометрической фазы, отмечены жирными линиями, а пунктиром – решения, не лежащие целиком в области устойчивости. Точками обозначены уровни энергии при  $\alpha = 0$

ния уравнения (3) не являются  $2\pi$ -периодичными. Вместо этого имеется симметрия относительно сдвигов параметра  $\alpha$ , кратных  $2\pi$ . А именно, вся картина энергетических уровней инвариантна относительно одновременного сдвига *всех* энергетических кривых, представленных на рис. 3. Однако, как следует из сравнения с рис. 3, в действительности не все из этих корней соответствуют решениям, имеющим действительный характеристический показатель при всех значениях параметра  $\alpha$ . В частности, для использованного для вычислений кривых на рис. 3 значения  $q$  минимально допустимое значение  $\kappa$  составляет порядка 3. Поэтому для вычисления геометрической фазы было выбрано состояние, обозначенное жирной кривой на рис. 3. В пределе больших  $q$  при фиксированных параметрах дефекта его значение становится пренебрежимо малым, а близкие к основному уровню энергии приближаются к уровням энергии гармонического осциллятора [20].

Как видно из рис. 3, одинаковая вариация дефекта приводит к различным изменениям энергий (и волновых функций) основных состояний различных мод. В результате приобретаемые ими геометрические фазы также различаются. Их разница, вычисленная при помощи выражения (11), представлена на рис. 4.

Обсудим полученные результаты. При нулевом  $q$  геометрические фазы, приобретаемые обеими модами одинаковы, как и следовало ожидать. Зависимость  $\Delta\theta_g$  не является ни четной, ни нечетной функцией  $q$  – это связано с отсутствием такой симметрии в уравнении Матье и начальных условиях. Одному

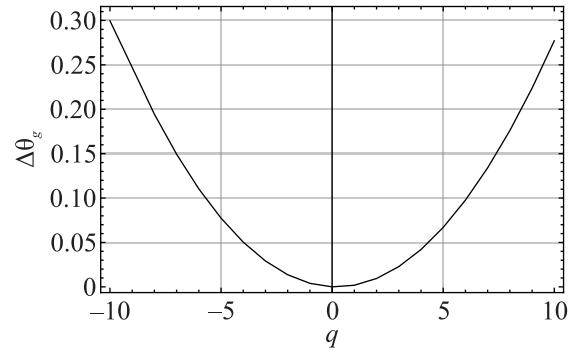


Рис. 4. Разность геометрических фаз мод конденсата, полученных в результате вариации потенциального дефекта по контуру  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ,  $\eta = 1$ , как функция ускорения свободного падения  $q$

и тому же значению  $\Delta\theta_g$  соответствуют два возможных значения  $q$ . Если известно направление поля тяжести, то по полученной зависимости величина ускорения свободного падения определяется однозначно.

Оценим точность измерения параметра  $q$  в рассмотренной схеме. Поскольку квантовое состояние системы параметрически зависит от него, то неопределенность измерения  $\delta q$  дается неравенством Крамера–Рао [25]:

$$\delta q \geq \frac{1}{\sqrt{n_{\text{exp}}} \cdot \sqrt{I_q}} \doteq \frac{\delta q^{(\text{min})}}{\sqrt{n_{\text{exp}}}}, \quad (14)$$

где  $n_{\text{exp}}$  – число повторений интерферометрического измерения разности геометрических фаз, а  $I_q$  – квантовая информация Фишера, соответствующая измерению  $q$ . Поскольку состояние системы в результате приобретения геометрической фазы остается чистым и имеет вид (2), то квантовая информация Фишера принимает вид [26]

$$I_q = 4 \left| \frac{\partial \Delta\theta_g}{\partial q} \right|^2 \cdot (\Delta n)^2, \quad (15)$$

где  $(\Delta n)^2$  – дисперсия числа атомов в моде 1. В случае биномиального распределения атомов по ямам (с равными вероятностями появления атома в каждой из них)  $(\Delta n)^2 = N_{\text{at}}/4$ . На рисунке 5 представлены значения  $\delta q^{(\text{min})}$  при различных  $q$ . Относительная точность измерения при  $q = 10$  и  $N_{\text{at}} = 100$  составляет порядка двух процентов.

В процессе проведения интерференционного эксперимента возможны потери атомов при наложении пространственных конфигураций конденсата. Этот эффект можно промоделировать добавлением атомных делителей пучка с конечным коэффициентом пропускания  $T$ , как это сделано в работе [27]. Для

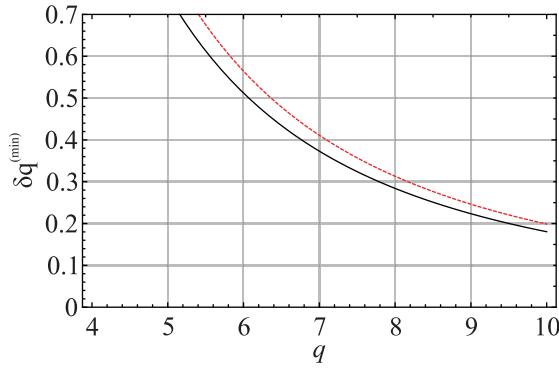


Рис. 5. (Цветной онлайн) Точность измерения  $\delta q^{(\min)}$  параметра  $q$  при  $N_{\text{at}} = 100$ . Сплошная кривая соответствует идеальному наблюдению интерференции, а пунктирная – при потере 30 процентов атомов в одной из мод ( $T = 0.7$ , см. пояснения в тексте)

простоты предполагаются потери только в одной из пространственных мод (для определенности в моде 1). Обозначим состояние конденсата при наличии внешнего ускорения  $q$  после генерации геометрической фазы  $|\Psi(q)\rangle$  (его общий вид приведен в правой части выражения (2)). Тогда состояние конденсата после потери атомов будет даваться выражением, где операторы Крауса  $\hat{K}_i$  отвечают ситуациям с потерей  $i$  атомов [27]:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_{i=0}^{N_{\text{at}}} \hat{K}_i |\Psi(q)\rangle \langle \Psi(q)| \hat{K}_i^\dagger \doteq \sum_{i=0}^{N_{\text{at}}} p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \\ \hat{K}_i &\doteq \frac{(\sqrt{1-T})^i}{\sqrt{i!}} (\sqrt{T})^{\hat{n}} \hat{a}^i, \\ p_i &\doteq \langle \Psi(q) | \hat{K}_i^\dagger \hat{K}_i | \Psi(q) \rangle, \\ |\psi_i\rangle &\doteq \frac{\hat{K}_i}{\sqrt{p_i}} |\Psi(q)\rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Вычисление информации Фишера при больших  $N_{\text{at}}$  затруднительно, однако можно оценить ее сверху, воспользовавшись свойством выпуклости [27, 28] (вычисление дополнительно упрощается тем обстоятельством, что величины  $p_i$  не зависят от геометрической фазы и, следовательно, от  $q$ ):

$$I_q \leq \tilde{I}_q \doteq 4 \left| \frac{\partial \Delta \theta_q}{\partial q} \right|^2 \cdot \sum_i p_i (\Delta n)_i^2, \quad (17)$$

где  $(\Delta n)_i^2$  – дисперсии чисел атомов в моде 1, вычисленные по состояниям  $|\psi_i\rangle$ , введенным в (16). Результаты вычислений соответствующей точности измерения  $\delta q^{(\min)}$  приведены на рис. 5. Видно, что потеря даже 30 процентов атомов в одной из мод не оказывает существенного влияния на точность измерения.

Проведенное рассмотрение позволяет заключить, что разработанная схема в перспективе пригодна для измерения ускорений. Ее особенностью является фактическое отсутствие движущихся частей – в отличие от известных схем на волнах материи, в которых регистрируется разлет и интерференция свободно падающих атомов и атомных ансамблей. Вместо этого необходимо организовать интерференцию предварительно приготовленных мод атомного конденсата в кольцевых конфигурациях с локализованным дефектом. Задача создания атомарного конденсата в рассмотренной конфигурации в движущейся с ускорением системе отсчета сама по себе является нетривиальной. Проведение интерференционного эксперимента с неизбежностью разрушает двухмодовую структуру конденсата, и для проведения следующего измерения процедуру нужно повторять.

Самостоятельной и важной проблемой является реализация структуры дефекта, необходимой для работы схемы. В настоящей работе мы воспользовались удобной математической моделью трансфер-матрицы дефекта, посредством которой в задаче появляются комплексные числа и, следовательно, само понятие фазы. Преследовалась цель демонстрации основной идеи акселерометра. Разработка конкретной физической модели дефекта, играющего ту же роль, станет предметом отдельной будущей работы<sup>5)</sup>.

Помня об исключительно модельном характере рассматриваемых дефектов, приведем численные оценки. Если конденсат состоит из атомов  $^{87}\text{Rb}$  в кольцевых конфигурациях радиуса  $0.25\text{ м}$  с дефектами, где  $\eta \sim 1$ , рассмотренный диапазон значений  $q \sim 1 \div 10$  позволяет измерять ускорения  $\sim 10^{-6} \div 10^{-7}g$ , т.е. данная схема лучше приспособлена для измерения микрогравитации. Это позволяет надеяться на ее возможные приложения к задачам космической навигации [29]. Возможности реализации атомных интерферометров в условиях микрогравитации сейчас активно исследуются [30–32]. Актуальность этой задачи связана с повышением точности измерений за счет увеличения времени распространения волн материи через атомный интерферометр [33, 34]. К настоящему моменту наилучшая достигнутая точность измерений при суборбитальных экспериментах составляет порядка  $10^{-5}g$  при измерении ускорений порядка  $10^{-3}g$  [35, 36], и потенциально до  $10^{-12}g$  в экспериментах с бозе-конденсатом,

<sup>5)</sup>Заметим, что при разработке идеи квантового гироскопии с прицелом на измерение геометрической фазы также присутствовали аналогичные этапы, отраженные в [18] и [22].

содержащим  $10^4$  атомов  $^{87}\text{Rb}$ , в башне свободного падения [37]. Расчеты, проведенные в [38] для альтернативной схемы с использованием атомного интерферометра Фабри–Перо, показывают относительную точность порядка 0.2 при измерении ускорений порядка  $10^{-4}g$  при  $N_{\text{at}} = 100$  (аналогично вычислению на рис. 5). Таким образом, хотя проведенные в настоящей работе оценки сделаны для идеализированной модели, они позволяют сделать вывод о потенциальной пригодности схемы для гравиметрических измерений в условиях микрогравитации.

Полезно сравнить рассматриваемую схему акселерометра с ранее предложенной в [18] схемой гироскопа, также использующей генерацию разности геометрических фаз в двух кольцевых модах конденсата, нарушенных задающими ориентацию локализованными дефектами. Отличия от работы [18] более значительны, чем может показаться с первого взгляда. Роли кольцевых структур мод конденсата в схемах гироскопа и акселерометра совершенно различны: в гироскопе они используются как индикаторы кривизны пространства во вращающейся системе отсчета. Для этой цели важна величина охватываемой площади, но не строгая кольцевая форма мод конденсата, хотя последняя существенно упрощает теоретическое рассмотрение. Для предлагаемой схемы акселерометра форма кольца принципиальна, поскольку должна имитировать математический маятник – в ином случае влияние внешнего ускорения будет сложно выделить на фоне движения в удерживающем потенциале моды. Также радикально отлична от схемы гироскопа из [18] функция дефектов, нарушающих однородность кольцевых форм мод в схеме акселерометра. Прежде всего следует заметить, что их расположение на кольцах по отношению к измеряемому ускорению принципиально. Но более важен другой аспект. В случае гироскопа само стационарное уравнение Шредингера содержало член с мнимой единицей, добавляющий волновым функциям необходимую комплексность для появления геометрической фазы. В этом контексте дополнительных специфических требований, кроме задания ориентации, к свойствам дефекта нет. В [22] было показано, что для этого вполне достаточно комбинации потенциального барьера и потенциальной ямы. Иная ситуация в модели акселерометра. Возникает обсуждавшееся выше требование к дефекту – помимо задания ориентации на кольце, он должен привести в рассмотрение комплексность и, как следствие, понятие фазы. Ввиду данного отличия предполагаемое развитие модели в части практически реализуемой формы дефектов не сведется к повторению [22].

**4. Заключение.** Рассмотрена принципиальная схема перспективного устройства для измерения ускорения его системы отсчета. Измеряемой величиной является разность геометрических фаз двух мод единого атомарного конденсата. Каждая мода имеет пространственную конфигурацию в виде кольца, нарушенного в определенном месте локализованным дефектом, задающим ориентацию кольца. Вариация параметров дефектов противоположно ориентированных мод приводит к возникновению в каждой из них геометрической фазы. Разность этих фаз может быть зарегистрирована в интерференционном эксперименте с волнами материи, испущенными модами конденсата. Преимуществом предлагаемой схемы является (в рамках рассмотренной модели дефектов) способность регистрировать очень малые ускорения (порядка  $10^{-6}g$ ).

**Финансирование работы.** Работа поддержана грантом 23-12-00182 Российского научного фонда (<https://rscf.ru/project/23-12-00182/>).

**Конфликт интересов.** Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. M. van Camp, O. de Viron, H.-G. Scherneck, K.-G. Hinzen, S. D.P. Williams, T. Lecocq, Y. Quinif, and T. Camelbeeck, *J. Geophys. Res.* **116**, B08402 (2011).
2. D. Carbone, M.P. Poland, M. Diamant, and F. Greco, *Earth-Sci. Rev.* **169**, 146 (2017).
3. D. Crossley, J. Hinderer, and U. Ricciardi, *Rep. Prog. Phys.* **76**, 046101 (2013).
4. S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley, N.Y. (1972).
5. D. Gao and M. Zhan, *Phys. Rev. A* **94**, 013607 (2016).
6. G. Amelino-Camelia, C. Lämmerzahl, F. Mercati, and G. M. Tino, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 171302 (2009).
7. A. Peters, K. Y. Chung, and S. Chu, *Nature* **400**, 849 (1999).
8. P. Asenbaum, C. Overstreet, M. Kim, J. Curti, and M. A. Kasevich, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 191101 (2020).
9. S. Fray and M. Weitz, *Space Sci. Rev.* **148**(1), 225?232 (2009).
10. T. L. Gustavson, P. Bouyer, and M. A. Kasevich, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2046 (1997).
11. J. K. Stockton, K. Takase, and M. A. Kasevich, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 133001 (2011).
12. D. Savoie, M. Altorio, B. Fang, L. A. Sidorenkov, R. Geiger, and A. Landragin, *Sci. Adv.* **4**, 7948 (2018).
13. I. Dutta, D. Savoie, B. Fang, B. Venon, C. L. Garrido Alzar, R. Geiger, and A. Landragin, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 183003 (2016).

14. C.L. Garrido Alzar, AVS Quantum Science **1**, 014702 (2019).
15. G. Sagnac, C. R. Acad. Sci. **157**, 708 (1913).
16. G. Sagnac, C. R. Acad. Sci. **157**, 1410 (1913).
17. G. Sagnac, J. Phys. (Paris) **4**, 177 (1914).
18. В. А. Томилин, Л. В. Ильичёв, ЖЭТФ **162**, 307 (2022).
19. M. V. Berry, Proc. R. Soc. London, Ser. A **392**, 45 (1984).
20. E. U. Condon, Phys. Rev. **31**, 891 (1928).
21. G. P. Cook and C. S. Zaidins, Am. J. Phys **54**, 259 (1986).
22. В. А. Томилин, Л. В. Ильичёв, Письма в ЖЭТФ **119**, 381 (2024).
23. L. L. Sánchez-Soto and D. Monzón, J. Carinena, Phys. Rep. **513**, 191 (2012).
24. Н. В. Мак-Лахлан, *Теория и приложения функций Матъе*, Издательство иностранной литературы, М. (1953).
25. C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic, N.Y. (1976).
26. S. L. Braunstein and C. M. Caves, Phys. Rev. Lett. **72**, 3439 (1994).
27. U. Dorner, R. Demkowicz-Dobrzanski, B. J. Smith, J. S. Lundeen, W. Wasilewski, K. Banaszek, and I. A. Walmsley, Phys. Rev. Lett. **102**, 040403 (2009).
28. A. Fujiwara, Phys. Rev. A **63**, 042304 (2001).
29. S. Abend, B. Allard, A. S. Arnold et al. (Collaboration), AVS Quantum Science **5**, 019201 (2023).
30. T. van Zoest, N. Gaaloul, Y. Singh et al. (Collaboration), Science **328**, 1540 (2010).
31. D. Becker, M. D. Lachmann, S. T. Seidel et al. (Collaboration), Nature **562**, 391 (2018).
32. J. R. Williams, C. A. Sackett, H. Ahlers et al. (Collaboration), Nat. Commun. **15**, 6414 (2024).
33. S. Dimopoulos, P. W. Graham, J. M. Hogan, and M. A. Kasevich, Phys. Rev. Lett. **98**, 111102 (2007).
34. H. Müller, S. Chiow, S. Herrmann, S. Chu, and K.-Y. Chung, Phys. Rev. Lett. **100**, 031101 (2008).
35. R. Geiger, V. Ménotret, G. Stern, N. Zahzam, P. Cheinet, B. Battelier, A. Villing, F. Moron, M. Lours, Y. Bidel, A. Bresson, A. Landragin, and P. Bouyer, Nat. Commun. **2**, 474 (2011).
36. B. Barrett, L. Antoni-Micollier, L. Chichet, B. Battelier, T. Lévêque, A. Landragin, and P. Bouyer, Nat. Commun. **7**, 13786 (2016).
37. H. Müntinga, H. Ahlers, M. Krutzik et al. (Collaboration), Phys. Rev. Lett. **110**, 093602 (2013).
38. P. Schach, A. Friedrich, J. R. Williams, W. P. Schleich, and E. Giese, EPJ Quantum. Technol. **9**, 20 (2022).