Письма в ЖЭТФ, том 120, вып. 9, с. 661 – 666

Формула Марбургера для эллиптически поляризованных световых пучков в нелинейной нелокальной среде

Н. Ю. Кузнецов, К. С. Григорьев, В. А. Макаров[1)]

Физический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 сентября 2024 г.
После переработки 10 сентября 2024 г.
Принята к публикации 19 сентября 2024 г.

Численно исследована возможность применения формулы Марбургера для нахождения связи между мощностью пучка и расстоянием, на котором происходит нелинейный коллапс пучка с начальным гауссовым профилем интенсивности и однородной эллиптической поляризацией. Показано, что адекватного описания этой зависимости удается достичь путем подстройки параметров, входящих в эту формулу, в зависимости от степени эллиптичности эллипса поляризации падающего излучения и от механизма нелинейного оптического отклика

DOI: 10.31857/S0370274X24110027, EDN: PHVEFA

1. Введение. Немногим более шестидесяти лет назад была предсказана [1] самофокусировка светового пучка, являющаяся причиной возникновения множества нелинейных оптических эффектов, связанных с лавинообразным увеличением энергии электромагнитного поля в малой области, окружающей определенную точку пространства. Описанные в обзорах [2–9] успехи в исследовании самофокусировки линейно или циркулярно поляризованных пучков с различным плавным распределением интенсивности, а впоследствии и импульсов с длительностью, большей или меньшей времени релаксации нелинейности среды, и создание мощных фемтосекундных лазерных систем обеспечили стремительное изучение филаментации лазерных импульсов в различных средах и анализ ее возможных применений (см. обзоры [8–15]).

Самофокусировка света – пороговый эффект, возникающий, если мощность светового пучка P превышает критическое значение P_c. Последнее не только зависит от поперечного пространственного распределения интенсивности и поляризации света на границе среды, но и по-разному (с точностью до числового коэффициента) определяется авторами в зависимости от различных способов аналитического решения уравнений распространения или от методов, используемых при их численном решении. В последнем случае порог самофокусировки определяется из условия одновременного достижения бесконечного сжатия пучка и неограниченного возрастания его интенсивности и становится возможным связать введенное в [16] расстояние z_c от границы среды, на котором это происходит, с P/P_c. Впервые такая формула, полученная в приближении неизменности линейной поляризации света в процессе распространения, была получена в [17]

$$\frac{z_c}{z_R} = \frac{A}{\left((\sqrt{P/P_c} - B)^2 - C\right)^{1/2}}. \tag{1}$$

Здесь z_R – длина Рэлея для пучка, распространяющегося в линейной среде, и $A = 0.366$, $B = 0.825$, $C = 0.03$. Увеличение точности расчетов позднее привело к немного другим значениям входящих в (1) констант: $A = 0.367$, $B = 0.852$ и $C = 0.0219$. Равенство (1) с этими значениями A, B и C получило название формулы Марбургера [18]. Ее значение трудно переоценить, так как она позволяет быстро оценить возможность возникновения самофокусировки, нежелательной во многих практических приложениях. Усиление строгости в описании распространения света, связанное с учетом его поляризационного самовоздействия (Мейкер–Терхьюновское вращение, нелинейная оптическая активность), продольной "диффузии" комплексной амплитуды электрического поля и, наконец, малой продольной составляющей поляризации электрического поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}(x, y, z, t)$, возникающей благодаря уравнению $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ в системе уравнений Максвелла, ограничивают минимальный радиус пучка и ограничивают интенсивность в фокусе. Это приводит к необходимости корректировки формулы (1).

Как правило, самофокусировка и филаментация света исследуются в приближении неизменности ли-

[1)]e-mail: vamakarov@phys.msu.ru

нейной или циркулярной поляризации света в процессе распространения. В этом же приближении получена формула Марбургера и ее немногочисленные модификации [19, 20]. Критические мощности, определяющие режимы самофокусировки эллиптически поляризованного света в изотропной среде с пространственной дисперсией кубической нелинейности, в которой при распространении света распределение его интенсивности теряет задаваемую на входе в среду гауссову форму, а поляризация становится неоднородной в плоскости поперечного сечения, в безаберрационном приближении определены в [21]. В среде, где компоненты тензора кубической нелинейности имеют разные знаки, в поперечном распределении распространяющегося пучка возможно появление кольцеобразных областей с чередующимся правым или левым вращением вектора напряженности электрического поля [22]. В случае аномальной частотной дисперсии импульсное излучение распадается на фрагменты с противоположными направлениями вращения вектора напряженности электрического поля [23]. В [24, 25] показано, что при самофокусировке изначально эллиптически поляризованного гауссова пучка в изотропной среде с различными механизмами кубической нелинейности возникают замкнутые линии сингулярности круговой поляризации (C-линии). Они появляются как в допороговых, так и в сверхпороговых режимах самовоздействия света и имеют в общем случае вид трехмерных кривых, форма которых близка к окружностям, лежащим в плоскости поперечного сечения пучка, центры которых находятся на его оси. При самофокусировке света в изотропной фазе жидких кристаллов в предпереходной области температур резко возрастает нелокальность нелинейного оптического отклика на внешнее световое поле. В этом случае образуется сложная система C-линий с правой и левой циркулярной поляризацией в его сечениях, близких к локальным экстремумам пиковых интенсивностей, соответствующих циркулярно поляризованных компонент электрического поля. Некоторые аспекты коллапса оптического пучка с определенным неоднородным распределением поляризации обсуждались в [19, 26].

В настоящей работе исследуется возможность использования соотношения близкого к формуле (1) в случае самофокусировки световых пучков гауссова профиля в изотропной гиротропной среде (класс симметрии $\infty\infty$), демонстрирующей пространственную дисперсию кубической нелинейности.

2. Постановка задачи. Пусть неоднородно поляризованный монохроматический световой пучок с частотой ω распространяется вдоль оси z цилиндрической системы координат $(\mathbf{r}, z)$ в изотропной гиротропной непоглощающей среде, обладающей пространственной дисперсией кубической нелинейности. Вектор напряженности его электрического поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ может быть выражен через медленно меняющуюся комплексную амплитуду $\mathbf{E}(\mathbf{r}, z)$:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, z, t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, z)\exp(\mathrm{i}(kz - \omega t))\right]. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{r} = (x, y)$, $k = n\omega/c$ – волновое число, n – линейный действительный показатель преломления среды, c – скорость света в вакууме. Возникающая при этом нелинейная поляризация среды $\mathbf{P}^{\mathrm{NL}} = \mathbf{P}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{loc}} + \mathbf{P}^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{nloc}}$, где

$$P^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{loc},i}(\omega) = \chi^{(3)}_{ijlm}(\omega; -\omega, \omega, \omega) E^*_j E_l E_m, \tag{3}$$

$$P^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{nloc},i}(\omega) = \gamma^{(3)}_{ijlmk}(\omega; -\omega, \omega, \omega) E^*_j E_l \partial_k E_m + \\ + \gamma^{(3)}_{ijlmk}(\omega; \omega, \omega, -\omega) E_j E_l \partial_k E^*_m. \tag{4}$$

В (3) и (4) индексы i, j, k, l и m принимают значения x, y и z. Ненулевые компоненты симметричного по перестановке последних двух индексов тензора локальной кубической восприимчивости $\hat{\chi}^{(3)}$ задаются двумя константами $\chi_{1,2}$ [2, 27, 28]: $\chi^{(3)}_{ijlm} = \chi_1(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}) + \chi_2\delta_{ij}\delta_{lm}$. Здесь δ_{ij} – символ Кронекера. Тензоры нелокальной кубической восприимчивости $\hat{\gamma}^{(3)}(\omega; -\omega, \omega, \omega)$ и $\hat{\gamma}^{(3)}(\omega; \omega, \omega, -\omega)$ характеризуют пространственную дисперсию нелинейной среды. В отсутствие поглощения второй из них тождественно равен нулю [29], а первый симметричен по перестановке индексов i и j [29]. Использование далее метода медленно меняющихся амплитуд [3] для описания распространения пучка позволяет упростить формулу (4)

$$P^{\mathrm{NL}}_{\mathrm{nloc},i} = ik\gamma^{(3)}_{ijlmz} E^*_j E_l E_m, \tag{5}$$

и делает тензор $\gamma^{(3)}_{ijlmz}$ в (5) дополнительно симметричным по перестановке индексов l и m. Все ненулевые компоненты такого тензора определяются единственной константой γ_1 [27, 28, 30]:

$$\gamma^{(3)}_{ijlmz}(\omega; -\omega, \omega, \omega) = \gamma_1(e_{izl}\delta_{jm} + e_{izm}\delta_{jl} + \\ + e_{jzl}\delta_{im} + e_{jzm}\delta_{il}), \tag{6}$$

где e_{ijk} – символ Леви–Чивиты. В этом случае волновое уравнение сводится к системе двух связанных уравнений параболического типа для медленно меняющихся амплитуд $E_{\pm} = (E_x \pm \mathrm{i}E_y)/\sqrt{2}$ циркулярно поляризованных компонент напряженности электрического поля:

$$\frac{\partial E_\pm}{\partial z} - \frac{\mathrm{i}}{2k}\left(\frac{\partial^2 E_\pm}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\pm}{\partial r}\right) = \pm \mathrm{i}\kappa_0 E_\pm + \\ + \frac{4\mathrm{i}k\chi_1}{n^2}\left[(1\pm\delta)|E_\pm|^2 + (1+\beta)|E_\mp|^2\right] E_\pm. \quad (7)$$

Здесь $\delta = 2k\gamma_1/\chi_1$, $\beta = \chi_2/\chi_1$, $\kappa_0 = 2\pi k^2\gamma_0/n^2$, n – линейный показатель преломления, γ_0 – константа, задающая все ненулевые компоненты тензора линейной гирации. От связанного с ней слагаемого в правой части (7) легко избавиться подстановкой $E_\pm = F_\pm \exp(\pm \mathrm{i}\kappa_0 z)$. Решение получившейся системы уравнений для $F_\pm$, совпадающей с (7) при $\kappa_0 = 0$, позволяет найти нормированную интенсивность $I = |E_+|^2 + |E_-|^2 = |F_+|^2 + |F_-|^2$, зависимость которой от пространственных координат представляет интерес при исследовании самофокусировки лазерного излучения. Константа κ_0 также не влияет на изменение степени эллиптичности эллипса поляризации $M = (|E_+|^2 - |E_-|^2)/I$, связанной с параметром $R = (1-\sqrt{1-M^2})/M$ при $M \neq 0$; и равным нулю при $M = 0$. Модуль R равен отношению длин малой и большой полуосей эллипса поляризации, а его знак совпадает со знаком M. Линейно поляризованному излучению соответствует $M = R = 0$, а циркулярно поляризованному – $M = R = \pm 1$ (в зависимости от направления вращения вектора напряженности электрического поля). Использование этого параметра полезно, поскольку изменение z_c от M, описанное далее, практически полностью сосредоточено в узких областях $0.9 < |M| < 1$, в то время как зависимости z_c от R значительно равномернее. Константа κ_0 дает только пропорциональный z вклад в угол поворота Φ главной оси эллипса поляризации в процессе распространения: $\Phi = \mathrm{Arg}(E_+ E_-^*)/2 = \kappa_0 z + \mathrm{Arg}(F_+ F_-)$.

Пусть на границу среды $z = 0$ падает осесимметричный эллиптически поляризованный лазерный пучок с гауссовым профилем амплитуды:

$$E_\pm(x,y,0) = E_0\sqrt{(1\pm M_0)/2}\,\exp\left(-r^2/w^2\right), \quad (8)$$

где E_0 – напряженность электрического поля в его центре, а $M_0 = M(r, z = 0)$. Для численного решения (7) с начальными условиями (8) использовалась схема ETD-CN [31] с конечно-разностной аппроксимацией производных по координате r. Координата распространения нормировалась на длину Рэлея $z_R = kw^2/2$, а $F_\pm$ на E_0. В итоге падающее излучение полностью задается двумя безразмерными параметрами: $P = 2\pi\chi_1 E_0^2 k^2 w_0^2/n^2$ и M_0, а среда – параметрами δ и β. Нашей задачей являлся подбор при разных фиксированных значениях M_0, δ и β таких троек независимых параметров $A(M_0,\delta,\beta)$, $B(M_0,\delta,\beta)$ и $P_c(M_0,\delta,\beta)$, при которых формула (1) наилучшим образом аппроксимирует зависимость $\zeta_c = z_c/z_R$ от P, полученную при численном решении уравнений (7).

3. Методика определения параметров формулы Марбургера. Прежде всего заметим, что B и C в формуле (1) не являются независимыми величинами. При стремлении P к P_c расстояние z_c, на котором происходит коллапс пучка, должно стремиться к бесконечности, а это возможно только если $C = (1-B)^2$. В наших расчетах для каждой комбинации параметров падающего излучения и нелинейной среды значение ζ_c определялось как координата слоя численной схемы, на котором величина $|E_+|^2 + |E_-|^2$ превышала E_0^2 более, чем в 1000 раз. Аппроксимация зависимости $\zeta_c(P)$ производилась по $N = 30$ значениям начальной безразмерной мощности P_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$, специальным образом выбранных в диапазоне от P_0 до $5P_0$, где $P_0(\beta, M) = \left[0.5 + \beta(1-M^2)/4\right]^{-1}$ — максимально возможное значение пороговой мощности самофокусировки гауссова пучка в негиротропной среде с керровской нелинейностью [25]. Оптимальные значения A, B и P_c определялись в результате минимизации суммы

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |\zeta'_{ci} - \zeta''_{ci}|^2, \quad (9)$$

где ζ'_{ci} – значение координаты коллапса пучка с начальной мощностью P_i, полученное при помощи численного моделирования его распространения, а ζ''_{ci} – соответствующее значение мощности, получаемое с помощью формулы (1). Для этого нами использовался метод дифференциальной эволюции [32], в котором в качестве начальных значений для параметров A и B выбирались величины, выполняющие эту роль в формуле Марбургера для линейно поляризованного излучения, т.е. $A = 0.367$ и $B = 0.852$, а для начальной безразмерной мощности P_c использовалось значение $0.9P_0$. Такой выбор обусловлен тем, что минимальное значение P_i, используемое в численных расчетах, было P_0. Поэтому его использование для получения зависимости (1) невозможно, так как при такой мощности искомая зависимость $\zeta_c(P)$ имеет сингулярность. Подчеркнем, что результаты поиска A, B и P_c практически не зависели от их начальных значений, если только они случайно не совпадали с теми, при которых искомая функция $\zeta_c(P)$ демонстрирует сингулярность.

Зависимость $\zeta_c(P)$, задаваемая формулой (1), асимптотически резко возрастает вблизи $P = P_c$ и плавно убывает при $P \to \infty$. Поэтому используемые для численного моделирования P_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ выбирались так, чтобы значения $\sqrt{\ln(P_i/P_0)}$ были равномерно распределены в диапазоне от 0 до $\sqrt{\ln 5}$. Это обеспечивало большую плотность точек в области низких мощностей падающего излучения, необходимую для надлежащей аппроксимации зависимости $\zeta_c(P)$. Пример полученной таким методом зависимости $\zeta_c(P)$ в случае самофокусировки лазерного пучка со степенью эллиптичности $M_0 = 0.8$ (отношение осей $R = 0.5$) в среде, демонстрирующей ориентационный механизм нелинейного оптического отклика ($\beta = 6$) изображен на рис. 1. Полученная в результате численного решения уравнений распространения зависимость $\zeta_c(P)$ и аналогичная кривая, построенная с помощью формулы (1) с найденными в результате аппроксимации значениями $A = 0.293$, $B = 0.744$ и $P_c = 0.857$, идеально совпадают. Среднеквадратичная ошибка $\sigma \approx 0.0047$.

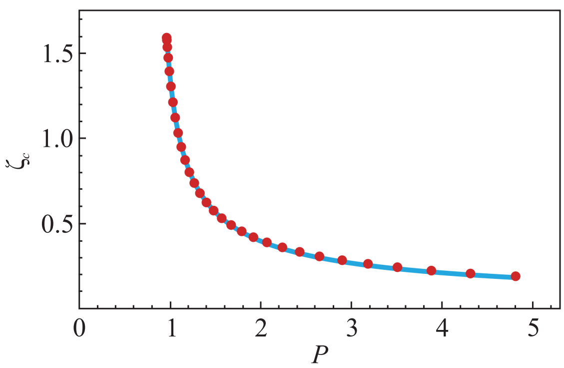

Рис. 1. (Цветной онлайн) Полученные в результате численного решения уравнений распространения зависимость $\zeta_c(P)$ (красные маркеры) и аналогичная кривая, построенная с помощью формулы (1) с найденными в результате аппроксимации $A = 0.293$, $B = 0.744$ и $P_c = 0.857$ (синяя линия) при $M_0 = 0.8$ $(R = 0.5)$, $\delta = 0$ и $\beta = 6$

4. Самофокусировка в среде без пространственной дисперсии. В негиротропной среде ($\kappa_0 = 0$ и $\delta = 0$) уравнения (7) для амплитуд $E_\pm$ становятся одинаковыми, а зависимости $A(M_0)$, $B(M_0)$ и $P_c(M_0)$ являются четными функциями M_0.

Для электрострикционного механизма нелинейности ($\beta = 0$) зависимость параметров A, B и P_c от степени эллиптичности падающего излучения полностью отсутствует. В этом случае при любых M_0 используемый алгоритм давал практически одинаковые значения $A(M_0) = 0.355$ и $B(M_0) = 0.801$, отличающиеся от входящих в формулу Марбургера соответственно на 3.5 и 6 %. При этом величина $P_c = 1.89$, что на 5.3 % ниже $P_0(M_0) = 2$. Среднеквадратичная ошибка всех данных аппроксимаций составляла менее $\sigma = 0.006$.

В случае электронного механизма нелинейности ($\beta = 1$) появляются незначительные зависимости A и B от M_0, изображенные на рис. 2a соответственно красными и синими маркерами. Для наглядности здесь и далее показаны не только зависимости A и B от M_0 (верхняя горизонтальная ось), но и A и B от R (нижняя горизонтальная ось). Из-за нелинейной связи M_0 и R возникает неравномерное масштабирование вдоль одной из осей. Для строго линейной ($M_0 = 0$) и строго циркулярной ($M_0 = \pm 1$) поляризаций $A(M_0) = 0.355$ и $B(M_0) = 0.801$. Эти значения отличаются от $A(0) = 0.367$ и $B(0) = 0.825$ соответственно на 3.5 и 6%. Максимальное значение A (B), равное 0.359 (0.803), достигается при $M_0 \approx 0.62$ $(M_0 \approx 0.98)$, а минимальное значение, равное 0.344 (0.748), – при $M_0 \approx 0.88$ $(M_0 \approx 0.55)$. Амплитуды изменения $A(M_0)$ и $B(M_0)$ соответственно равны $0.02A(0)$ и $0.07B(0)$, что соизмеримо с величиной их отличия от значений A и B в формуле Марбургера. Критическая мощность самофокусировки монотонно возрастает с увеличением степени эллиптичности (синие маркеры на рис. 2c) и составляет при разных M_0 от 94.1 % до 94.7 % от $P_0(\beta = 1, M_0) = \left[0.5 + (1 - M_0^2)/4\right]^{-1}$ (красные маркеры на рис. 2c). Максимальная сред-

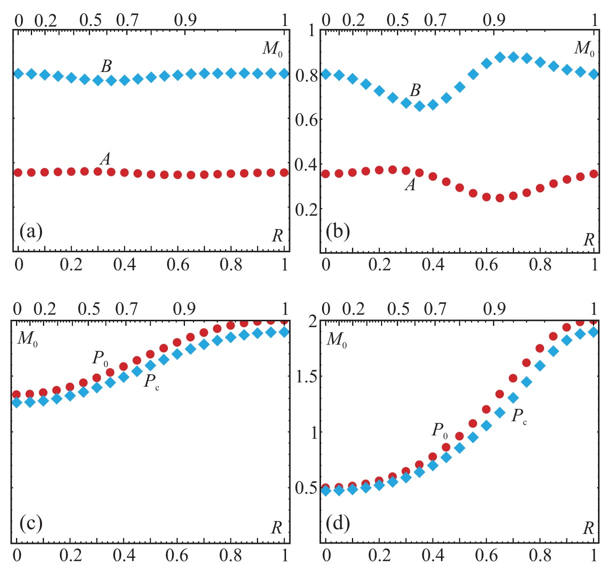

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимости параметров $A(M_0)$ и $B(M_0)$ (соответственно красные и синие маркеры на рис. (a) и (b)) и критической мощности самофокусировки и $P_0 = [0.5 + \beta(1 - M^2)/4]^{-1}$ (соответственно синие и красные маркеры на рис. (c) и (d)) от отношения длин осей эллипса поляризации падающего излучения при $\beta = 1$ ((a) и (c)) и $\beta = 6$ ((b) и (d))

неквадратичная ошибка данных аппроксимаций составляла $\sigma = 0.006$.

При ориентационном механизме нелинейности ($\beta = 6$) численное значение $A(M_0)$ при $M_0 = 0$, равное $= 0.354$, отличается от A, входящего в формулу Марбургера, на 3.5 %. С ростом степени эллиптичности функция $A(M_0)$ постепенно возрастает, достигая максимального значения 0.387 при $M_0 \approx 0.38$, после чего убывает вплоть до 0.247 при $M_0 \approx 0.91$ и далее возвращается к значению 0.354 при строго циркулярной поляризации падающего излучения (красные маркеры на рис. 2b). Параметр $B(M_0)$ изменяется практически точно в “противофазе” (синие маркеры на рис. 2b). Начиная от $B = 0.801$ при линейной поляризации, отличающегося от входящего в формулу Марбургера значения B на 6 %, функция $B(M_0)$ убывает до минимального значения 0.658, достигаемого при $M_0 \approx 0.62$, а затем возрастает и при $M_0 \approx 0.94$ достигает максимального значения, равного 0.880, а затем вновь убывает и достигает минимума 0.801 при строго циркулярной поляризации. При $\beta = 6$ амплитуды изменения $A(M_0)$ и $B(M_0)$ достаточно большие. Они составляют соответственно 39 и 27 % от $A(0)$ и $B(0)$. Критическая мощность самофокусировки монотонно возрастает с ростом M_0 (синие маркеры на рис. 2d), меняясь в пределах от 88 % до 95 % от $P_0(\beta = 6, M_0) = \left[0.5 + 3(1 - M_0^2)/2\right]^{-1}$ (красные маркеры на рис. 2d). Максимальная среднеквадратичная ошибка данных аппроксимаций составила $\sigma = 0.01$.

5. Самофокусировка в среде с пространственной дисперсией. В случае изотропной гиротропной среды с нелокальностью нелинейного оптического отклика ($\beta = 6$, $\delta \neq 0$) зависимости $A(M_0)$, $B(M_0)$ и $P_c(M_0)$, построенные при разных δ, перестают быть четными функциями M_0. Проведенные численные расчеты показали, что рост δ практически не сказывается на характере зависимости $A(M_0)$ и не смещает график этой функции, но увеличивает разность между абсолютными максимальным и минимальным значениями функции $B(M_0)$, а также сдвигает точки достижения ее локальных экстремумов в сторону положительных значений M_0 (рис. 3a). При этом с ростом δ усиливается небольшая несимметричность графиков $A(M_0)$ и $B(M_0)$ относительно оси $M_0 = 0$. Увеличение разности между максимальным и минимальным значениями функций $A(M_0)$ и $B(M_0)$ с ростом δ в случае положительных и отрицательных M_0 иллюстрирует табл. 1. В ней приведены абсолютные минимумы и максимумы функций $A(M_0)$ и $B(M_0)$ на отрезках $-1 \leq M_0 \leq 0$ и $0 \leq M_0 \leq 1$.

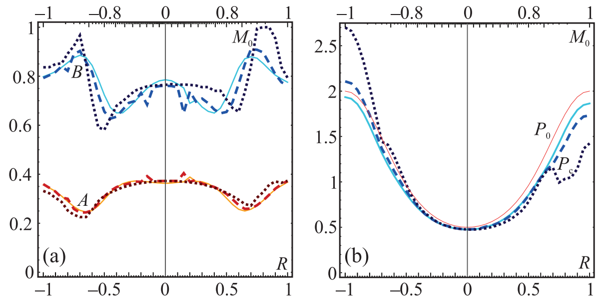

Рис. 3. (Цветной онлайн) (a) – Зависимости $A(M_0)$ (линии в теплых оттенках) и $B(M_0)$ (линии в холодных оттенках) от отношения длин осей эллипса поляризации падающего излучения при $\delta = 0.02$ (тонкие сплошные оранжевые и голубые линии), $\delta = 0.1$ (редкий красный и синий пунктир) и $\delta = 0.3$ (частый темно-красный и темно-синий пунктир). (b): Зависимости $P_c(M_0)$ при $\delta = 0.02$ (сплошная голубая линия), 0.1 (синий редкий пунктир), 0.3 (темно-синий частый пунктир). Тонкая красная линия – $P_0(M_0) = [0.5 + 3(1 - M^2)/2]^{-1}$

Таблица 1. Диапазоны изменения параметров $A(M_0)$ и $B(M_0)$ обобщенной формулы Марбургера для правой ($M_0 > 0$) и левой ($M_0 < 0$) эллиптических поляризаций излучения, падающего на изотропную гиротропную среду с ориентационной нелинейностью керровского типа

δ	A		B	
	$M \leq 0$	$M \geq 0$	$M \leq 0$	$M \geq 0$
0	$0.247 \div 0.387$		$0.658 \div 0.880$	
0.02	$0.246 \div 0.372$	$0.250 \div 0.389$	$0.650 \div 0.885$	$0.650 \div 0.879$
0.1	$0.243 \div 0.392$	$0.259 \div 0.404$	$0.627 \div 0.903$	$0.648 \div 0.909$
0.3	$0.225 \div 0.372$	$0.272 \div 0.373$	$0.582 \div 0.966$	$0.655 \div 1.000$

Рост δ приводит также к значительному увеличению P_c для падающего на среду эллиптически поляризованного пучка с $M_0 \approx -1$ (рис. 3b), которое настолько велико, что превышает $P_0(\beta = 6, M_0) = \left[0.5 + 3(1 - M_0^2)/2\right]^{-1}$, использованное для первоначальной оценки при нахождении $A(M_0)$, $B(M_0)$ и $P_c(M_0)$. При $\delta = 0.3$ наибольший рост пороговой мощности составляет 42.5 % при $M = -1$. Увеличение δ также существенно снижает P_c при $M_0 \approx 1$. При $\delta = 0.3$ наибольшее уменьшение пороговой мощности составляет 39.1 % при $M = 1$. Для $\delta \approx 0.01$ аналогичные изменения при $M_0 \approx -1$ и $M_0 \approx 1$ составляют менее 2 %.

6. Заключение. Основным и немного неожиданным результатом работы является утверждение о том, что превышение мощности P однородно эллиптически поляризованного лазерного пучка гауссова профиля над критическим значением P_c и расстояние z_c, на котором достигается одновременное его бесконечное сжатие и неограниченное возрастание его интенсивности, оказываются связанными соотношением, форма которого совпадает со знаменитой формулой Марбургера, изначально полученной в приближении неизменности линейной поляризации излучения, распространяющегося в среде с кубической нелинейностью. В то же время параметры A, B и $C = (1 - B)^2$ этого соотношения отличаются от аналогичных величин в формуле Марбургера и зависят от степени эллиптичности эллипса поляризации M_0 падающего излучения, от параметра β, определяющего механизм нелинейного оптического отклика (электрострикционный, электронный или ориентационный) и от параметра, характеризующего пространственную дисперсию кубической нелинейности. Их зависимость от M_0 всегда немонотонна и увеличение A в ней при изменении M_0 сопровождается одновременным уменьшением B и наоборот. Их отличие от аналогичных величин в формуле Марбургера тем сильнее, чем больше величина β. При этом для большинства практически важных ситуаций упомянутое отличие составляет несколько процентов. Можно осторожно утверждать, что вид связи между P/P_c и z_c скорее всего обусловлен начальным гауссовым поперечным пространственным распределением интенсивности на границе среды, а не состоянием его поляризации в случае, если она изначально одинакова в точках его поперечного сечения.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ **42**, 1567 (1962).
2. Y. R. Shen, *The principles of nonlinear optics*, J. Wiley, N.Y. (1984).
3. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, Успехи физических наук **93**, 19 (1967).
4. R. W. Boyd, S. G. Lukishova, and Y. R. Shen, *Self-focusing: Past and present: Fundamentals and prospects*, Springer, N.Y. (2009).
5. Г. А. Аскарьян, Успехи физических наук **111**, 249 (1973).
6. В. Н. Луговой, А. М. Прохоров, Успехи физических наук **111**, 203 (1973).
7. А. П. Сухоруков, Успехи физических наук **101**, 81 (1970).
8. С. В. Чекалин, В. О. Компанец, А. Е. Дормидонов, В. П. Кандидов, Успехи физических наук **189**, 299 (2019).
9. С. В. Чекалин, В. П. Кандидов, Успехи физических наук **183**, 133 (2013).
10. S. L. Chin. *Femtosecond laser filamentation*, Springer, N.Y. (2010).
11. S. L. Chin, S. A. Hosseini, W. Liu, Q. Luo, F. Théberge, N. Aközbek, A. Becker, V. P. Kandidov, O. G. Kosareva, and H. Schroeder, Can. J. Phys. **83**, 863 (2019).
12. A. Couairon and A. Mysyrowicz. Phys. Rep. **441**, 47 (2007).
13. L. Berge, S. Skupin, R. Nuter, J. Kasparian, and J.-P. Wolf, Rep. Prog. Phys. **70**, 1633 (2007).
14. J. Kasparian and J.-P. Wolf, Opt. Express **16**, 466 (2008).
15. В. П. Кандидов, С. А. Шленов, О. Г. Косарева, Квантовая электроника **39**, 205 (2009).
16. P. L. Kelley, Phys. Rev. Lett. **15**, 1005 (1965).
17. В. Н. Гольдберг, В. И. Таланов, Р. Э. Эрм, Известия Вузов. Радиофизика **10**, 674 (1967).
18. J. H. Marburger, Progress in Quantum Electronics **4**, 35 (1975).
19. L. Lu, Zh. Wang, and Y. Cai, Opt. Express **30**, 15905 (2022).
20. В. П. Кандидов, В. Ю. Федоров, Квантовая электроника **34**, 1163 (2004).
21. А. А. Голубков, В. А. Макаров, Известия Вузов. Радиофизика **31**, 1042 (1988).
22. А. А. Голубков, В. А. Макаров, И. А. Пережогин, Вестник Московского Университета **1**, 52 (2009).
23. В. А. Макаров, И. А. Пережогин, Н. Н. Потравкин, Оптика и спектроскопия **109**, 839 (2010).
24. N. A. Panov, V. A. Makarov, K. S. Grigoriev, M. S. Yatskevitch, and O. G. Kosareva, Physica D: Nonlinear Phenomena **332**, 73 (2016).
25. K. S. Grigoriev and V. A. Makarov, J. Opt. Soc. Am. B **36**, 1690 (2019).
26. R.-P. Chen, L.-Xi. Zhong, Kh.-H. Chew, T.-Y. Zhao, and X. Zhang, Laser Phys. **25**, 075401 (2015).
27. Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская, Основы кристаллофизики, Наука, М. (1979).
28. G. F. Smith, Ann. N. Y. Acad. Sci. **172**, 59 (1970).
29. P. S. Ryzhikov and V. A. Makarov, Laser Phys. Lett. **20**, 105401 (2023).
30. S. V. Popov, Yu. P. Svirko, and N. I. Zheludev, *Susceptibility tensor for nonlinear optics. 1995, Optics and optoelectronics series*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, Bristol (1995).
31. B. Kleefeld, A. Q. M. Khaliq, and B. A. Wade, Numerical Methods for Partial Differential Equations **28**, 1309 (2012).
32. M. F. Ahmad, N. A. M. Isa, W. H. Lim, and K. M. Ang, Alexandria Engineering Journal **61**, 3831 (2022).