Письма в ЖЭТФ, том 120, вып. 9, с. 728 – 732

Квантовые корреляции в коллективных стратегиях взаимного поиска/антипоиска для трех партнеров

А. М. Ростом[+*], *В. А. Томилин*[+1)], *Л. В. Ильичев*[+]

[+]*Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия*

[*]*Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 29 июля 2024 г.
После переработки 24 сентября 2024 г.
Принята к публикации 26 сентября 2024 г.

Рассматриваются модели стратегий совместного случайного блуждания трех участников на бесконечной плоскости. Они лишены связи, внешних ориентиров и какой-либо информации о взаимном положении, но могут использовать ресурс распределенной между ними трехчастичной квантовой спиновой спутанности в рамках предварительно согласованного протокола. Хотя в среднем всегда происходит взаимное удаление участников блуждания, выбором деталей протокола можно увеличить или уменьшить его темп.

DOI: 10.31857/S0370274X24110115, EDN: SEKAPW

Введение. Квантовые подходы к задачам обработки информации составляют основное содержание так называемой "второй квантовой революции". В приложении к проблемам, решаемым при заданных ресурсах (например, за ограниченное время) с некоторой нееденичной вероятностью, квантовые стратегии способны зачастую существенно увеличить шансы на успех. Во многих случаях необходимым ингредиентом в квантовых стратегиях оказывается запутанность [1] – специфические квантовые корреляции между частями единой системы. Изучение роли запутанности в сценариях решения задач коллективом участников составляет предмет так называемых нелокальных квантовых игр [2, 3], основным условием которых является невозможность обмена информацией между участниками после начала игры.

В ряде случаев разнесенность пространственных областей, где проводятся измерения, принципиально важна. Например, при реализации некоторой коллективной стратегии, когда каждому участнику необходимо осуществлять выбор своего действия из ряда возможных в отсутствие связи с партнерами. В этой ситуации исходы специально подобранных измерений над фрагментами единой системы, которыми заранее обзавелись участники, могут оказаться ценными инструкциями при осуществлении выборов, что повысит вероятность достижения цели стратегии [4]. Более сильные квантовые корреляции приводят к большей согласованности действий и, соответственно, большей вероятности успеха. В [5, 6] рассмотрена задача взаимного поиска двух участников, находящихся на противоположных полюсах сферы. Каждый из них выбирает путь к противоположному полюсу по одной из трех заранее определенных больших окружностей. Выбор окружностей осуществляется каждым участником независимо и случайно, однако направление обхода выбирается в зависимости от исхода измерения поляризации одного фотона из максимально запутанной пары. При этом угол измерения поляризации зависит от предшествовавшего выбора пути. Показано, что это приводит к повышению вероятности встречи с 7/9 в классическом случае до 5/6. Похожая задача, но в плоской геометрии, рассмотрена в [7]. Два участника осуществляют совместное дискретное случайное блуждание на плоскости, выбирая направление каждого смещения случайным образом из 16 возможных направлений. При этом распределение вероятности выбора не полностью случайно, а зависит от расстояния до фиксированной точки на плоскости. От результата квантового измерения зависит лишь то, останется ли участник в покое или сделает движение в выбранном направлении. Преимущество квантовой стратегии показано и в этом случае, однако лишь в рамках численного эксперимента.

В работе [8] был рассмотрен квантовый выигрыш в стратегиях уменьшения или увеличения темпов взаимного удаления при случайном блуждании двух партнеров, A и B, на бесконечной

1)e-mail: 8342tomilin@mail.ru

плоскости. Интуитивно ясно, что, если они имеют цель увеличить/уменьшить шансы случайного сближения/удаления, т.е. осуществляют взаимный поиск/антипоиск, данные стратегии могут оказаться полезными. По предположению партнеры лишены возможности общения и лишены общих ориентиров в пространстве, однако имеют ресурс корреляций в виде запаса пронумерованных пар частиц со спином $1/2$, причем каждый партнер обладает только одной частицей из каждой пары. Отсутствие любых общих ориентиров делает естественным требование равноправия всех направлений в плоскости блуждания, что, в свою очередь, налагает дополнительное требование на состояния пар частиц – они должны быть инвариантны относительно любых поворотов в пространстве. Естественным выбором в такой ситуации является синглетное состояние $|\Psi_0\rangle$. А и В руководствуются исходами измерений над своими частицами при выборе направлений шагов случайного блуждания. А именно, выбрав произвольные направления $\mathbf{n}_A$ и $\mathbf{n}_B$, партнеры измеряют удвоенные проекции спинов имеющихся у них частиц вдоль выбранных направлений. Получив исходы σ_A и σ_B (равные 1 или -1), А и В смещаются в пространстве на $\sigma_A \mathbf{n}_A l$ и $\sigma_B \mathbf{n}_B l$ соответственно, где l – стандартная длина шага. Дальнейшие шаги партнеров осуществляются по тому же самому алгоритму, т.е. с проведением измерений над частицами из следующей по порядку запутанной пары. В [8] показано, что средний квадрат расстояния между А и В после очередного шага при блуждании по плоскости

$$\langle r'^2 \rangle_+ = r^2 + l^2. \tag{1}$$

Здесь r – расстояние между партнерами до осуществления шага; усреднение осуществлено по случайным направлениям $\mathbf{n}_A$ и $\mathbf{n}_B$ и по распределению вероятности исходов σ_A и σ_B. Правая часть оказывается меньше, чем в ситуации с отсутствием всяких корреляций между исходами (т.е. если состояния пар частиц максимально смешанные):

$$\langle r'^2 \rangle_0 = r^2 + 2l^2. \tag{2}$$

В среднем А и В удаляются друг от друга более медленно при использовании спиновых корреляций синглетного состояния. Как показано в [8], модификация квантовой стратегии позволяет в случае необходимости ускорить взаимное удаление партнеров (в сравнении с (2)). Для этого партнер В (для определенности) должен смещаться на $-\sigma_B \mathbf{n}_B l$. Вместо (1) имеем

$$\langle r'^2 \rangle_- = r^2 + 3l^2. \tag{3}$$

Эффект использования корреляций спинов синглетного состояния, являющегося максимально запутанным [1], при сравнении (1) и (3) с (2) очевиден.

Представляет интерес сравнение полученных результатов со случаем, когда в распоряжении партнеров находится ресурс классических корреляций. Под этим термином здесь и далее в статье мы подразумеваем корреляции спинов частиц в незапутанном состоянии пары как антипод квантовых корреляций, демонстрируемых запутанными состояниями. Для случая пар частиц со спином $1/2$ наиболее общим классом состояний, инвариантных относительно вращений, являются состояния Вернера [9]:

$$\hat{\varrho}_W(p) = \frac{1-p}{4}\hat{1}_A \otimes \hat{1}_B + p|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0|. \tag{4}$$

Синглетному состоянию отвечает случай $p = 1$ – хрестоматийный пример максимально запутанного состояния. При $p \leq 1/3$ это состояние не является запутанным, т.е. представимо как взвешенные комбинации факторизованных и в общем случае смешанных состояний частиц [1]. Граничное значение $p = 1/3$ определяет незапутанное состояние Вернера, максимально близкое к синглетному и, следовательно, даваемые им корреляции самые сильные среди классических. В этом состоянии вместо (1) и (3) мы получаем $\langle r'^2 \rangle_+ = r^2 + 5l^2/3$ и $\langle r'^2 \rangle_- = r^2 + 7l^2/3$.

Соотношения (1) и (3) получены в рамках простейшего подхода к описанию случайного блуждания двух участников "игр" взаимного поиска и антипоиска. Цель настоящей работы – рассмотрение соответствующих стратегий для трех партнеров. Появление еще одного участника существенно меняет и усложняет рассмотрение, делая его более интересным. Будут найдены соотношения, аналогичные (1)–(3) и открывающие перспективы дальнейших обобщений при расширении коллектива участников "игры".

Модели стратегий. В ситуации с двумя участниками они обзаводились ресурсом в виде упорядоченных массивов разделенных синглетных пар частиц со спином $1/2$. Для случая трех участников, А, В и С, необходимы синглетные тройки частиц со спином 1:

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big[&|-1\rangle_A \otimes |0\rangle_B \otimes |1\rangle_C + \\ &+ |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B \otimes |-1\rangle_C + |1\rangle_A \otimes |-1\rangle_B \otimes |0\rangle_C - \\ &- |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B \otimes |-1\rangle_C - |0\rangle_A \otimes |-1\rangle_B \otimes |1\rangle_C - \\ &- |-1\rangle_A \otimes |1\rangle_B \otimes |0\rangle_C \Big]. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $|\sigma\rangle$ ($\sigma = 0, \pm 1$) – состояния частиц с проекцией спина σ вдоль любого, но единого для всех трех частиц направления. Нижние индексы у кет-символов показывают, у какого партнера находится соответствующая частица. При измерении всеми партнерами проекций спинов их частиц вдоль свободно выбранных направлений $\mathbf{n}_A$, $\mathbf{n}_B$ и $\mathbf{n}_C$ статистика получаемых исходов дается распределением вероятностей

$$p(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C | \mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B, \mathbf{n}_C) = \\ = \langle \Psi_0 | \hat{P}_{\sigma_A}(\mathbf{n}_A) \otimes \hat{P}_{\sigma_B}(\mathbf{n}_B) \otimes \hat{P}_{\sigma_C}(\mathbf{n}_C) | \Psi_0 \rangle, \tag{6}$$

где

$$\hat{P}_\sigma(\mathbf{n}) = 1 - \sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma(\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{S}}) + \left(\frac{3}{2}\sigma^2 - 1\right)(\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{S}})^2 \tag{7}$$

– проектор на собственное состояние оператора $\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{S}}$ ($\hat{\mathbf{S}}$ – спин частицы) с собственным значением σ. При выводе (7) использована универсальная связь произведения трех операторных проекций единичного квантового углового момента на оси ортонормированного репера с комбинацией слагаемых, линейных и квадратичных по проекциям. Соответствующее соотношение приведено в Приложении, как и явная громоздкая форма вероятности (6).

Суммирование по исходам одного из измерений (для определенности по исходам σ_C) приводит к парным распределениям вида

$$p(\sigma_A, \sigma_B | \mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B) = \frac{1}{6} - \frac{1}{12}\left(\sigma_A^2 + \sigma_B^2\right) + \frac{1}{8}\sigma_A^2\sigma_B^2 - \\ - \frac{1}{12}\sigma_A\sigma_B(\mathbf{n}_A\cdot\mathbf{n}_B) - \\ - \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\sigma_A^2 - 1\right)\left(\frac{3}{2}\sigma_B^2 - 1\right)(\mathbf{n}_A\cdot\mathbf{n}_B)^2. \tag{8}$$

Еще одно суммирование приводит к тривиальным однородным распределениям исходов измерений, рассматриваемых по отдельности:

$$p(\sigma_A|\mathbf{n}_A) = p(\sigma_B|\mathbf{n}_B) = p(\sigma_C|\mathbf{n}_C) = \frac{1}{3}. \tag{9}$$

Однородность распределений обусловлена инвариантностью состояния (5) относительно любых пространственных поворотов.

Знание парных распределений (8) достаточно для получения соотношений типа (1)–(3). Их комбинация позволяет связать среднее значение суммы квадратов расстояний между всеми партнерами (естественное обобщение случая с двумя партнерами)

$$|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|^2 + |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C|^2 + |\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A|^2 \tag{10}$$

после очередного совместного шага с ее исходным значением. Заметим, однако, что при переходе от полного распределения (6) к парным распределениям (8) была утрачена некоторая информация о трехчастичной спутанности. Чтобы не терять эту информацию, желательно найти способ характеризовать взаимное движение всех трех участников "игры", отражающий трехчастичные корреляции. Для этой цели годится площадь треугольника, образованного точками расположения участников A, B и C. Этот выбор подходит и для случая движения игроков в трехмерном пространстве. Формула Герона Александрийского

$$16S^2 = (2b^2c^2 - a^4) + (2c^2a^2 - b^4) + (2a^2b^2 - c^4) \tag{11}$$

связывает квадрат площади треугольника с длинами его сторон $a \doteq |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C|$, $b \doteq |\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A|$ и $c \doteq |\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|$.

Все три участника осуществляют измерения проекций спинов их частиц (находящихся в состоянии (5)) вдоль произвольно выбранных направлений $\mathbf{n}_A$, $\mathbf{n}_B$ и $\mathbf{n}_C$ на плоскости. Получив исходы $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$, участники смещаются. Новый треугольник имеет стороны $a' \doteq |\mathbf{r}_B + l\sigma_B\mathbf{n}_B - \mathbf{r}_C - l\sigma_C\mathbf{n}_C|$, $b' \doteq |\mathbf{r}_C + l\sigma_C\mathbf{n}_C - \mathbf{r}_A - l\sigma_A\mathbf{n}_A|$ и $c' \doteq |\mathbf{r}_A + l\sigma_A\mathbf{n}_A - \mathbf{r}_B - l\sigma_B\mathbf{n}_B|$. Площадь нового треугольника оказывается функцией направлений смещений и исходов измерений:

$$S' = S(\sigma_A\mathbf{n}_A, \sigma_B\mathbf{n}_B, \sigma_C\mathbf{n}_C). \tag{12}$$

Усреднение квадрата площади производится по распределению (6) с учетом полной случайности выбора направлений участниками "игры":

$$\langle S'^2 \rangle = \\ \sum_{\sigma_A=0,\pm1}\sum_{\sigma_B=0,\pm1}\sum_{\sigma_C=0,\pm1}\iiint S^2(\sigma_A\mathbf{n}_A, \sigma_B\mathbf{n}_B, \sigma_C\mathbf{n}_C) \times \\ \times p(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C|\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B, \mathbf{n}_C)\frac{d^2\mathbf{n}_A}{2\pi}\frac{d^2\mathbf{n}_B}{2\pi}\frac{d^2\mathbf{n}_C}{2\pi}. \tag{13}$$

Следует отметить, что первые слагаемые в круглых скобках правой части (11) требуют при своем усреднении знания полного распределения (6). В получаемом результате усреднения отражено трехчастичное спутывание.

Вычисление интеграла (13) дает

$$16\langle S'^2\rangle - 16S^2 = \frac{15}{9}l^2(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{153}{12}l^4. \tag{14}$$

Вид числовых коэффициентов в правой части выбран для удобства сравнения с результатами других стратегий. В случае полного отсутствия корреляций под интегралом (13) вместо $p(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C|\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B, \mathbf{n}_C)$ стоит $p(\sigma_A|\mathbf{n}_A)p(\sigma_B|\mathbf{n}_B)p(\sigma_C|\mathbf{n}_C) = 1/27$, что дает

$$16\langle S'^2\rangle - 16S^2 = \frac{12}{9}l^2(a^2+b^2+c^2) + \frac{32}{12}l^4. \quad (15)$$

Сравнение (14) с этим нейтральным реперным вариантом обнаруживает увеличение темпа взаимного удаления участников "игры" за счет ресурса распределенной спутанности.

Существует стратегия уменьшения темпа рассредоточения и, как следствие, повышения вероятности случайного сближения партнеров. Ориентируясь на известный более простой случай двух участников, естественно ожидать, что для этого необходима замена σ на $-\sigma$ при выборе направления смещения одним из участников. В то же время должна сохраниться симметрия участия в стратегии всех трех партнеров. Эти требования можно совместить, если по условиям стратегии A осуществляет замену σ_A на $-\sigma_A$ на каждом шаге с номером $1(mod\,3)$, B меняет σ_B на $-\sigma_B$ на каждом шаге с номером $2(mod\,3)$ и C, соответственно, меняет σ_C на $-\sigma_C$ на каждом шаге с номером $0(mod\,3)$. Случайно выбранный для рассмотрения шаг с равной вероятностью принадлежит к одному из трех возможных типов. Следовательно, в (13) должна быть осуществлена замена

$$\begin{aligned} &S^2(\sigma_A\mathbf{n}_A, \sigma_B\mathbf{n}_B, \sigma_C\mathbf{n}_C) \to \\ &\to \frac{1}{3}S^2(-\sigma_A\mathbf{n}_A, \sigma_B\mathbf{n}_B, \sigma_C\mathbf{n}_C) + \\ &+ \frac{1}{3}S^2(\sigma_A\mathbf{n}_A, -\sigma_B\mathbf{n}_B, \sigma_C\mathbf{n}_C) + \\ &+ \frac{1}{3}S^2(\sigma_A\mathbf{n}_A, \sigma_B\mathbf{n}_B, -\sigma_C\mathbf{n}_C). \end{aligned} \quad (16)$$

В результате получаем

$$16\langle S'^2\rangle - 16S^2 = \frac{11}{9}l^2(a^2+b^2+c^2) + \frac{25}{12}l^4. \quad (17)$$

Взаимное удаление участников оказывается в среднем замедленным в сравнении с реперным вариантом (15).

Обсуждение. Мы показали, что, как и в случае двух участников, существуют стратегии увеличения и уменьшения среднего темпа взаимного удаления трех партнеров при их случайном блуждании[2)]. В контексте этого обобщения можно высказать ряд соображений и наметить возможные направления дальнейших исследований.

Как обобщение квадрата расстояния между двумя партнерами, мы использовали площадь треугольника, образованного положениями трех партнеров. Для случая стратегии с четырьмя участниками, разворачивающейся в пространстве, очевидным обобщением оказывается объем трехмерного симплекса. Дальнейшее увеличение числа участников побуждает обращение к объемам выпуклых многогранников – проекциям на 2-х или 3-х мерные пространства симплексов высших размерностей. Однако практическая реализация такого обобщения может оказаться весьма непростой ввиду более сложных многочастичных распределений вероятностей исходов измерений, аналогичных (6).

При числе партнеров более трех встает вопрос правильного выбора формы распределяемого ресурса корреляций – вида синглетных состояний. Мы использовали синглетные пары частиц со спином $1/2$ и синглетные тройки со спином 1, ориентируясь на выбор наименьшей возможной величины спина. При этом состояния автоматически оказались полностью антисимметричными по перестановкам частиц, что обеспечивает естественное требование равных условий для всех участников "игры". Если число участников N, аналогичными свойствами обладают синглетные состояния, построенные из N частиц спина $(N-1)/2$. В иных случаях в коллективе участников могут возникать кластеры, для входящих в которые условия игры отличаются от средних[3)].

Площади треугольника S как параметру, характеризующему близость частиц, было отдано предпочтение перед простой суммой квадратов длин его сторон $a^2+b^2+c^2$. Мотивом послужила чувствительность S к трехчастичным корреляциям, в то время как изменение $a^2+b^2+c^2$ можно анализировать в рамках парных маргинальных распределений типа (8). Пользуясь принципом максимума энтропии,

---

[2)] Как и в работе [8], возможен "геометродинамический" взгляд на данные явления. Если рассматривать реперный вариант случайного блуждания как своего рода броуновское движение партнеров под действием эффективных случайных сил, то стратегии с использованием корреляций следует ассоциировать с появлением дополнительных эффективных сил отталкивания (в (14)) и притяжения (в (17)). В [8] показано, что эти силы можно описать в рамках эффективных геометрий, заменяющих геометрию обычной плоскости, т.е. как "гравитацию"(для притяжения) и "антигравитацию" (для отталкивания).

[3)] Например, оба синглетных состояния четырех частиц со спином $1/2$ антисимметричны по перестановке частиц, входящих в две выделенные пары. При этом состояния не являются ни симметричными, ни антисимметричными по перестановке частиц из разных пар. В то же время для четырех частиц со спином $3/2$ существует полностью антисимметричное синглетное состояние. В случае четырех частиц со спином 1 одно из трех синглетных состояний также будет обладать одинаковой симметрией относительно любых перестановок частиц – однако оно будет полностью симметричным, а не полностью антисимметричным [10].

потенциально возможно на основе этих парных распределений построить эффективное распределение $p_{\rm eff}(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C|\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B, \mathbf{n}_C)$ для трех исходов. Это позволило бы, заменив при всех усреднениях истинное распределение $p(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C|\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B, \mathbf{n}_C)$ полученным эффективным распределением, в явном виде выделить эффект трехчастичной спутанности в (14) и (17). Таким образом, получилось бы сформулировать оригинальный операционный подход к анализу многочастичной запутанности, альтернативный традиционному подходу, основанному на анализе частичных матриц плотности [1, 4]. Это позволило бы также, аналогично случаю с двумя партнерами, найти границы эффективности стратегий, использующих корреляции только классического типа.

Приложение

При вычислениях в данной работе используется обобщение известного выражения, связывающего произведения пар операторов проекций спина 1/2 (пропорциональных матрицам Паули) с комбинацией членов первой и нулевой степени по таким операторам, на случай операторных проекций спина 1:

$$\hat{S}_i\hat{S}_j\hat{S}_k = \frac{1}{2}(\delta_{ij}\hat{S}_k + \hat{S}_i\delta_{jk}) + \frac{\imath}{4}\varepsilon_{ijk'}(\hat{S}_{k'}\hat{S}_k + \hat{S}_k\hat{S}_{k'}) + $$
$$+ \frac{\imath}{4}\varepsilon_{ij'k}(\hat{S}_{j'}\hat{S}_j + \hat{S}_j\hat{S}_{j'}) + \frac{\imath}{4}\varepsilon_{i'jk}(\hat{S}_{i'}\hat{S}_i + \hat{S}_i\hat{S}_{i'}).$$

Выражение для распределения вероятностей (6) исходов измерений проекций спинов частиц:

$$p(\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C|\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B, \mathbf{n}_C) =$$
$$(1-\sigma_A^2)(1-\sigma_B^2)(1-\sigma_C^2) +$$
$$+ \left(\frac{3}{2}\sigma_A^2 - 1\right)\left(\frac{3}{2}\sigma_B^2 - 1\right)\left(\frac{3}{2}\sigma_C^2 - 1\right) \times$$
$$\times \langle(\mathbf{n}_A\cdot\hat{\mathbf{S}}_A)^2(\mathbf{n}_B\cdot\hat{\mathbf{S}}_B)^2(\mathbf{n}_C\cdot\hat{\mathbf{S}}_C)^2\rangle +$$
$$\left[\left(\frac{3}{2}\sigma_A^2 - 1\right)(1-\sigma_B^2)(1-\sigma_C^2)\langle(\mathbf{n}_A\cdot\hat{\mathbf{S}}_A)^2\rangle + \right.$$
$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\sigma_A^2 - 1\right)\sigma_B\sigma_C\langle(\mathbf{n}_A\cdot\hat{\mathbf{S}}_A)^2(\mathbf{n}_B\cdot\hat{\mathbf{S}}_B)(\mathbf{n}_C\cdot\hat{\mathbf{S}}_C)\rangle +$$
$$\frac{1}{4}(1-\sigma_A^2)\sigma_B\sigma_C\langle(\mathbf{n}_B\cdot\hat{fS}_B)(\mathbf{n}_C\cdot\hat{\mathbf{S}}_C)\rangle +$$
$$\left. +(1-\sigma_A^2)\left(\frac{3}{2}\sigma_B^2 - 1\right)\left(\frac{3}{2}\sigma_C^2 - 1\right)\langle(\mathbf{n}_B\cdot\hat{\mathbf{S}}_B)^2(\mathbf{n}_C\cdot\hat{\mathbf{S}}_C)^2\rangle\right] +$$
$$+ \Big[A\to B\to C\to A\Big] + \Big[A\to C\to B\to A\Big].$$

Две последние пары квадратных скобок символизируют комбинации слагаемых, получаемых из явно выписанных в первой паре квадратных скобок, отмеченной заменой индексов. Здесь использована более короткая форма записи усредняемых операторных выражений, например, $\langle(\mathbf{n}_B\cdot\hat{\mathbf{S}}_B)^2(\mathbf{n}_C\cdot\hat{\mathbf{S}}_C)^2\rangle \equiv$ $\equiv \langle\Psi_0|\hat{1}\otimes(\mathbf{n}_B\cdot\hat{\mathbf{S}})^2\otimes(\mathbf{n}_C\cdot\hat{\mathbf{S}})^2|\Psi_0\rangle$.

Ниже приведены результаты вычисления всех возможных типов усредняемых операторов

$$\langle(\mathbf{n}_A\cdot\hat{\mathbf{S}}_A)\rangle = \langle(\mathbf{n}_B\cdot\hat{\mathbf{S}}_B)\rangle = \langle(\mathbf{n}_C\cdot\hat{\mathbf{S}}_C)\rangle = 0$$
$$\langle(\mathbf{n}_A\cdot\hat{\mathbf{S}}_A)(\mathbf{n}_B\cdot\hat{\mathbf{S}}_B)(\mathbf{n}_C\cdot\hat{\mathbf{S}}_C)\rangle = 0$$
$$\langle(\mathbf{n}_A\cdot\hat{\mathbf{S}}_A)^2\rangle = \langle(\mathbf{n}_B\cdot\hat{\mathbf{S}}_B)^2\rangle = \langle(\mathbf{n}_C\cdot\hat{\mathbf{S}}_C)^2\rangle = \frac{2}{3}$$
$$\langle(\mathbf{n}_A\cdot\hat{\mathbf{S}}_A)(\mathbf{n}_B\cdot\hat{\mathbf{S}}_B)\rangle = -\frac{1}{3}(\mathbf{n}_A\cdot\mathbf{n}_B)$$
$$\langle(\mathbf{n}_A\cdot\hat{\mathbf{S}}_A)(\mathbf{n}_B\cdot\hat{\mathbf{S}}_B)(\mathbf{n}_C\cdot\hat{\mathbf{S}}_C)^2\rangle =$$
$$= -\frac{1}{3}(\mathbf{n}_A\cdot\mathbf{n}_B) + \frac{1}{3}(\mathbf{n}_C\cdot\mathbf{n}_A)(\mathbf{n}_B\cdot\mathbf{n}_C)$$
$$\langle(\mathbf{n}_A\cdot\hat{\mathbf{S}}_A)^2(\mathbf{n}_B\cdot\hat{\mathbf{S}}_B)^2\rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}(\mathbf{n}_A\cdot\mathbf{n}_B)^2$$
$$\langle(\mathbf{n}_A\cdot\hat{\mathbf{S}}_A)^2(\mathbf{n}_B\cdot\hat{\mathbf{S}}_B)^2(\mathbf{n}_C\cdot\hat{\mathbf{S}}_C)^2\rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\times$$
$$\times\left[(\mathbf{n}_A\cdot\mathbf{n}_B)^2 + (\mathbf{n}_B\cdot\mathbf{n}_C)^2 + (\mathbf{n}_C\cdot\mathbf{n}_A)^2 + (\mathbf{n}_A\mathbf{n}_B\mathbf{n}_C)^2\right].$$

Здесь $(\mathbf{n}_A\mathbf{n}_B\mathbf{n}_C) \doteq \mathbf{n}_A\cdot(\mathbf{n}_B\times\mathbf{n}_C)$ – тройное произведение. Оно начинает играть роль при блуждании в трехмерном пространстве.

Финансирование работы. Работа выполнена в рамках Государственного задания (проект # 124041700105-5) в Институте автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009).
2. J. Eisert, M. Wilkens, and M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **83**, 3077 (1999).
3. D. A. Meyer, Phys. Rev. Lett. **82**, 1052 (1999).
4. N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, and S. Wehner, Rev. Mod. Phys. **86**, 419 (2014).
5. C. Brukner, N. Paunkovic, T. Rudolph, and V. Vedral, Int. J. Quant. Inform. **4**, 219 (2006).
6. F.A. Bovino and M. Giardina, Int. J. Quantum Inf. **5**, 43 (2007).
7. J. Summhammer, arXiv:quant-ph/0503136v2 (2006).
8. A. M. Rostom, V. A. Tomilin, and L. V. Il'ichov, Chin. J. Phys. **90**, 1095 (2024).
9. R. F. Werner, Phys. Rev. A **40**, 4277 (1989).
10. М. Хамермеш, *Теория групп и ее приложения к физическим проблемам*, Мир, М. (1966).