Письма в ЖЭТФ, том 120, вып. 10, с. 745 – 751 © 2024 г. 25 ноября

Мелкомасштабные световые структуры в керровской среде

В. П. Рубан[1)]

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 25 сентября 2024 г.
После переработки 8 октября 2024 г.
Принята к публикации 9 октября 2024 г.

Для монохроматической слабонелинейной световой волны в керровской среде предложена система уравнений, которая до третьего порядка по амплитуде электрического поля эквивалентна известному уравнению $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = k_0^2[\mathbf{E}+\alpha|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}+\beta(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}^*]$, но при этом новые уравнения гораздо более удобны для численного счета. В рамках этой системы промоделированы оптические поля с мелкими структурами всего в две-три длины волны. Обнаружено, что в некоторой области параметров возможен устойчивый самосфокусированный световой пучок (двумерный векторный солитон), и для этого модификация нелинейности совсем не обязательна. Рассчитаны "неупругие" столкновения двух таких тонких лучей, имеющих противоположные круговые поляризации. Кроме того, для дефокусирующей нелинейности приведены примеры взаимодействующих оптических вихрей, пространственного разделения круговых поляризаций, а также неустойчивости Кельвина–Гельмгольца.

Введение. Как известно, монохроматическая световая волна в прозрачной оптической среде с керровской нелинейностью описывается векторным нелинейным уравнением [1]

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = k_0^2[\mathbf{E} + \alpha|\mathbf{E}|^2\mathbf{E} + \beta(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}^*], \qquad (1)$$

где $\mathbf{E}(x, y, z)$ – комплексная амплитуда главной гармоники электрического поля, k_0 – волновое число, α и β – коэффициенты нелинейности (причем в пределе мгновенного нелинейного отклика имеет место равенство $\beta = \alpha/2$). С помощью этого уравнения в принципе можно изучать очень широкий круг явлений, имеющих место в распространяющейся волне на малых масштабах, например, – внутреннюю пространственную динамику интенсивных узких световых пучков и их взаимодействие друг с другом с учетом обеих поляризаций. Другое очевидное применение – исследование нелинейных эффектов вблизи фокуса непараксиальной (т.е. собирающей свет под довольно широким углом) линзы. Но, к сожалению, уравнение (1) оказывается не вполне удобным, если "назначить" какую-либо из декартовых координат в качестве эволюционной переменной. Например, если имеются в виду волны, распространяющиеся в среднем вдоль оси z, то система не содержит эволюционных производных $\partial_z E_z$ либо $\partial_z^2 E_z$, зато продольная компонента поля подчиняется сложному уравнению эллиптического типа по поперечным координатам. Эта трудность заставляет искать альтернативные подходы (см., например, [2–9] и ссылки там). Наиболее популярным приближением является система связанных нелинейных уравнений Шредингера (НУШ), когда амплитуды $A_{1,2}(x, y, z)$ левой и правой круговых поляризаций в выражении

$$\mathbf{E} \approx \left[(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)A_1 + (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)A_2\right]\exp(ik_0 z)/\sqrt{2} \quad (2)$$

предполагаются медленными функциями. При полном пренебрежении продольной компонентой, получается пара НУШ [2]

$$-2ik_0\partial_z A_{1,2} = \Delta_\perp A_{1,2} + \alpha k_0^2\Big[|A_{1,2}|^2 + g|A_{2,1}|^2\Big]A_{1,2}, \qquad (3)$$

где параметр перекрестной фазовой модуляции $g = 1 + 2\beta/\alpha$. Эта система соответствует двум взаимодействующим квантовым жидкостям с плотностями $I_{1,2} = |A_{1,2}|^2$, причем количество каждой из них сохраняется вдоль z. Вообще, аналогия между светом и бимодальной квантовой жидкостью простирается довольно далеко (см., например, [3–5] и ссылки там).

В случае фокусирующей нелинейности (положительные α и β) из уравнений (3) следует хорошо известный результат о невозможности устойчивых двумерных солитонов – волновой пакет либо расплывается за счет дифракции, либо коллапсирует за счет нелинейности (см. [10, 11] и ссылки там). В качестве механизмов, противодействующих коллапсу на мелких масштабах (порядка длины волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0$), обычно рассматривают насыщение нелинейности либо даже смену ее знака при больших интенсивностях поля (см., например, [12–15]). Но это означает выход за рамки третьего порядка по амплитуде. Оставаясь в третьем порядке, можно попытаться учесть непараксиальные поправки, обусловленные неучтенными

[1)]e-mail: ruban@itp.ac.ru

в (3) членами. Модифицированные НУШ оказываются довольно сложными и при этом не вполне надежными, а их решение возможно только численными методами [6–8]. Поэтому при исследовании мелкомасштабных структур есть смысл с самого начала сосредоточиться на непертурбативных по поперечным волновым числам моделях.

В данной работе предлагается достаточно простой способ обойти трудности, связанные с векторной природой уравнения (1). Здесь представлена удобная для численного моделирования система уравнений, которая только начиная с пятого порядка по амплитуде поля отличается от исходного уравнения (1). Компьютерные эксперименты в рамках этой модели демонстрируют существование периодически самофокусирующихся оптических пучков (см. примеры на рис. 1, 2). Надо сказать, что подобное поведение уже наблюдалось ранее в некоторых численных работах, использующих менее аккуратные модели [7–9]. В пределе малой амплитуды радиальных колебаний это есть не что иное, как устойчивые двумерные солитоны (тонкие однородные по z лучи света), баланс которых достигается за счет нелинейной дифракции. Будет также представлен ряд других интересных численных примеров, демонстрирующих возможности нового подхода.

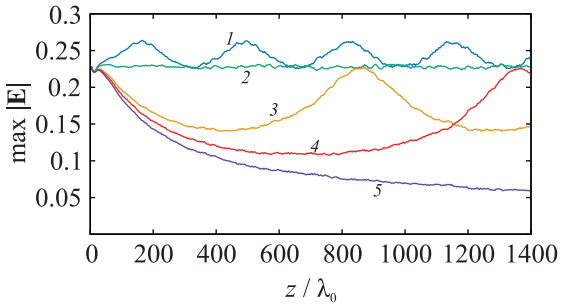

Рис. 1. (Цветной онлайн) Примеры зависимостей максимальной амплитуды поля при повторной самофокусировке для нескольких различных начальных ширин светового пучка (см. подробности в тексте).

Модель. Для начала вспомним тот известный факт, что в линейном случае замена зависимых переменных $\mathbf{E} = \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})/k_0^2$ расцепляет компоненты векторного уравнения $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = k_0^2\mathbf{E}$ и приводит к трем скалярным уравнениям Гельмгольца для компонент вектора $\mathbf{u}$, поскольку член $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ благополучно сокращается. Идея теперь состоит в использовании для нелинейного уравнения (1) похожей подстановки

$$\mathbf{E} = U_1\mathbf{e}_x + U_2\mathbf{e}_y + \nabla(\partial_x U_1 + \partial_y U_2)/k_0^2 + \nabla\phi, \quad (4)$$

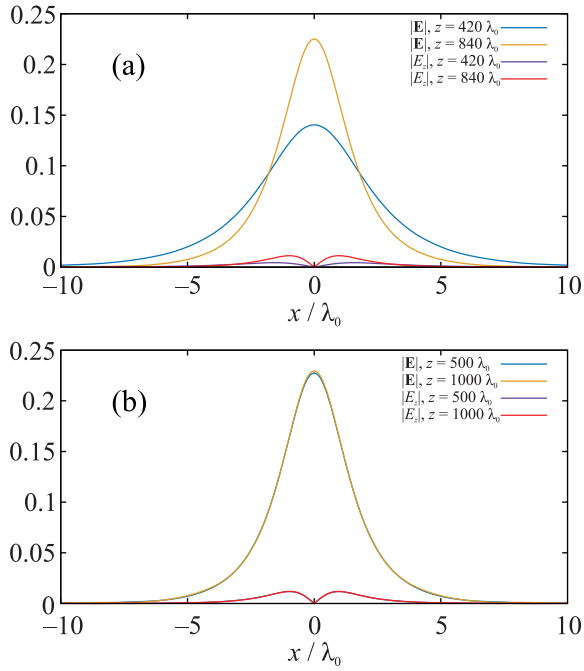

Рис. 2. (Цветной онлайн) Профили амплитуды поля: (a) – при минимальной и максимальной фокусировке периодически самофокусирующегося пучка, соответствующего линии *3* из рис. 1; (b) – в двух сечениях приблизительно сбалансированного пучка, соответствующего линии *2* из рис. 1 (в этом случае графики для разных z практически сливаются в один)

где компоненты $U_1(x, y, z)$ и $U_2(x, y, z)$ поперечного вектора $\mathbf{U}$ имеют первый порядок малости, а дополнительный скалярный потенциал $\phi(x, y, z)$ – величина третьего порядка малости, обусловленная нелинейностью. Обозначим для краткости

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} + \nabla_\perp(\nabla_\perp \cdot \mathbf{U})/k_0^2 + \mathbf{e}_z(\nabla_\perp \cdot \partial_z\mathbf{U})/k_0^2. \quad (5)$$

Поле $\mathbf{F}$ в главном порядке совпадает с $\mathbf{E}$, так что трехмерная векторная структура электрического поля в основном определяется всего двумя скалярными функциями – компонентами $U_1(x, y, z)$ и $U_2(x, y, z)$ (в том числе учитывается продольная компонента E_z – последнее слагаемое в (5).

Важно, что при подстановке выражения (4) в уравнение (1) в нелинейных слагаемых функцию ϕ можно не учитывать, поскольку соответствующие вклады имели бы пятый порядок и выше. В результате для поперечного вектора $\mathbf{U}$ мы получаем уравнение

$$-(\partial_z^2 + \Delta_\perp)\mathbf{U} = k_0^2[\mathbf{U} + \nabla_\perp\phi + \alpha|\mathbf{F}|^2\mathbf{F}_\perp + \beta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{F})\mathbf{F}_\perp^*]. \quad (6)$$

В продольной компоненте уравнения (1) не остается членов первого порядка малости:

$$-\partial_z\phi = \alpha|\mathbf{F}|^2 F_z + \beta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{F})F_z^*. \qquad (7)$$

Уравнения (5)–(7) и есть наша модель. Нелинейно-дифракционные эффекты в ней обусловлены присутствием производных в выражении (5).

Численный метод. Поскольку каждое из уравнений (6) и (7) разрешено относительно соответствующей старшей производной по z, эта система допускает довольно простое численное моделирование псевдоспектральным методом. Следует, однако, учесть необходимость регуляризации нелинейных уравнений на поперечных волновых векторах $\mathbf{k}_\perp$, превышающих k_0 по абсолютной величине, поскольку на больших $|\mathbf{k}_\perp|$ закон дисперсии $k_z^2 = (k_0^2 - |\mathbf{k}_\perp|^2)$ не соответствует распространяющимся волнам. В нашем случае была использована регуляризация закона дисперсии

$$(k_0^2 - |\mathbf{k}_\perp|^2) \to k_0^2 - |\mathbf{k}_\perp|^2[1 + |\mathbf{k}_\perp|^8/k_0^8]^{-1/4}. \qquad (8)$$

Кроме того, после каждого шага интегрирования системы по координате z методом Рунге–Кутта 4-го порядка, все спектральные компоненты вблизи k_0 и дальше отфильтровывались специально подобранной функцией $f(|\mathbf{k}_\perp|)$, уменьшающейся от единицы при $|\mathbf{k}_\perp| \approx 0.9k_0$ до нуля при некотором $K \approx 1.5k_0$. В результате такой процедуры поперечные спектры оставались достаточно быстро (примерно экспоненциально) спадающими, и при $|\mathbf{k}_\perp|$ в районе k_0 оказывались на 3–4 десятичных порядка меньше основных спектральных компонент. Естественно также, что нелинейное "расползание" по спектру было тем медленнее, чем меньше уровень нелинейности (при таком выборе масштаба поля, который соответствует значению коэффициента $|\alpha| = 1$, нелинейность становится сильной при $|E| \sim 1$; в наших вычислениях максимальные значения иногда доходили до значений 0.5–0.6, что соответствует все еще умеренной нелинейности; насколько приемлема такая интенсивность для реальной физической среды и не запустятся ли при этом неучтенные моделью (1) процессы – это другой вопрос [16]).

Вычислительная область представляла собой квадрат $2\pi \times 2\pi$ с периодическими граничными условиями, и было взято безразмерное значение $k_0 = 40$. Шаг дискретизации по поперечным координатам был равен $h_\perp = 2\pi/320$, т.е. на длину волны λ_0 приходилось 8 точек числовой решетки. Шаг по продольной координате в разных сериях экспериментов был $h_z = 0.01\lambda_0$ либо $h_z = 0.0004$. Для фокусирующей среды нелинейные коэффициенты были положены $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, а в дефокусирующем случае $\alpha = -1$, $\beta = -0.5$.

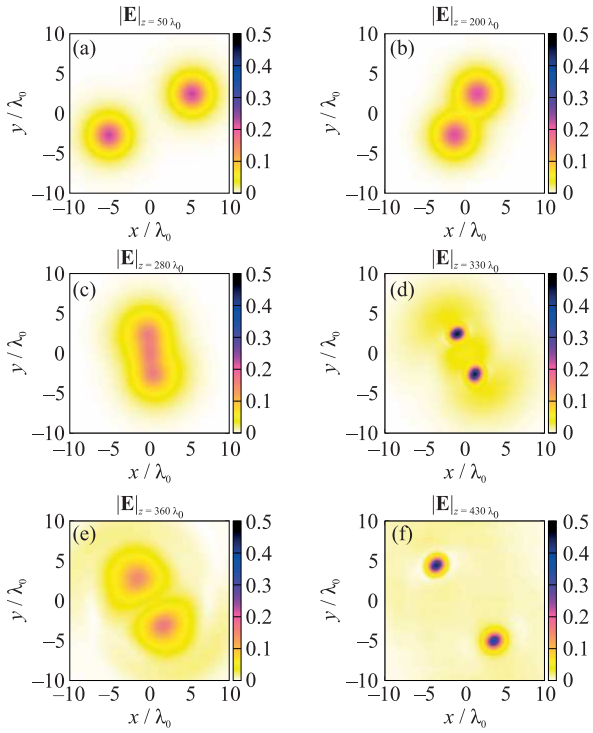

Рис. 3. (Цветной онлайн) Пример касательного столкновения двух тонких световых пучков с противоположными круговыми поляризациями. Показана не вся вычислительная область, а только ее центральная часть

Двумерные солитоны. Большой интерес представляет вопрос о возможном балансе между дифракцией и нелинейностью на малых масштабах, когда включаются непараксиальные эффекты и НУШ уже не применимы. Чтобы промоделировать поведение таких узких световых пучков, начальная конфигурация бралась в виде поляризованной по кругу волны

$$\mathbf{U}(x,y,0) = (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)S(x,y,w), \qquad (9)$$

причем профиль $S(x,y,w)$ примерно равен сумме двух гауссианов при достаточно больших значениях параметра $w \sim 10$:

$$S(x,y,w) = 0.10\exp(-40[R(x)+R(y)]) + \\ + 0.06\exp(-w[R(x)+R(y)]), \qquad (10)$$

где $R(\xi) = (1-\cos(\xi))[1 + (1-\cos(\xi))/6] \approx \xi^2/2$. В этом выражении параметры подбирались грубо, после всего нескольких пробных симуляций, поэтому не следует воспринимать его слишком серьезно.

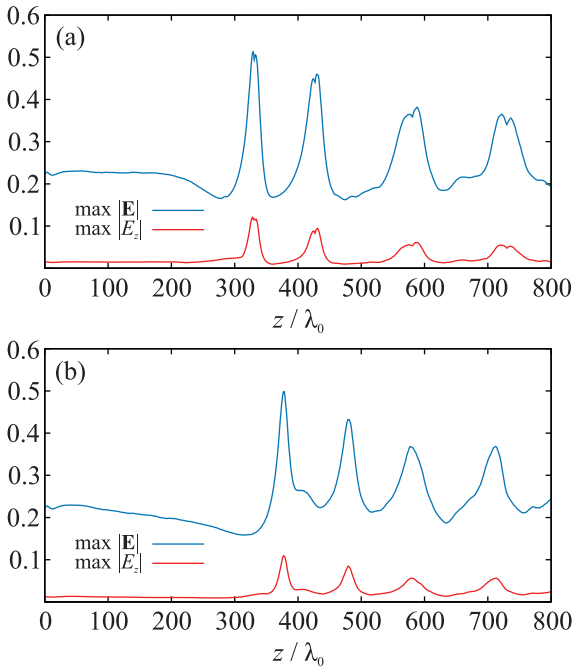

Рис. 4. (Цветной онлайн) Примеры зависимостей максимальной амплитуды поля от координаты z при взаимодействии двух пучков с противоположными круговыми поляризациями: (a) – для касательного столкновения, показанного на рис. 3; (b) – для исходно параллельных пучков

Здесь надо сказать, что наша модель, как и должно быть, может содержать в своих решениях как прямую волну [$\sim \exp(ik_0 z)$], так и встречную [$\sim \exp(-ik_0 z)$]. Чтобы сделать встречную волну пренебрежимо слабой, начальная производная была $\partial_z \mathbf{U}(x,y,0) = 1.01ik_0\mathbf{U}(x,y,0)$. Начальный потенциал $\phi(x,y,0)$ полагался равным нулю.

На рисунке 1 показано, как зависела от z максимальная амплитуда электрического поля при значениях $w = 7.9$, 8.0, 8.2, 8.25, 8.3 (номера линий соответственно от *1* до *5*). Видно, что поведение кривых напоминает сильно ангармонические одномерные колебания некоторой фиктивной частицы в несимметричном потенциале, за исключением последнего апериодического случая. Это соответствует многократной повторной самофокусировке светового пучка. Пример профилей амплитуды поля в минимуме и в максимуме представлен на рис. 2a. Заметим также, что при $w = 8.0$ радиальные колебания настолько малы, что можно говорить о сбалансированном, однородном по z двумерном солитоне, что подтверждает рис. 2b.

Вполне вероятно, что существует близкая к нашей модели гамильтонова система, в которой подобные векторные солитоны являются устойчивыми экстремалями. Поиск такой консервативной системы – задача на будущее.

И раз уж мы получили такие, по-видимому, устойчивые (по крайней мере – длительно существующие) световые лучи, интересно промоделировать их взаимодействие при разных начальных положениях и направлениях по отношению к оси z. Пример касательного столкновения двух пучков, имеющих противоположные круговые поляризации, представлен на рис. 3 (цветовая палитра там взята “в негативе”, чтобы хорошо визуализировались области малой амплитуды поля). В этом случае начальный профиль был

$$\mathbf{U}(x,y,0) = (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)S(x-1.0, y-0.4, 8.0)e^{-ix} - \\ - (i\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)S(x+1.0, y+0.4, 8.0)e^{ix}. \quad (11)$$

Два солитона при взаимодействии частично обменялись своими поляризациями, в результате чего от места столкновения разошлись два слегка различных пучка с уже примерно линейными поляризациями, причем оба в сильно-колебательном режиме и под некоторым углом рассеяния, зависящим от скорости сближения и прицельного параметра. Отмеченное небольшое различие рассеянных пучков обусловлено отсутствием симметрии в начальном условии и свидетельствует об эффектах, выходящих за рамки НУШ. Небольшая часть энергии при столкновении излучилась в виде “свободной” волны малой амплитуды. Зависимость максимальной амплитуды поля для этого численного эксперимента показана на рис. 4a. На панели (b) того же рисунка показана максимальная амплитуда для случая исходно параллельных близких пучков, когда начальное состояние задавалось функцией

$$\mathbf{U}(x,y,0) = (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)S(x-0.4, y-0.4, 8.0) - \\ - (i\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)S(x+0.4, y+0.4, 8.0). \quad (12)$$

Необходимо сказать, что неупругость столкновений особенно наглядно проявляется именно при параллельных начальных пучках, потому что после взаимодействия они расходятся в пространстве под вполне конечными углами.

Похожий в качественном отношении частичный обмен поляризациями при столкновении уединенных структур наблюдался в недавней работе [17] для трехмерных “световых пуль”.

Во всех вышеприведенных примерах начальная интенсивность уже была достаточно высока, а поперечный масштаб достаточно мал, так что многократного усиления волны не происходило. Разумеется, наш метод способен моделировать также и

сильную относительную фокусировку, когда интенсивность волны увеличивается на несколько порядков. Для этого необходимо только использовать более мелкое пространственное разрешение и большие значения k_0. Пример сильной нелинейной фокусировки света после "плохой" линзы показан на рис. 5 для $k_0 = 60$. В данном численном эксперименте абсолютное значение электрического поля увеличилось более чем в 10 раз, т.е. интенсивность – на два порядка. Надо сказать, что системы с еще более сильной относительной фокусировкой можно моделировать в два этапа. Начальное распространение света, происходящее в линейном режиме, можно вычислить методами теории линейной дифракции. А уже перед началом нелинейного режима следует использовать полученное линейное решение в качестве начального состояния для сильно нелинейных вычислений.

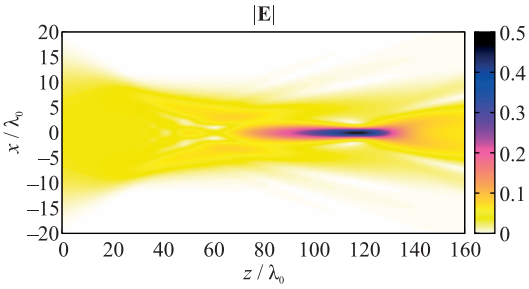

Рис. 5. (Цветной онлайн) Нелинейная фокусировка поляризованной по кругу волны после несовершенной линзы, у которой центральная часть почти не отклоняет лучи. Показано распределение амплитуды поля в продольной плоскости $y = 0$. Сфокусированная структура имеет форму тонкой иглы

Структуры в дефокусирующей среде. Приведем кратко, не вдаваясь в подробности, несколько численных примеров и для дефокусирующего случая. При такой нелинейности интерес представляют мелкомасштабые структуры на более-менее однородном фоне интенсивности. Самые известные из них – оптические вихри (см., например, [18–24] и ссылки там). Поскольку в длинно-масштабном приближении (связанные НУШ) базисными являются круговые поляризации, в наших численных экспериментах с вихрями именно циркулярно поляризованная волна была фоном. Пример двух пар вихрь–антивихрь показан на рис. 6. Видно, что ширина сердцевин вихрей составляет всего пару длин волн при амплитуде фона около 0.3.

Другой интересный объект в дефокусирующей среде – доменная стенка между двумя противоположными круговыми поляризациями [25–31]. Для существования такой структуры в рамках связанных НУШ требуется условие $\beta/\alpha > 0$, которое у нас выполнено. На рисунке 7 приведен пример оптического пузыря, границей которого является доменная стенка. Поскольку начальное состояние не было равновесным, пузырь испытывает колебания за счет эффективного "поверхностного натяжения" [32].

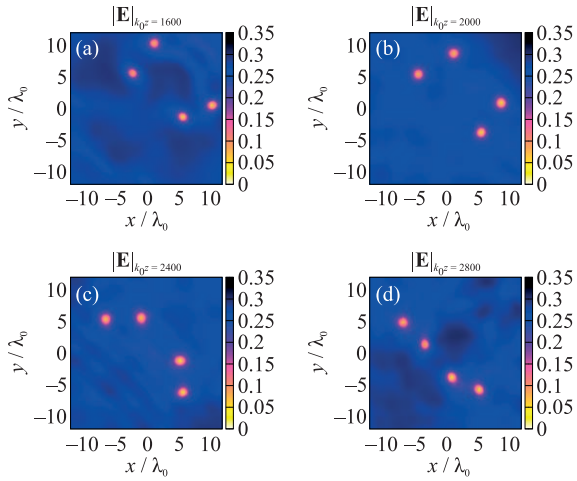

Рис. 6. (Цветной онлайн) Пример взаимодействующих оптических вихрей в поляризованной по кругу волне при дефокусирующей нелинейности

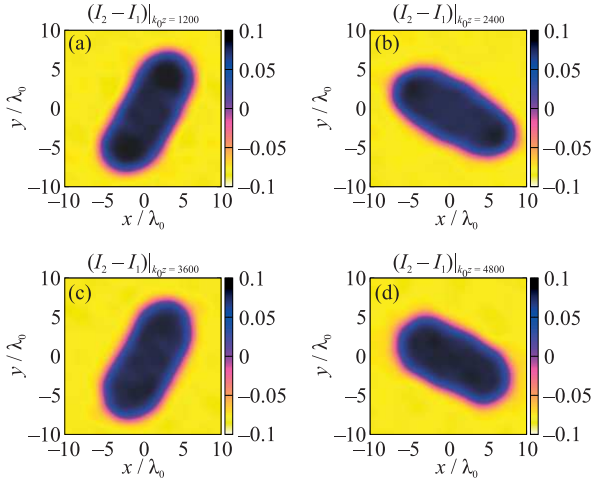

Рис. 7. (Цветной онлайн) Пример оптического пузыря в дефокусирующей среде. При увеличении z имеют место квадрупольные колебания формы доменной стенки

Если пространственно разделенные круговые поляризации находятся в касательном движении одна относительно другой вдоль доменной стенки, то становится возможной неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в ее "квантовом" варианте [33–36]. Последовательные стадии такой неустойчивости, при начальном состоянии в виде слегка искаженных

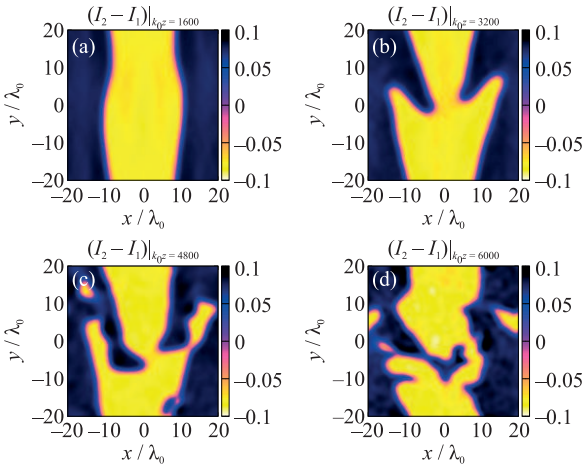

Рис. 8. (Цветной онлайн) Пример развития оптической неустойчивости Кельвина–Гельмгольца

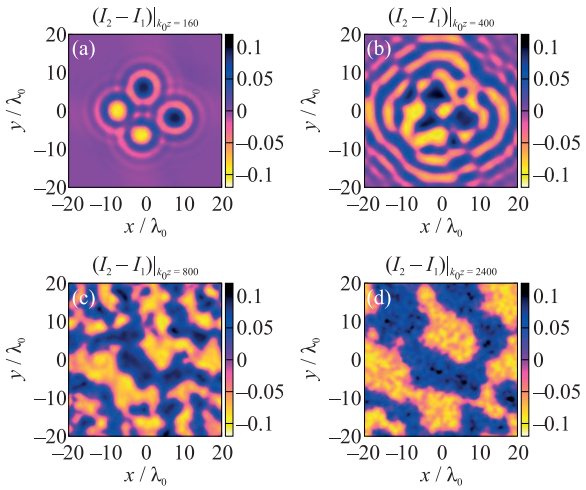

Рис. 9. (Цветной онлайн) Пример развития неустойчивости линейно поляризованной волны в дефокусирующей среде. По мере увеличения координаты z происходит разделение волны на области с правой и левой круговыми поляризациями

“скользящих” полос левой и правой поляризации, видны на рис. 8.

И в последнем примере на рис. 9 показан процесс развития неустойчивости линейно поляризованной волны. В начальном состоянии имелась пространственно неразделенная суперпозиция лево- и правополяризованных волн, причем в каждой компоненте присутствовало по паре вихрей – “для затравки”. С увеличением z сердцевина каждого вихря начинает заполняться противоположной поляризацией, появляются специфические волны модуляции, а затем формируется квазислучайная картина доменов, напоминающая географическую карту.

Заключение. Предложенная в этой работе модель продемонстрировала свою состоятельность в качестве полезного рабочего инструмента для изучения строго монохроматических нелинейных волн. В целом ряде интересных задач можно будет добиться существенного продвижения с помощью этого метода. Следует также попытаться найти явно консервативные динамические системы, близкие к нашей модели, чтобы лучше понимать вопросы устойчивости мелкомасштабных структур.

Проблема пространственно-временного развития полученных стационарных картин при малых немонохроматических возмущениях требует отдельного исследования. Например, пока не ясно, как далеко может распространяться самосфокусированный тонкий пучок под воздействием хроматической дисперсии. Особое внимание в этой связи должны вызывать также квазицилиндрические структуры с доменными стенками, поскольку в случае аномальной дисперсии групповой скорости они стремятся разбиться на трехмерные “капли” [37]. Но можно надеяться, что, поскольку характерные продольные масштабы (порядка сотен и тысяч длин волн) в наших численных опытах оказались не слишком велики по сравнению с доступной длиной когерентности падающего лазерного света, то при достаточно большой длине когерентности стационарная картина просто не успеет сильно испортиться на таких дистанциях.

Финансирование работы. Работа выполнена в рамках госзадания по теме FFWR-2024-0013.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М. (1982).
2. А. Л. Берхоер, В. Е. Захаров, ЖЭТФ **58**, 903 (1970).
3. I. Carusotto and C. Ciuti, Rev. Mod. Phys. **85**, 299 (2013).
4. G. I. Martone, T. Bienaime, and N. Cherroret, Phys. Rev. A **104**, 013510 (2021).
5. G. I. Martone and N. Cherroret, Phys. Rev. Lett. **131**, 013803 (2023).
6. S. Chi and Q. Guo, Opt. Lett. **20**, 1598 (1995).
7. B. A. Malomed, K. Marinov, D. I. Pushkarov, and A. Shivarova, Phys. Rev. A **64**, 023814 (2001).
8. G. Fibich and B. Ilan, Phys. Rev. E **67** 036622 (2003).
9. C. S. Milsted, Jr. and C. D. Cantrell, Phys. Rev. A **53**, 3536 (1996).
10. L. Berge, Phys. Rep. **303**, 259 (1998).
11. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, Успехи физических наук **182**, 569 (2012).

12. F. Bouchard, H. Larocque, A. M. Yao, C. Travis, I. De Leon, A. Rubano, E. Karimi, G.-L. Oppo, and R. W. Boyd, Phys. Rev. Lett. **117**, 233903 (2016).
13. C. J. Gibson, P. Bevington, G.-L. Oppo, and A. M. Yao, Phys. Rev. A **97**, 033832 (2018).
14. D. Mihalache, D. Mazilu, L.-C. Crasovan, I. Towers, A. V. Buryak, B. A. Malomed, L. Torner, J. P. Torres, and F. Lederer, Phys. Rev. Lett. **88**, 073902 (2002).
15. D. Mihalache, D. Mazilu, I. Towers, B. A. Malomed, and F. Lederer, Phys. Rev. E **67**, 056608 (2003).
16. A. Couairon and A. Mysyrowicz, Phys. Rep. **441**, 47 (2007).
17. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **119**, 579 (2024).
18. G. A. Swartzlander, Jr. and C. T. Law, Phys. Rev. Lett. **69**, 2503 (1992).
19. *Optical Vortices*, ed. by M. Vasnetsov and K. Staliunas, Nova Science, N.Y. (1999).
20. L. Pismen, *Vortices in Nonlinear Fields*, Oxford University, London (1999).
21. P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, and R. Carretero-González, *The Defocusing Nonlinear Schrödinger Equation: From Dark Solitons to Vortices and Vortex Rings*, SIAM, Philadelphia (2015).
22. M. J. Paz-Alonso and H. Michinel, Phys. Rev. Lett. **94**, 093901 (2005).
23. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **117**, 590 (2023).
24. В. П. Рубан, ЖЭТФ **164**, 863 (2023).
25. M. Haelterman and A. P. Sheppard, Phys. Rev. E **49**, 3389 (1994).
26. M. Haelterman and A. P. Sheppard, Phys. Rev. E **49**, 4512 (1994).
27. A. P. Sheppard and M. Haelterman, Opt. Lett. **19**, 859 (1994).
28. Yu. S. Kivhsar and B. Luther-Davies, Phys. Rep. **298**, 81 (1998).
29. N. Dror, B. A. Malomed, and J. Zeng, Phys. Rev. E **84**, 046602 (2011).
30. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **117**, 292 (2023).
31. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **120**, 104 (2024).
32. K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, Phys. Rev. A **83**, 033602 (2011).
33. H. Takeuchi, N. Suzuki, K. Kasamatsu, H. Saito, and M. Tsubota, Phys. Rev. B **81**, 094517 (2010).
34. N. Suzuki, H. Takeuchi, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and H. Saito, Phys. Rev. A **82**, 063604 (2010).
35. H. Kokubo, K. Kasamatsu, and H. Takeuchi, Phys. Rev. A **104**, 023312 (2021).
36. В. П. Рубан, ЖЭТФ **165**, 294 (2024).
37. K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, Phys. Rev. A **83**, 053606 (2011).