Письма в ЖЭТФ, том 120, вып. 8, с. 583 – 589

Генерация второй гармоники, сопровождаемая формированием высокоинтенсивных световых пуль

С. В. Сазонов[1)]

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), 125993 Москва, Россия

Поступила в редакцию 27 апреля 2024 г.
После переработки 31 августа 2024 г.
Принята к публикации 16 сентября 2024 г.

Аналитически исследована возможность формирования двухчастотной световой пули в режиме генерации второй гармоники при учете фокусирующей керровской нелинейности. Показано, что в условиях реализации фазового и группового синхронизмов и отсутствия дисперсии групповой скорости на частоте второй гармоники устойчивая световая пуля может сформироваться при ограничении сверху на ее интенсивность, а также ограничениях снизу на временную длительность и апертуру.

DOI: 10.31857/S0370274X24100154, EDN: LZGUPX

1. Введение. Генерация второй гармоники с помощью непрерывного лазерного излучения может сопровождаться формированием двухчастотных пространственных солитонов – пучков, ограниченных в поперечных направлениях [1, 2].

Одной из тенденций развития современной нелинейной оптики и лазерной физики является создание в лабораторных условиях световых импульсов все более коротких длительностей и высоких интенсивностей [3, 4]. Благодаря данному обстоятельству подвергаются модификации теоретические подходы, хорошо зарекомендовавшие себя в оптике импульсов умеренных интенсивностей.

Импульсные режимы генерации второй гармоники обычно описываются при учете только квадратичной нелинейности. С другой стороны, понятно, что с увеличением интенсивности оптических импульсов все большее влияние на данные процессы способна оказывать кубическая (керровская) нелинейность.

Представляет немалый интерес исследование процессов, при которых могут сформироваться устойчивые локализованные во всех направлениях пространственно-временные солитоны (световые пули).

Известно, что одна только фокусирующая керровская нелинейность в однородной среде не способна привести к формированию световой пули [5, 6]. Если мощность оптического импульса превышает определенное критическое значение, наблюдается самофокусировка (коллапс) сигнала. В противном случае преобладает дифракционное уширение импульса, что приводит к его дефокусировке. Такие же выводы справедливы для керровской нелинейности в режиме генерации третьей гармоники [7]. Заметим, что в фокусирующих градиентных волноводах могут быть созданы условия формирования световых пуль при керровской нелинейности [8–14].

Сценарии импульсных режимов генерации второй гармоники в значительной степени определяются характером дисперсии групповой скорости (ДГС) на основной частоте [15–20]. Здесь для формирования световых пуль ДГС должна быть аномальной.

В однородных средах с квадратичной нелинейностью самофокусировки не происходит. Данная нелинейность вкупе с дифракцией и аномальной ДГС приводит к формированию двухчастотных световых пуль [15, 20].

В работах [21] и [22] исследовано влияние соответственно дефокусирующей и фокусирующей керровских нелинейностей на импульсный режим генерации второй гармоники. В средах с дефокусирующей керровской нелинейностью возможно формирование двухчастотных вихревых световых пуль, которые устойчивы, если их энергия превышает определенное критическое значение [21]. В случае фркусирующей керровской нелинейности при удовлетворении условиям фазового и группового синхронизмов энергия безвихревых двухчастотных световых пуль не может превышать определенное критическое значение [22]. В [23] рассмотрена возможность формирования двухчастотных световых пуль при собственных и перекрестных керровских нелинейностях про-

1)e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

тивоположных знаков. Также определены области устойчивости таких пуль в пространстве параметров исследуемой системы.

Из сказанного выше четко видны конкурирующие влияния квадратичной и керровской нелинейностей на возможность формирования световых пуль в режиме генерации второй гармоники. Здесь деструктивная роль фокусирующей керровской нелинейности приводит к некоторым ограничениям на параметры оптических импульсов, при которых еще способны формироваться двухчастотные световые пули в однородной среде.

В [21–23] ДГС предполагалась аномальной как на основной частоте, так и на частоте второй гармоники. В то же время представляют интерес ситуации, когда характер ДГС различен для разных частот. Отдельного внимания заслуживает случай, когда ДГС на частоте второй гармоники равна нулю [1, 24]. Здесь при аномальной ДГС на основной частоте и учете только квадратичной нелинейности возможно формирование двухчастотных световых пуль [24]. В то же время, как было сказано выше, для высокоинтенсивных сигналов может оказаться существенной деструктивная роль керровской нелинейности.

Настоящая работа посвящена аналитическому исследованию влияния фокусирующей керровской нелинейности на возможность формирования двухчастотных световых пуль при нулевой ДГС на частоте второй гармоники.

2. Основные уравнения. Будем считать, что поляризованные в одной плоскости импульсы на основной частоте и частоте второй гармоники распространяются вдоль оси z. При этом выполнены условия фазового и группового синхронизмов, а ДГС на частоте второй гармоники равна нулю. В этом случае для медленно меняющихся амплитуд (ММА) ψ_1 и ψ_2 электрического поля импульса на основной частоте ω и на второй гармонике 2ω соответственно в параксиальном приближении имеем систему уравнений

$$i\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + \frac{\beta}{2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\tau^2} - \alpha_1\psi_1^*\psi_2 - \sigma_{11}|\psi_1|^2\psi_1 - \sigma_{12}|\psi_2|^2\psi_1 = \frac{c}{2n\omega}\Delta_\perp\psi_1, \tag{1}$$

$$i\frac{\partial\psi_2}{\partial z} - \alpha_2\psi_1^2 - \sigma_{21}|\psi_1|^2\psi_2 - \sigma_{22}|\psi_2|^2\psi_2 = \frac{c}{4n\omega}\Delta_\perp\psi_2. \tag{2}$$

Здесь $\tau = t - z/v_g$, t – время, v_g и n – линейные групповая скорость и показатель преломления соответственно, одинаковые для обеих частот, $\beta = \partial v_g^{-1}/\partial\omega$ – параметр ДГС на основной частоте ω, c – скорость света в вакууме, $\alpha_{1,2} = 4\pi\omega\chi_{1,2}^{(2)}/cn$, $\chi_1^{(2)}$ и $\chi_2^{(2)}$ – нелинейные восприимчивости второго порядка на основной частоте и на частоте второй гармоники соответственно; параметры σ_{11}, σ_{12}, σ_{21} и σ_{22}, определяющие керровскую нелинейность, могут быть представлены через зависящие от частоты кубические восприимчивости $\chi^{(3)}$:

$$\sigma_{11} = 6\pi\omega\chi^{(3)}(\omega,-\omega,\omega)/cn,$$

$$\sigma_{12} = 12\pi\omega\chi^{(3)}(2\omega,-2\omega,\omega)/cn,$$

$$\sigma_{21} = 24\pi\omega\chi^{(3)}(\omega,-\omega,2\omega)/cn,$$

$$\sigma_{22} = 12\pi\omega\chi^{(3)}(2\omega,-2\omega,\omega)/cn$$

[6], $\Delta_\perp$ – поперечный лапласиан.

Обычно в твердых диэлектриках керровская нелинейность имеет фокусирующий характер ($\chi^{(3)} > 0$), что как раз и представляет интерес для рассматриваемого нами случая. Поэтому везде ниже мы будем полагать, что все коэффициенты σ_{11}, σ_{12}, σ_{21} и σ_{22} положительны. Более того, в целях простоты будем пренебрегать дисперсией квадратичной и керровской нелинейных восприимчивостей. Тогда, как видно из вышеприведенных выражений, имеем соотношения: $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$, $\sigma_{21} = 2\sigma_{12} = 2\sigma_{22} = 4\sigma_{11} \equiv 4\sigma$.

3. Метод усредненного лагранжиана. Для получения приближенного аналитического решения системы (1), (2) в виде двухчастотной световой пули используем метод усредненного лагранжиана [25, 26].

При обозначенных условиях системе (1) соответствует плотность лагранжиана

$$L = L_1 + L_2 + L_{\text{int}}, \tag{3}$$

где

$$L_1 = \frac{i}{3}\left(\psi_1^*\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \psi_1\frac{\partial\psi_1^*}{\partial\tau}\right) - \frac{\beta}{2}\left|\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau}\right|^2 - \frac{\sigma}{2}|\psi_1|^4 + \frac{c}{2n\omega}|\nabla_\perp\psi_1|^2, \tag{4}$$

$$L_2 = \frac{i}{4}\left(\psi_2^*\frac{\partial\psi_2}{\partial z} - \psi_2\frac{\partial\psi_2^*}{\partial z}\right) - \frac{\sigma}{2}|\psi_2|^4 + \frac{c}{8n\omega}|\nabla_\perp\psi_2|^2, \tag{5}$$

$$L_{\text{int}} = -\frac{\alpha}{2}(\psi_1^2\psi_2^* + \psi_1^{*2}\psi_2) - 2\sigma|\psi_1|^2|\psi_2|^2, \tag{6}$$

$\nabla_\perp$ – оператор поперечного градиента.

Отталкиваясь от результатов работы [24], запишем пробные решения в виде:

$$\psi_1 = F_1 e^{i\Phi}\mathrm{sech}(Q\tau), \quad \psi_2 = F_2 e^{2i\Phi}\mathrm{sech}^2(Q\tau), \tag{7}$$

где F_1, F_2, Q и Φ – подлежащие определению функции координат.

Подставляя (7) в (3)–(6), будем иметь для усредненного лагранжиана $\Lambda = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} L dt$:

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_{\text{int}}, \tag{8}$$

где

$$\Lambda_1 = -\frac{F_1^2}{Q}\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\beta}{6}F_1^2 Q - \frac{\sigma}{3}\frac{F_1^4}{Q} + \frac{c}{2n\omega}\frac{F_1^2}{Q}(\nabla_\perp\Phi)^2 + $$
$$+ \frac{c}{2n\omega}\left(\frac{{F_1'}^2}{Q} - \frac{F_1F_1'}{Q^2} + \frac{\pi^2+12}{36Q^3}\right)(\nabla_\perp Q)^2, \tag{9}$$

$$\Lambda_2 = -\frac{2F_2^2}{3Q}\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{8\sigma}{35}\frac{F_2^4}{Q} + \frac{c}{3n\omega}\frac{F_2^2}{Q}(\nabla_\perp\Phi)^2 + $$
$$+ \frac{c}{12n\omega}\left(\frac{{F_2'}^2}{Q} - \frac{F_2F_2'}{Q^2} + \frac{\pi^2}{15Q^3}\right)(\nabla_\perp Q)^2, \tag{10}$$

$$\Lambda_{\text{int}} = -\frac{2\alpha}{3}\frac{F_1^2F_2}{Q} - \frac{16\sigma}{15}\frac{F_1^2F_2^2}{Q}. \tag{11}$$

Здесь считается, что амплитуды F_1 и F_2 зависят от переменной Q, а штрих сверху обозначает производную по данной переменной.

Исследуем вначале режим одномерного распространения двухчастотного импульса вдоль оси z. Для этого положим в (9) и (10) $\nabla_\perp\Phi = \nabla_\perp Q = 0$. Тогда из условий $\partial(\partial\Lambda/\partial(\partial\Phi/\partial z))/\partial\Lambda/\partial F_1 = \partial\Lambda/\partial F_2 = = \partial\Lambda/\partial Q = 0$ имеем систему уравнений:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{\beta}{6}Q^2 - \frac{2\alpha}{3}F_2 - \frac{2\sigma}{3}F_1^2 - \frac{16}{15}\sigma F_2^2, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{\alpha}{2}\frac{F_1^2}{F_2} - \frac{8\sigma}{5}F_1^2 - \frac{24}{35}\sigma F_2^2, \tag{13}$$

$$\left(F_1^2 + \frac{2}{3}F_2^2\right)\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\beta}{6}Q^2F_1^2 - \frac{2\alpha}{3}F_1^2F_2 - $$
$$- \frac{\sigma}{3}F_1^4 - \frac{8}{35}\sigma F_2^4 - \frac{16}{15}\sigma F_1^2F_2^2. \tag{14}$$

Полагая вначале $\sigma = 0$, получим из этой системы $F_2 = -F_1 = -\beta Q^2/\alpha = \text{const}$, $\partial\Phi/\partial z = \beta Q^2/2$. Эти соотношения в точности совпадают с соответствующими выражениями, полученными в [24] прямым интегрированием системы (1), (2) при $\Delta_\perp\psi_1 = \Delta_\perp\psi_2 = = \alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$, $\sigma_{21} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{11} = 0$. Данное обстоятельство является хорошим аргументом в пользу используемого подхода.

Теперь примем во внимание, что зависимость поляризационного отклика среды от электрического поля импульса имеет характер разложения по степеням данного поля. Учитывая это, при решении системы (12)–(14) будем оставлять только слагаемые, линейные по параметру σ. Тогда после простых, но громоздких выкладок будем иметь:

$$F_1 = \frac{\beta}{\alpha}Q^2 + \frac{1313}{210}\sigma\frac{\beta^2}{\alpha^3}Q^4, \tag{15}$$

$$F_2 = -\frac{\beta}{\alpha}Q^2 + \frac{41}{30}\sigma\frac{\beta^2}{\alpha^3}Q^4. \tag{16}$$

Возвращаясь к лагранжиану (8)–(11) и следуя подходу, использованному в работах [26–28], будем считать функциональные соотношения (15), (16) справедливыми и в неодномерном случае. Данное утверждение согласуется, в частности, с тем, что дифракция здесь учитывается в параксиальном приближении.

Подставляя (15) и (16) в (8)–(11) и удерживая только слагаемые, линейные по σ, придем к усредненному лагранжиану

$$\tilde{\Lambda} \equiv \frac{3\alpha^2}{5\beta^2}\Lambda = -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{c}{2n\omega}\rho(\nabla_\perp\Phi)^2 + $$
$$+ \frac{3\beta}{10}Q^5 + \frac{11243}{2100}\sigma\frac{\beta^2}{\alpha^2}Q^7 + \tilde{\Lambda}_D, \tag{17}$$

где

$$\rho = Q^3 + \frac{1997}{175}\frac{\sigma\beta}{\alpha^2}Q^5, \tag{18}$$

а часть лагражиана $\tilde{\Lambda}_D$, учитывающая влияние дифракции, имеет вид:

$$\tilde{\Lambda}_D = \frac{c}{10n\omega}\left(\frac{7\pi^2}{60} + 8\right)Q(\nabla_\perp Q)^2. \tag{19}$$

При получении (19) из (9), (10) в силу параксиального приближения учитывались только первые слагаемые в правых частях (15) и (16).

Обращая равенство (18) с учетом того, что второе слагаемое в правой части играет роль возмущения, получим:

$$Q = \rho^{1/3} - \frac{1997}{525}\frac{\sigma\beta}{\alpha^2}\rho. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (17), (19) и вводя обозначение $\varphi = -c\Phi/n\omega$, при учете только линейных относительно σ слагаемых будем иметь лагранжиан

$$\tilde{\Lambda} = \rho\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \rho\frac{(\nabla_\perp\varphi)^2}{2} + \frac{3c\beta}{10n\omega}\rho^{5/3} - \frac{739}{2100}\frac{c}{n\omega}\frac{\sigma\beta^2}{\alpha^2}\rho^{7/3} + $$
$$+ \left(\frac{7\pi^2}{60} + 8\right)\left(\frac{c}{n\omega}\right)^2\frac{(\nabla_\perp\rho)^2}{90\rho}. \tag{21}$$

Соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа относительно переменных ρ и φ имеют вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}+\nabla_\perp(\rho\nabla_\perp\varphi)=0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{(\nabla_\perp\varphi)^2}{2}+\frac{c}{2n\omega}\beta\rho^{2/3}-\frac{739}{900}\frac{c}{n\omega}\frac{\sigma\beta^2}{\alpha^2}\rho^{4/3}= =\frac{2}{45}\left(\frac{7\pi^2}{60}+8\right)\left(\frac{c}{n\omega}\right)^2\frac{\Delta_\perp\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \quad (23)$$

Система (22), (23) формально схожа с уравнениями двумерного течения некой квантовой бозе-жидкости [29] со сложным внутренним взаимодействием между частицами. Внутреннее давление p в этой жидкости состоит из двух аддитивных частей p_1 и p_2, зависящих от плотности ρ. При этом $p_1\sim\rho^{5/3}$, $p_2\sim\rho^{7/3}$ (см. соответственно третье и четвертое слагаемые в левой части (23)). Роль времени здесь играет координата z.

Отмеченная аналогия станет более явной, если заметить, что система (22), (23) эквивалентна уравнению:

$$i\frac{\partial G}{\partial z}=\frac{g}{2}\Delta_\perp G- -\frac{c}{2n\omega\alpha^2}\left(\alpha^2\beta|G|^{4/3}-\frac{739}{450}\sigma\beta^2|G|^{8/3}\right)G, \quad (24)$$

где G – комплексная функция координат, определяемая преобразованием Маделунга:

$$G=\sqrt{\rho}e^{-ig\varphi}, \quad (25)$$

$$g=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{5}\left(\frac{7\pi^2}{60}+8\right)}\frac{c}{n\omega}\approx 0.90\frac{c}{n\omega}.$$

Можно также провести аналогию с непрерывным световым пучком, распространяющимся в среде, обладающей сложной нелинейностью. При этом первое слагаемое в скобках (24) соответствует исходной квадратичной нелинейности, а второе – керровской.

4. Двухчастотные световые пули. Уравнение непрерывности (22) обладает автомодельным “аксиально-симметричным” локализованным решением [30]:

$$\rho=\rho_0\frac{R_0^2}{R^2}\exp\left(-\frac{3r^2}{4R^2}\right),\quad \varphi=f(z)+\frac{r^2}{2R}\frac{dR}{dz}, \quad (26)$$

где ρ_0 – постоянная величина, связанная с пиковым значением интенсивности основной компоненты импульса (см. ниже), r – расстояние от оси симметрии двухчастотного светового импульса до его произвольного периферийного участка, $R=R(z)$ – характерный поперечный размер сгустка световой энергии, R_0 – равновесное значение параметра R, $f(z)$ – подлежащая определению функция.

Правой частью уравнения (23) учитывается влияние дифракции на распространение оптического импульса. Пренебрежение данной правой частью равносильно приближению геометрической оптики.

Подставим теперь (26) в (23). При этом в левой части используем приосевое приближение [30, 31], положив $\exp(-3r^2/4R^2)\approx 1-3r^2/4R^2$. После приравнивания в левой и правой частях множителей при r^0 и r^2 придем к уравнениям:

$$\frac{df}{dz}=-\frac{c}{2n\omega}\beta\rho_0^{2/3}\frac{R_0^{4/3}}{R^{4/3}}+\frac{739}{900}\frac{c}{n\omega}\frac{\sigma\beta^2}{\alpha^2}\rho_0^{4/3}\frac{R_0^{8/3}}{R^{8/3}}- -\left(\frac{7\pi^2}{60}+8\right)\left(\frac{c}{n\omega}\right)^2\frac{1}{15R^2}, \quad (27)$$

$$\frac{d^2R}{dz^2}=-\frac{\partial U}{\partial R}=\frac{c}{2n\omega}\beta\rho_0^{2/3}\frac{R_0^{4/3}}{R^{7/3}}- \quad (28)$$

$$-\frac{739}{450}\frac{c}{n\omega}\frac{\sigma\beta^2}{\alpha^2}\rho_0^{4/3}\frac{R_0^{8/3}}{R^{11/3}}+\left(\frac{7\pi^2}{60}+8\right)\left(\frac{c}{n\omega}\right)^2\frac{1}{20R^3}.$$

Уравнение (28) представляет собой уравнение движения ньютоновской частицы единичной массы во внешнем поле с “потенциальной энергией” $U(R)$, где R и z формально играют роли координаты частицы и времени соответственно.

Последнее слагаемое в правой части (28) соответствует эффектам дифракции. В свою очередь, первое и второе слагаемые в правой части описывают влияние квадратичной и керровской нелинейностей соответственно.

Очевидно, условия формирования устойчивой световой пули имеют вид:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)_{R=R_0}=0,\quad \left(\frac{\partial^2U}{\partial R^2}\right)_{R=R_0}>0, \quad (29)$$

что соответствует наличию локального минимума в зависимости $U(R)$ при равновесном значении радиуса пули.

Простой анализ показывает, что условиям (29) при учете (28) можно удовлетворить только, если $\beta<0$. Таким образом, ДГС должна быть аномальной. Тогда при фокусирующей керровской нелинейности ($\sigma>0$) из (28) и (29) приходим к неравенствам:

$$\tau_0>\tau_c=1.81\frac{\sqrt{\sigma|\beta|}}{|\alpha|},\quad R_0>R_c=\frac{1.23}{|\alpha|}\sqrt{\frac{c}{n\omega}\sigma}, \quad (30)$$

$$\psi_{1m}<\psi_c=0.30\frac{|\alpha|}{\sigma}, \quad (31)$$

где $\tau_0=1/Q_0\approx 1/\rho_0^{1/3}$ – длительность световой пули в центре ее поперечного сечения, $\psi_{1m}\approx|\beta/\alpha|Q_0^2\approx$ $\approx|\beta/\alpha|\rho_0^{2/3}$ – пиковое значение амплитуды световой пули (см. (7) и (20)).

Ввиду особой важности условий (30) и (31) перепишем их, используя параметры, непосредственно измеряемые в условиях эксперимента:

$$\begin{aligned} &\tau_0 > \tau_c = 0.06\frac{c}{\chi^{(2)}}\sqrt{\frac{|\beta| n n_2}{\omega}}, \\ &R_0 > R_c = 0.04\frac{c}{\omega\chi^{(2)}}\sqrt{c n_2}, \end{aligned} \tag{32}$$

$$I_m < I_c = 91.7\frac{\chi^{(2)2}}{c n n_2^2}. \tag{33}$$

Здесь $I_m = c\psi_{1m}^2/2\pi n$ – пиковое значение интенсивности световой пули на основной частоте, определяемое в рассматриваемом случае выражением:

$$I_m = \frac{c^3\beta^2 n}{64\pi^3\chi^{(2)2}\omega^2\tau_0^4}, \tag{34}$$

n_2 – нелинейный показатель преломления на частоте ω, определяющий аддитивную, пропорциональную интенсивности, добавку к линейному показателю преломления; при этом $\sigma = \omega n_2/2\pi n$ [6].

Оставляя в правых частях (15), (16), (18) и (20) только первые слагаемые, а также используя (7) и (26), для интенсивностей компонент равновесной ($R = R_0$) световой пули будем иметь:

$$\begin{aligned} &I_1 = I_m e^{-r^2/R_0^2}\mathrm{sech}^2\left(e^{-r^2/4R_0^2}\frac{\tau}{\tau_0}\right), \\ &I_2 = I_m e^{-r^2/R_0^2}\mathrm{sech}^4\left(e^{-r^2/4R_0^2}\frac{\tau}{\tau_0}\right). \end{aligned} \tag{35}$$

В этом же приближении из (28) и первого условия (29) найдем связь между апертурой R_0 и временной длительностью τ_0 световой пули:

$$R_0 = 0.96\sqrt{\frac{c}{n\omega|\beta|}}\tau_0. \tag{36}$$

Из (35) видно, что временная длительность τ_p световой пули минимальна в центре ее поперечного сечения ($\tau_p = \tau_0$) и возрастает на периферийных участках по закону $\tau_p = \tau_0 e^{r^2/4R_0^2}$.

Роль керровской нелинейности здесь сводится к ограничениям (32) и (33). Видно, что в отсутствие керровской нелинейности ($n_2 = 0$) условия (32) и (33) выполняются автоматически.

Малые отклонения апертуры пули от значения R_0 при выполнении условий (32) и (33) приведут к тому, что распространение двухчастотной световой пули будет сопровождаться осцилляциями длительности, апертуры и интенсивностей ее компонент около равновесных значений [19]. Соответствующая аналитическая процедура связана с линеаризацией уравнения (28) в окрестности и выходит за рамки настоящей работы.

Приведем некоторые численные оценки. Взяв для кристалла типа KDP в ближнем инфракрасном диапазоне $\omega \sim 10^{15}$ с$^{-1}$, $\chi_1^{(2)} \sim \chi_2^{(2)} \sim 10^{-9}$ СГСЭ, $n_2 \sim$ $\sim 10^{-16}$ см^2/Вт, $|\beta| \sim 10^{-28}$ см^2/с [32], из (32) и (33) найдем $\tau_c \sim 10^{-15}$ с, $R_c \sim 10^{-4}$ см, $I_c \sim 10^{12}$ Вт/см^2. Для нелинейной добавки к линейному показателю преломления имеем $n_2 I_c \sim 10^{-4}$.

Отмеченные числовые параметры соответствуют интенсивным фемтосекундным импульсам, содержащим порядка одного периода оптических колебаний. Здесь проходит грань между применимостью и неприменимостью приближения ММА. В работах [3, 4, 33, 34] показано, что данное приближение хорошо себя проявляет даже в случаях, когда оптический импульс содержит всего порядка 3–5 колебаний.

Приведенная выше оценка показывает, что величина минимальной апертуры порядка длины волны оптического импульса, что в данном пределе ставит под вопрос возможность применимости параксиального приближения.

Заметим, что верхнее ограничение на интенсивность импульса из-за керровской нелинейности для формирования световой пули в режиме генерации второй гармоники было отмечено в работах [35, 36] в результате численных экспериментов. Простые оценки показывают, что верхняя граница интенсивности, найденная в [35, 36] для конкретных параметров среды, по порядку величины совпадает с соответствующей величиной I_c, определенной здесь по формуле (33). Отметим также, что в работе [22] констатируется верхний предел не на интенсивность, а на энергию импульса.

Обобщая сказанное выше, можно утверждать, что керровская нелинейность способна оказывать существенное влияние на саму возможность формирования двухчастотных световых пуль в режиме генерации второй гармоники при интенсивностях импульсов $I \sim 10^{11}$–10^{12} Вт/см^2, длительность и апертура которых составляют порядка 10 фс и 10 мкм соответственно.

Для оценки дистанции, на которой способна сформироваться рассмотренная выше двухчастотная световая пуля, примем к сведению, что в этих условиях дисперсионная, дифракционная и нелинейная длины являются величинами одного порядка [19]. Каждая из них может выступать в роли данной дистанции. Взяв $\tau_0 \sim 10$ фс, будем иметь $R_0 \sim 10$ мкм. Тогда для дифракционной длины l_D

имеем оценку $l_D\Box\omega R_0^2/c \sim 0.1{-}1$ см. На дистанциях такого порядка может сформироваться световая пуля.

5. Заключительные замечания. Предложенная в настоящей работе версия усредненного лагранжиана позволила провести аналитическое исследование возможности формирования двухчастотных световых пуль в режиме генерации второй гармоники. Аналогичные версии, предложенные ранее в работах [26, 28], отталкивались от точных одномерных решений нелинейных волновых уравнений. Далее предполагалось, что в неодномерном случае функциональные зависимости между длительностью импульса и его амплитудой остаются такими же, как в точном одномерном решении, с тем отличием, что теперь оба параметра зависят от координат. В нашем случае точное одномерное решение системы (1), (2) неизвестно. Поэтому одномерный случай был рассмотрен на первой приближенной стадии метода усредненного лагранжиана подобно тому, как это было проделано в [25]. Сохранение отмеченных выше функциональных зависимостей на неодномерной стадии соответствует квазиодномерному приближению [26, 28]. Данное обстоятельство, по крайней мере, качественно согласуется с принятым здесь параксиальным приближением для учета дифракции.

Отмеченный выше подход позволил прийти к ограничениям (32), (33) для апертуры, длительности и интенсивности импульса, при выполнении которых способна формироваться двухчастотная световая пуля. При нарушении данных ограничений фокусирующая керровская нелинейность приводит к необратимому коллапсу светового импульса. Что касается условия на интенсивность, то оно качественно согласуется с аналогичным условием, отмеченным в работах [35, 36], где использовались численные методы.

Здесь в целях простоты мы пренебрегали зависимостью нелинейных восприимчивостей от частоты. Это позволило записать ограничения (32) и (33), а также другие формулы в компактном виде. Принципиальных проблем для учета частотной дисперсии нелинейных восприимчивостей в рамках использованного подхода не существует. Только выкладки и формулы в этом случае окажутся более громоздкими.

В настоящей работе считаются одновременно выполненными условия фазового и группового синхронизмов, что вряд ли реализуемо в условиях реального эксперимента. Поэтому следующим шагом в обозначенном здесь направлении исследований может стать аналитическое рассмотрение формирования двухчастотной световой пули в условиях, когда нарушено хотя бы одно из условий синхронизма.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств государственного задания Национального исследовательского центра “Курчатовский институт”.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. Ю. Н. Карамзин, А. П. Сухоруков, Письма в ЖЭТФ **20**, 734 (1974) [Yu. N. Karamzin and A. P. Sukhorukov, JETP Lett. **20**, 339 (1974)].
2. Ю. Н. Карамзин, А. П. Сухоруков, ЖЭТФ **68**, 834 (1975) [Yu. N. Karamzin and A. P. Sukhorukov, Sov. Phys. – JETP **41**, 414 (1976)].
3. T. Brabek and F. Krausz, Rev. Mod. Phys. **72**, 545 (2000).
4. F. Krausz and M. Ivanov, Rev. Mod. Phys. **81**, 163 (2009).
5. Y. Silberberg, Opt. Lett. **15**, 1282 (1990).
6. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны: от волоконных световодов к фотонным кристаллам*, Физматлит, М. (2005) [Yu. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, N.Y. (2003)].
7. S. V. Sazonov, J. Phys. Soc. Jpn. **85**, 124404 (2016).
8. S.-S. Yu, C.-H. Chien, Y. Lai, and J. Wang, Opt. Commun. **119**, 167 (1995).
9. S. Raghavan and G. P. Agrawal, Opt. Commun. **180**, 377 (2000).
10. W.H. Renninger and F.W. Wise, Nat. Commun. **4**, 1719 (2013).
11. O.V. Shtyrina, M.P. Fedoruk, Yu.S. Kivshar, and S.K. Turitsyn, Phys. Rev. A **97**, 013841 (2018).
12. S. V. Sazonov, Phys. Rev. A **100**, 043828 (2019).
13. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **117**, 292 (2023).
14. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **119**, 579 (2024).
15. X. Liu, L. J. Qian, and F. W. Wise, Phys. Rev. Lett. **82**, 4631 (1999).
16. А. П. Сухоруков, *Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике*, Наука, М. (1988).
17. H. Sakaguchi and B. A. Malomed, Opt. Soc. Am. B **29**, 2741 (2012).
18. I. N. Towers, B. A. Malomed, and F. W. Wise, Phys. Rev. Lett. **90**, 1239021 (2003).
19. S. V. Sazonov, M. S. Mamaikin, M. V. Komissarova, and I. G. Zakharova, Phys. Rev. E **96**, 022208 (2017).
20. A. A. Kanashov and A. M. Rubenchik, Physica D **4**, 122 (1981).
21. D. Mihalache, D. Mazilu, L.-C. Crasovan, I. Towers, B. A. Malomed, A. V. Buryak, L. Torner, and F. Lederer, Phys. Rev. E **66**, 016613 (2002).

22. D. Mihalache, D. Mazilu, B. A. Malomed, F. Lederer, L.-C. Crasovan, Y. V. Kartashov, and L. Torner, Phys. Rev. E **74**, 047601 (2006).
23. N.-C. Panoiu and R. M. Osgood, Jr., B. A. Malomed, F. Lederer, D. Mazilu, and D. Mihalache, Phys. Rev. E **71**, 036615 (2005).
24. С. В. Сазонов, М. В. Комисарова, Письма в ЖЭТФ **111**, 355 (2020) [S. V. Sazonov and M. V. Komissarova, JETP Lett. **111**, 320 (2020)].
25. D. Anderson, Phys. Rev. A **27**, 3135 (1983).
26. С. К. Жданов, Б. А. Трубников, ЖЭТФ **92**, 1612 (1987) [S. K. Zhdanov and B. A. Trubnikov, Sov. Phys. JETP **65**, 904 (1987)].
27. D. Anderson, M. Desaix, M. Lisak, and M. L. Quorida-Teixeiro, J. Opt. Soc. Am. B **9** 1358 (1992).
28. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **130**, 145 (2006) [S. V. Sazonov, JETP **103**, 126 (2006)].
29. Д. Р. Тилли, Дж. Тилли, *Сверхтекучесть и сверхпроводимость*, Мир, М. (1977) [D. R. Tilley and J. Tilley, *Superfluidity and Superconductivity*, Van Nostrand Reinhold, N.Y. (1974)].
30. Н. В. Карлов, Н. А. Кириченко, *Колебания, волны, структуры*, Физматлит, М. (2001), 496 с.
31. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, Успехи физических наук **93**, 19 (1967) [S. A. Akhmanov, A. P. Sukhorukov, and R. V. Khokhlov, Sov. Phys.-Uspekhi **10**, 609 (1968)].
32. А. Ярив, *Квантовая электроника*, Сов. Радио, М. (1980) [A. Yariv, *Quantum Electronics*, John Wiley & Sons, N.Y. (1989)].
33. A. A. Drozdov, S. A. Kozlov, A. A. Sukhorukov, and Yu. S. Kivshar, Phys. Rev. A **86**, 053822 (2012).
34. S. V. Sazonov, Journal of Russian Laser Research **39**, 252 (2018).
35. A. A. Kalinovich, M. V. Komissarova, S. V. Sazonov, and I. G. Zakharova, Proc. SPIE **11770**, 117700D (2021).
36. А. А. Калинович, И. Г. Захарова, М. В. Комиссарова, С. В. Сазонов, Известия РАН. Сер. Физическая **86**, 25 (2022) [A. A. Kalinovich, I. G. Zakharova, M. V. Komissarova, and S. V. Sazonov, Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys. **86**, 9 (2022)].