Письма в ЖЭТФ, том 121, вып. 2, с. 137 – 142

Масса магнитных монополей и магнитная восприимчивость спинового льда

М. И. Рыжкин, И. А. Рыжкин[1)]

Институт физики твердого тела им. Ю. А. Осипьяна РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 16 октября 2024 г.
После переработки 30 ноября 2024 г.
Принята к публикации 3 декабря 2024 г.

Исследовано влияние конечной массы магнитных монополей на временную и пространственную дисперсию магнитной восприимчивости спинового льда. Показано, что в низкочастотной области сохраняется дебаевская зависимость восприимчивости от частоты, тогда как в высокочастотной области восприимчивость убывает с ростом частоты быстрее. В результате устраняется нарушение правила сумм, характерное для дебаевской зависимости. Также обсуждается возможность реализации коллективных возбуждений в системе магнитных монополей при высоких частотах, которые аналогичны плазмонам в системах с электрическим зарядом.

DOI: 10.31857/S0370274X25010208, EDN: GGFQDY

1. Введение. Спиновым льдом называют соединения типа $Ho_2Ti_2O_7$ и $Dy_2Ti_2O_7$, которые демонстрируют необычные магнитные корреляции [1]. Магнитные ионы Ho^{3+} и Dy^{3+} расположены в вершинах правильных тетраэдров, связанных в трехмерную пирохлорную решетку. Эквивалентно, такую магнитную решетку можно представлять как решетку, образованную серединами связей решетки типа алмаза. Благодаря сильной анизотропии магнитные моменты (далее спины) могут быть направлены только вдоль локальных осей анизотропии, которые совпадают со связями решетки типа алмаза. В основном состоянии направления спинов удовлетворяют правилу льда: два спина направлены к центру и два спина от центра каждого тетраэдра (см. рис. 1). Это правило приводит к вырожденному основному состоянию, степень вырождения которого экспоненциально растет с числом спинов в образце, а также к неочевидному топологическому порядку [2, 3]. Чтобы проиллюстрировать его, удобно представить направления спинов в основном состоянии как систему запутанных струн, в которых спины направлены вдоль одного из направлений струны (одна из таких струн выделена на рис. 1). Тогда правило льда гарантирует, что любая струна является или замкнутой или оканчивается на границе образца.

В основном состоянии система спинов является замороженной, и невозможно переориентировать никакой спин без нарушения правила льда, т.е. без повышения энергии. Переворот любого спина нарушает правило льда на двух смежных вершинах, образуя одну вершину с тремя спинами, направленными к ней и одним спином от вершины, и вторую вершину с тремя спинами от и одним спином, направленным к вершине. Эти вершины несут положительный и отрицательные магнитный поляризационный заряд и называются emergent магнитными монополями [4–6]. Последующими переворотами спинов магнитные монополи могут быть удалены на большое расстояние (см. рис. 2). Важно, что при движении магнитных монополей происходит изменение направления спи-

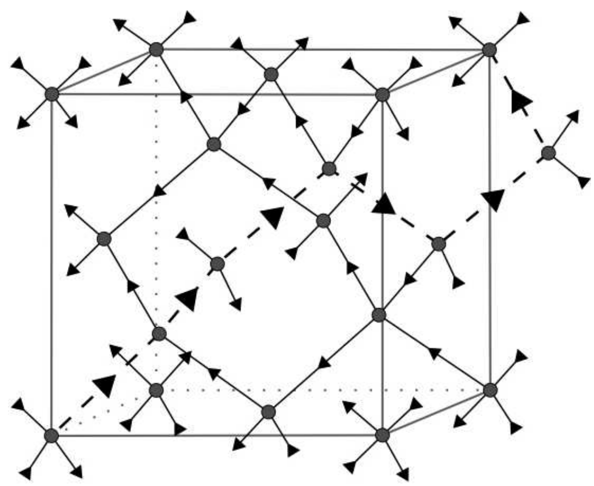

Рис. 1. Спины расположены в середине связей алмазной решетки, стрелками показаны направления спинов в основном состоянии. Выделены спины, переворот которых приведет к рождению и движению пары магнитных монополей струны, см. рис. 2

[1)]e-mail: ryzhkin@issp.ac.ru

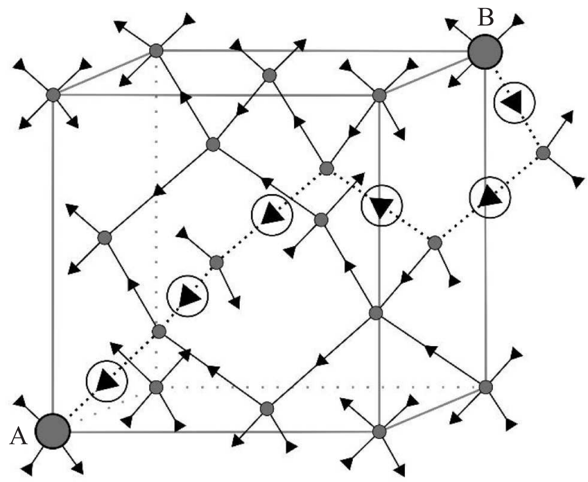

Рис. 2. Переворот спинов вдоль струны означает создание и разделение положительного (A) и отрицательного (B) магнитных монополей. И наоборот, движение монополей приводит к переориентации спинов вдоль пройденного пути, второй монополь того же знака не может пройти тем же путем

нов на пути их следования. Чтобы избежать недопонимания, заметим: это не истинные магнитные монополи, приводящие к соотношению $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$, а псевдомонополи, приводящие к соотношению $\nabla \cdot \mathbf{H} \neq 0$. Тем не менее emergent магнитные монополи очень полезны, они могут рассматриваться как классические квазичастицы, позволяющие удобно описать отклик системы магнитных атомов спинового льда на приложенное магнитное поле. Теория такого отклика была впервые предложена в [4], а ее обобщение для неоднородных магнитных полей было дано в [7].

Однако теория, разработанная в работах [4, 7], обладает двумя взаимосвязанными недостатками. Во-первых, она приводит к дебаевской зависимости восприимчивости от частоты, для которой характерно нарушение правила сумм [8]. Во-вторых, эта теория является теорией релаксации, но не динамики, так как она не описывает никаких инерционных эффектов. Оба недостатка являются прямым следствием нулевой массы emergent магнитных монополей в этой теории. В конструктивной работе [9] впервые было показано, что введение конечной массы магнитных монополей приводит к восстановлению правила сумм для магнитной восприимчивости. В этой работе приведено детальное обсуждение физического смысла конечной массы магнитных монополей, ее аналогии с эффективной массой магнитных доменных стенок. Однако, в работе [9] был рассмотрен только случай однородного магнитного поля, т.е. пространственная дисперсия не рассматривалась. При таком рассмотрении невозможно провести различие между поперечной и продольной восприимчивостями, которые, как мы покажем ниже, существенно различаются.

В этой работе мы рассмотрим общий случай динамики магнитной системы спинового льда в переменном и неоднородном магнитном поле. Мы рассчитаем поперечную и продольную восприимчивость как функцию частоты и волнового вектора, покажем, что введение конечной массы магнитных монополей восстанавливает правило сумм, а также обсудим возможность появления в высокочастотной области коллективных возбуждений системы магнитных монополей, аналогичных плазмонам в системах с электрическим зарядом. Далее, в разделе 2, мы коротко опишем модель, основные уравнения и их решения для магнитной восприимчивости. В разделе 3 мы обсудим полученные результаты, дадим численные оценки различных параметров и обсудим возможные коллективные возбуждения в системе магнитных монополей при высоких частотах. В этом же разделе мы обсудим возможность использования полученных результатов для экспериментального измерения массы магнитных монополей и различные следствия, которые могут быть использованы для проверки модели магнитных монополей.

2. Модель и основные уравнения. Мы будем описывать отклик спинового льда на приложенное переменное и неоднородное поле в терминах магнитных монополей, частично описанных во введении. При достаточно низкой температуре концентрация магнитных монополей низка, и их можно рассматривать как почти невзаимодействующие классические квазичастицы. Это делает использование картины магнитных монополей гораздо более удобным способом описания, чем непосредственное рассмотрение сильно взаимодействующих спинов, концентрация которых предельно высока.

Единственное взаимодействие или точнее корреляция между магнитными монополями, состоит в том, что если по некоторому пути прошел монополь, то второй монополь того же знака по этому же пути пройти не может (см. рис. 1, 2). Такая корреляция может быть описана как появление поляризации в магнитной системе и соответственно появление некоторого поля, препятствующего потоку магнитных монополей. Для количественного описания этой корреляции мы будем использовать теорию Жаккара, которая была разработана для решения аналогичной проблемы в физике водяного льда [10], в обозначениях работы [7]. Для учета конечной массы магнитных монополей в уравнения для потоков частиц мы добавим слагаемые, пропорциональные первым производным от потоков по времени. Обоснование такой модификации теории Жаккара будет дано ниже.

С учетом сказанного уравнения, описывающие поведение магнитных монополей во внешнем магнитном поле, можно записать в следующем виде:

$$\Gamma_\pm \frac{\partial \mathbf{j}_\pm}{\partial t} + \mathbf{j}_\pm = \frac{\sigma_\pm}{Q_\pm^2}[Q_\pm(\mathbf{H}+\mathbf{h}) - \eta_\pm \Phi \mathbf{\Omega}] - D_\pm \nabla \delta n_\pm, \quad (1)$$

$$\partial \mathbf{\Omega}/\partial t = \sum_\pm \eta_\pm \mathbf{j}_\pm, \quad (2)$$

$$\partial \delta n_\pm/\partial t = -\nabla \cdot \mathbf{j}_\pm, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = 4\pi \sum_\pm Q_\pm \delta n_\pm. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{j}_\pm$ – плотности потоков магнитных монополей, $\mathbf{H}$, $\mathbf{h}$ – внешнее магнитное поле и магнитное поле неоднородного распределения магнитных монополей соответственно, $\mathbf{\Omega} = \mathbf{M}/Q$ – конфигурационный вектор, пропорциональный намагниченности. Величины $\sigma_\pm, D_\pm, Q_\pm = \pm Q$ – проводимости, коэффициенты диффузии и заряды магнитных монополей, $\eta_\pm = \pm 1$. Величина $\Phi = 8ak_BT/\sqrt{3}$ рассчитана в работе [11], a – длина связи, k_B, T – постоянная Больцмана и температура соответственно. Уравнения (1) дают плотности потоков монополей под действием обобщенной термодинамической силы. Уравнение (2) описывает конфигурационный вектор, возникающий из-за потоков магнитных монополей. Согласно уравнениям (1), это внутреннее поле, тормозящее потоки монополей. Уравнения (3) – уравнения непрерывности, и уравнение (4) – магнитный аналог уравнения Пуассона.

Единственное отличие системы уравнений (1)–(4) от обычной системы уравнений, описывающих релаксацию в спиновом льде, заключается в наличии первых производных по времени от потоков в левых частях уравнений (1) [4, 6]. Эти слагаемые учитывают инерционные свойства магнитных монополей, они пропорциональны их массам, и фактически позволяют описать динамику магнитных монополей. Чтобы выяснить физический смысл такой модификации обычных уравнений для потоков, мы приведем уравнения (1) к следующему виду:

$$\frac{\partial \mathbf{p}_\pm}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_\pm}{\tau_\pm} + = [Q_\pm(\mathbf{H}+\mathbf{h}) - \eta_\pm \Phi \mathbf{\Omega}] - k_BT\frac{\nabla \delta n_\pm}{n_\pm}, \quad (5)$$

где $\mathbf{p}_\pm$ – импульсы магнитных монополей, $\tau_\pm = \Gamma_\pm = \sigma_\pm m_\pm / Q_\pm^2 n_\pm$ – времена релаксации импульса, $m_\pm$ – массы магнитных монополей. При получении уравнения (5) мы использовали соотношения Эйнштейна $\sigma_\pm = Q_\pm^2 D_\pm n/k_BT$, где $n_\pm$ – равновесные концентрации. Так как уравнения (5) совпадают с уравнениями теории Друде для электронов, то использованное нами описание инерционных эффектов аналогично теории Друде.

Далее, в Фурье представлении система уравнений превращается в следующую систему линейных уравнений:

$$(-i\omega\Gamma_\pm + 1)\mathbf{j}_\pm + i\mathbf{q}D_\pm \delta n_\pm = \pm(\sigma_\pm/Q_\pm^2)[Q(\mathbf{H}+\mathbf{h}) - \Phi\mathbf{\Omega}], \quad (6)$$

$$-i\omega \mathbf{\Omega} = \mathbf{j}_+ - \mathbf{j}_-, \quad (7)$$

$$\omega \delta n_\pm = \mathbf{q} \cdot \mathbf{j}_\pm, \quad (8)$$

$$i\mathbf{q} \cdot \mathbf{h} = 4\pi Q(\delta n_+ - \delta n_-). \quad (9)$$

Из этой системы линейных уравнений мы можем найти намагниченность как функцию внешнего магнитного поля, тем самым найти магнитную восприимчивость как функцию частоты и волнового вектора. Чтобы упростить выкладки, далее мы предположим равные подвижности и постоянные $\Gamma_\pm$ для положительных и отрицательных монополей. Также заметим, что магнитные заряды и концентрации равны по определению. Для решения удобно сначала исключить концентрации $\delta n_\pm = \mathbf{q} \cdot \mathbf{j}_\pm/\omega$, затем плотности потоков $\mathbf{j}_\pm$. В результате получим промежуточную систему уравнений:

$$(-\omega^2\Gamma - i\omega)\mathbf{\Omega} + D\mathbf{q}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{\Omega}) = \frac{2\sigma}{Q^2}[Q(\mathbf{H}+\mathbf{h}) - \Phi\mathbf{\Omega}],$$
$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{h} = -4\pi Q(\mathbf{q} \cdot \mathbf{\Omega}). \quad (10)$$

Для нахождения поперечной части восприимчивости в (10) следует положить $\mathbf{h} = 0$, так как поле неоднородного распределения магнитных монополей продольное. Но для получения продольной части это поле отлично от нуля. По этой причине выражения для поперечной и продольной восприимчивостей будут различаться. Рассматривая указанные случаи отдельно, можно получить общее выражение для намагниченности $\mathbf{M} = Q\mathbf{\Omega}$ через внешнее магнитное поле в следующем виде:

$$M_\alpha = \left[\frac{Q^2/\Phi}{(1 - i\omega\tau - \omega^2\tau\Gamma)}\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{Q^2/\Phi}{(\tau/\tau' - i\omega\tau - \omega^2\tau\Gamma + \tau D q^2)}\frac{q_\alpha q_\beta}{q^2}\right] H_\beta, \quad (11)$$

где времена релаксации определяются выражениями:

$$\tau = k_BT/2Dn\Phi, \quad \tau' = k_BT/2(4\pi Q^2 + \Phi)Dn. \quad (12)$$

Выражение в квадратных скобках в правой части уравнения (11) есть тензор магнитной восприимчивости спинового $\chi_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{q})$ как функция частоты и волнового вектора, при этом первое и второе слагаемое описывают поперечную и продольную восприимчивости соответственно.

В заключение этого раздела сделаем следующие замечания. Во-первых, выражение для поперечной восприимчивости совпадает с результатом работы [9], тогда как выражение для продольной восприимчивости заметно отличается. Во-вторых, в работе [9] рассматривался отклик на однородное магнитное поле, что в нашем подходе соответствует предельному переходу $\mathbf{q} \to 0$. Результат такого перехода для выражения $q_\alpha q_\beta/q^2$ зависит от того, по какому пути волновой вектор стремится к точке $\mathbf{q} = 0$. Эта неоднозначность физически означает зависимость намагниченности образца во внешнем однородном поле от формы образца (зависимость от размагничивающего фактора). Таким образом, если сначала рассмотреть восприимчивость, зависящую от волнового вектора, а затем перейти к пределу $\mathbf{q} \to 0$, то зависимость от формы образца сохраняется. Если же предельный переход $\mathbf{q} \to 0$ совершить в начальных уравнениях, как это было сделано в [9], то зависимость от формы образца теряется, что неверно. Эта неэквивалентность порядка предельных переходов является следствием того, что намагниченность, как и поляризация, не является чисто объемной величиной, а существенно зависит от граничных условий на поверхности образца [12].

3. Обсуждение результатов. Для обсуждения результатов полезно выписать действительные и мнимые части поперечной и продольной восприимчивости, которые следуют из формулы (11):

$$\chi^{\perp}_{\mathrm{Re}} = \frac{Q^2}{\Phi}\frac{1-\omega^2\tau\Gamma}{(1-\omega^2\tau\Gamma)^2+(\omega\tau)^2}, \qquad \chi^{\perp}_{\mathrm{Im}} = \frac{Q^2}{\Phi}\frac{\omega\tau}{(1-\omega^2\tau\Gamma)^2+(\omega\tau)^2}, \tag{13}$$

$$\chi^{\parallel}_{\mathrm{Re}} = \frac{Q^2}{\Phi}\frac{\tau/\tau'+\tau D q^2-\omega^2\tau\Gamma}{(\tau/\tau'-\omega^2\tau\Gamma+\tau D q^2)^2+(\omega\tau)^2}, \qquad \chi^{\parallel}_{\mathrm{Im}} = \frac{Q^2}{\Phi}\frac{\omega\tau}{(\tau/\tau'-\omega^2\tau\Gamma+\tau D q^2)^2+(\omega\tau)^2}. \tag{14}$$

Из этих формул прямо следует, что мнимые части восприимчивостей при высоких частотах убывают как $\chi_{\mathrm{Im}}(\omega) \sim \omega^{-3}$. Следовательно интегралы от $\omega\chi_{\mathrm{Im}}(\omega)$ по ω сходятся на верхнем пределе, что означает выполнение правила сумм.

Чтобы сделать дальнейшее обсуждение менее формальным и более близким к экспериментальной ситуации, мы приведем численные оценки типичных значений различных величин, характеризующих спиновый лед. Во-первых, типичные температуры экспериментов по изучению спинового льда лежат в области 0.05 до 2 К [13–16]. Энергия образования пары магнитных монополей в указанных выше соединениях около 10 К [17, 18]. Такое значение энергии рождения пары монополей при температуре 1 К дает равновесную концентрацию $3.6 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$ [4]. При температурах выше, чем 2 К концентрация магнитных монополей настолько велика, что описание на языке магнитных монополей теряет свое преимущество. Оценку величины магнитного заряда можно получить по формулам работ [4, 5]: $Q \approx 4.3 \cdot 10^{-12}$ дин/Гс [4, 5]. Выбранные значения параметров приводят к следующим оценкам следующих величин (при температуре 1 К):

$$\Phi \approx 2.7 \cdot 10^{-23}\,\text{эрг}\cdot\text{см}, \quad Q^2/\Phi \approx 0.7\,\text{эрг}/(\text{Гс}^{-1}\text{см}^{-3}),$$
$$\tau \approx 10^{-4}\,\text{с}, \quad \tau' \approx 10^{-5}\,\text{с}. \tag{15}$$

Наконец, для коэффициента диффузии мы возьмем значение $D \approx 8 \cdot 10^{-13}$ см^2/с, которое остается почти постоянным при температурах ниже 1 К [19].

Из (15) видно, что время релаксации продольной восприимчивости примерно на порядок меньше времени релаксации поперечной восприимчивости, и это различие растет с понижением температуры. Далее отметим, что выражение для времени релаксации продольной восприимчивости включает в себя Q^2, что говорит о вкладе энергии взаимодействия магнитных монополей во время продольной релаксации. Именно этот вклад делает время продольной релаксации более коротким по сравнению со временем поперечной релаксации. Разница в дисперсии поперечной и продольной восприимчивости проиллюстрирована на рис. 3, 4.

Для оценки массы можно использовать выражение $m = (k_B T/D)\Gamma$, смотри первый абзац после уравнения (5). При этом параметр Γ, который характеризует инерцию магнитных монополей, связан с частотой, при которой начинается отклонение от Дебаевской зависимости. Например, если такая частота порядка 10^9 с$^{-1}$, тогда соответствующее значение параметра инерции дает для массы монополей значение порядка $\approx 1.7 \cdot 10^{-13}$ г. Для более точного определения массы магнитных монополей можно использовать смену знака действительных частей восприимчивостей в формулах (13), (14). Частоты, при которых происходит смена знака, удовлетворяют уравнениям $\Gamma\tau\omega_\perp^2 = 1$, $\Gamma\tau'\omega_\parallel^2 = 1$ при этом значение $\omega_\parallel$ определяется при $q = 0$. Эти уравнения вместе с фор-

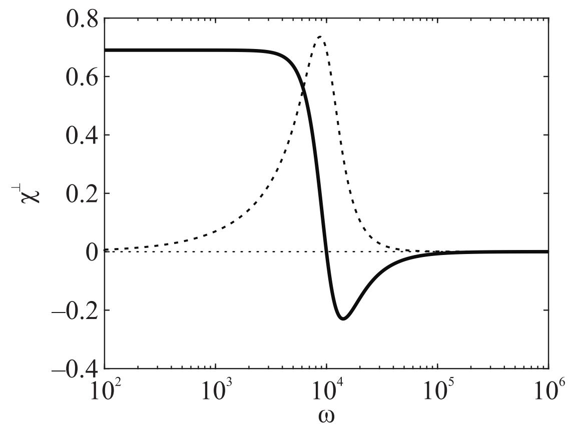

Рис. 3. Действительная (сплошная линия) и мнимая части (пунктирная линия) поперечной восприимчивости при $\Gamma = 10^{-4}$ с (масса $1.7 \cdot 10^{-8}$ г), $\tau = 10^{-4}$ с, $\tau' = 10^{-5}$ с, $T = 1$ K

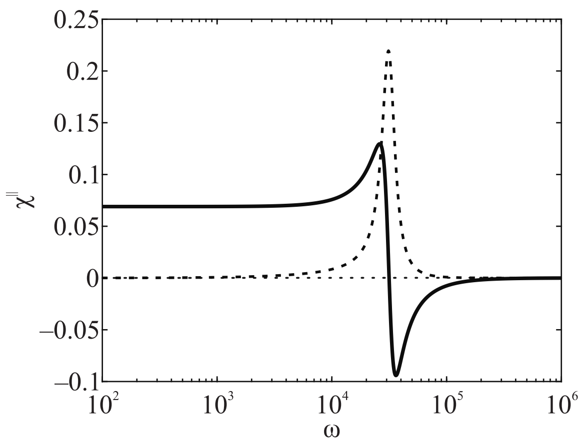

Рис. 4. Действительная (сплошная линия) и мнимая части (пунктирная линия) продольной восприимчивости при $\Gamma = 10^{-4}$ с (масса $1.7 \cdot 10^{-8}$ г), $\tau = 10^{-4}$ с, $\tau' = 10^{-5}$ с, $T = 1$ K

мулой $\Gamma = \sigma m/Q^2 n$, дают два способа определения массы монополей через эти частоты:

$$m_2 = 2n\Phi/\omega_{\perp}^2, \quad m_2 = 2n(4\pi Q^2 + \Phi)/\omega_{\parallel}^2. \tag{16}$$

Но так как оба способа должны давать одинаковый результат, то мы приходим к следующему соотношению между частотами смены знака действительных частей поперечной и продольной восприимчивостей:

$$\omega_{\parallel}^2/\omega_{\perp}^2 = 4\pi Q^2/\Phi + 1. \tag{17}$$

Соотношение (17) может быть проверено экспериментально, и его выполнение может случить критерием применимости теории магнитных монополей.

Наконец отметим, что продольная восприимчивость имеет полюса, которые определяют спектр коллективных возбуждений в системе магнитных монополей. В общем случае эти возбуждения являются сильно затухающими, но при условии $4\gamma/\tau' \gg 1$ (или $m \gg 4.5 \cdot 10^{-7}$ г), затухание мало, и спектр возбуждений описывается выражением:

$$\omega_p = \sqrt{(1/\tau' + Dq^2)/\Gamma}. \tag{18}$$

Из этого выражения видно, эти коллективные возбуждения аналогичны плазменным колебаниям в системах с электрическим зарядом. Действительно, для однородных колебаний формула (18) дает $\omega_p \approx \approx \sqrt{8\pi Q^2 n/m}$, что совпадает с выражением для плазменной частоты однородных колебаний.

Остановимся на возможной интерпретации массы магнитных монополей. В конечном итоге конечная масса обусловлена наличием инерции в системе, т.е. невозможностью мгновенного изменения ориентации магнитных моментов. При этом неважно, каким образом происходит переориентация магнитных моментов: термически активированным или туннельным способом. В любом случае этот процесс должен характеризоваться конечными временами, т.е. быть инерционным. Именно это обстоятельство является основанием для введения феноменологического параметра Г в данной работе. Другой возможный подход к введению массы магнитных монополей – построение последовательной микроскопической теории монополей. К сожалению, в настоящее время такая теория отсутствует. Наконец, отметим следующую аналогию. Из рисунка 2 видно, что каждая пара магнитных монополей связана струной, направленной от отрицательного к положительному монополю. По сути, струна аналогична одномерной структуре упорядоченных моментов. В этом смысле она аналогична упорядоченной одномерной системе, погруженной в трехмерную решетку, а ее концы являются доменными стенками. По этой причине возникает аналогия между массой монополей и эффективной массой доменных стенок, обсуждаемой в теории магнитных систем.

Авторы благодарны А. В. Клюеву и В. В. Синицыну за полезные обсуждения.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Института физики твердого тела Российской академии наук. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. M. J. Harris, S. T. Bramwell, D. F. McMorrow, T. Zeiske, and K. W. Godfrey, Phys. Rev. Lett. **79**, 2554 (1997).
2. L. Pauling, J. Am. Chem. Soc. **57**, 2680 (1935).
3. A. P. Ramirez, A. Hayashi, R. J. Cava, R. Siddharthan, and B. S. Shastry, Nature **399**, 333 (1999).
4. I. A. Ryzhkin, JETP **101**, 481 (2005).
5. C. Castelnovo, R. Moessner, and S. L. Sondhi, Nature **451**, 42 (2008).
6. C. Castelnovo, R. Moessner, and S. L. Sondhi, Ann. Rev. Condens. Matter Phys. **3**, 35 (2012).
7. M. I. Ryzhkin, I. A. Ryzhkin, and S. T. Bramwell, EPL **104**, 37005 (2013).
8. Y. Onodera, J. Phys. Soc. Jpn. **62**, 4104 (1993).
9. N. P. Armitage, Physica B: Physics of Condensed Matter **536**, 353 (2018).
10. C. Jaccard, Phys. Kondens. Materie **3**, 99 (1964).
11. I. A. Ryzhkin and R. W. Whitworth, J. Phys.: Condens. Matter **9**, 395 (1997).
12. R. Landauer, Solid State Commun. **40**, 971 (1981).
13. S. T. Bramwell and M. J. Gingrass, Science **294**, 1495 (2001).
14. S. T. Bramwell, S. R. Giblin, S. Calder, R. Aldus, D. Prabhakaran, and T. Fennel, Nature **461**, 956 (2009).
15. M. J. Jackson, E. Lhotel, S. R. Giblin, S. T. Bramwell, D. Prabhakaran, K. Matsuhira, Z. Hiroi, Q. Yu, and C. Paulsen, Phys. Rev. B **90**, 064427 (2014).
16. S. R. Giblin, M. Twengström, L. Bovo et al. (Collaboration), Phys. Rev. Lett. **121**, 067202 (2018).
17. L. D. C. Jaubert and P. C. S. Holdsworth, J. Phys.: Condens. Matter **23**, 1 (2011).
18. S. T. Bramwell, S. R. Giblin, S. Calder, R. Aldus, D. Prabhakaran, and N. Fennel, Nature **461**, 956 (2009).
19. L. Bovo, J. A. Bloxsom, D. Prabhakaran, G. Aeppli, and S. T. Bramwell, Nat. Commun. **4**, 1535 (2013).